MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

E. KAMKE TÜBINGEN
E. SCHMIDT BERLIN
F. K. SCHMIDT JENA
I. SCHUR BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON
K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:
W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON H. WEYL

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

39. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1935

QA1
M88
v.39

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON H. WEYL

39. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1935

66 52919

QA1
M88
V.31

Inhaltsverzeichnis

Seite

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis 778

Aumann, G., Über den Mischalgorithmus bei analytischen Mittelwerten 625

Bergmann, St. Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. I. 76

Bergmann, St., Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. II. 605

Besicovitch, A. S., The Asymptotic Distribution of the Numerals in the Decimal Representation of the Squares of the Natural Numbers 146

Blichfeldt, H. F., The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables 1

Boerner, H., Zur Theorie der zweiten Variation 492

Bottema, O., Über die Irrfahrt in einem Straßennetz 137

Digel, E., Zu einem Beispiel von Nagumo und Fukuhara 157

Dinghas, A., Über einen Satz von Phragmén und Lindelöf 455

Dinghas, A., Über einen Satz von Milloux 590

Doetsch, G., Über die Stirlingsche Reihe 468

Erdös, P., Über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen 473

Fitting, H., Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren 16

Funk, P., Berichtigung zu meiner Note in Band 16 dieser Zeitschrift: Über Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte 263

Gentzen, G., Untersuchungen über das logische Schließen. I. 176

Gentzen, G., Untersuchungen über das logische Schließen. II. 405

Golomb, M., Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen 45

Grüss, G., Über das Maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$ 215

Grüss, G., Bemerkungen zur Theorie der voll- bzw. mehrfachmonotonen Funktionen 732

Hahn, W., Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen . 634

Hardy, G. H., Landau, E. und Littlewood, J. E., Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic functions 677

Haupt, O., Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven 126

Haupt, O., Nachtrag zur Arbeit „Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven“ 777

Heegner, K., Elliptische Funktionen und Kegelschnittbüschel 663

Seite

Henriksson, O., Über die Hausdorffschen Limitierungsverfahren, die schwächer sind als das Abelsche 501
Heuser, P., Über die Teilsummen beschränkter Potenzreihen 660
Jarnik, V., und Landau, E., Untersuchungen über einen van der Corputschen Satz 745
Kamke, E., Über die Begründung der Mengenlehre 112
Kamke, E., Abhängigkeit von Funktionen und Rang der Funktionalmatrix . . 672
Kennedy, M. D., and Pollard, S., Upper and lower integrals 432
Klein, F., Beiträge zur Theorie der Verbände 227
Knopp, K., Über die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte 768
Kober, H., Transformationsformeln gewisser Besselscher Reihen, Beziehungen zu Zeta-Funktionen 609
Kober, H., Eine der Riemannschen verwandte Funktionalgleichung 630
Köthe, G., Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring 31
Landau, E., Über einige Ungleichungen von Herrn G. Grüss 742
Lichtenstein, L. †, Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten 639
Maruhn, K., Über zwei Gleichgewichtsfiguren rotierender inhomogener Flüssigkeit 244
Mayer, A. E., Eine Überkonvexität 511
Mayr, K., Integraleigenschaften der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome 597
Müller, M., Über die Gradienten der Greenschen Funktion 265
Ostrowski, A., Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. (Die Theorie der Teilbarkeit in allgemeinen Körpern.) Teil I 269
Ostrowski, A., Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. (Die Theorie der Teilbarkeit in allgemeinen Körpern.) Teil II und III 321
Rao, K. S., On equal sums of like powers 240
Scholz, A., Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$ 95
Specht, W., Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe 696
Tautz, G., Reguläre Randpunkte beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem 532
Trjitzinsky, W. J., A theory of quasi-analytic classes 560
Tschebotarëw, N., Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. I. Herrn Professor Dr. Michael Bauer zum 60. Geburtstag am 20. September 1934 gewidmet 161
Walfisz, A., Über einige Dirichletsche Reihen, die meromorphe Funktionen darstellen 649
Ward, M., Note on an arithmetical property of recurring series 211
Watson, G. N., Über Ramanujansche Kongruenzeigenschaften der Zerfällungsanzahlen. (I.) 712
Witt, E., Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz 462

The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables.

Von

H. F. Blichfeldt in Stanford University (California), U. S. A.

A. Introduction and Fundamental Relations.

1. Let $f(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma g_{ij} x_i x_j$ be a positive definite quadratic form with arbitrary coefficients g_{ij} but integral variables x_i, positive or negative or zero. It is well known that if its determinant $\Delta = g_{11} g_{22} \ldots g_{nn} \pm \ldots$ be given, a set of integers $x_1', \ldots, x_n'$ not all $= 0$ can be assigned to the variables such that the ratio $\frac{f'}{\sqrt[n]{\Delta}}$ will be less than or equal to a number γ_n which is a function of n[1]). The precise (smallest permissible) values of γ_n for $n = 2, 3, 4, 5$, have been determined and are respectively $\sqrt{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{8}$[2]). For $n = 6, 7, 8$ the precise values are $\sqrt[6]{\frac{64}{3}}$, $\sqrt[7]{64}$, 2, respectively, to prove which is the purpose of the present paper.

2. We shall employ the method of reduction of a quadratic form devised by Korkine and Zolotareff (Math. Annalen 6 (1873), p. 370—371), obtaining

$$(2.1)\quad f = A_1(x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \gamma x_n)^2 + A_2(x_2 + \delta x_3 + \ldots + \zeta x_n)^2 + \ldots + A_{n-1}(x_{n-1} + \sigma x_n)^2 + A_n x_n^2.$$

The minimum value of f is A_1 (for $x_1 = 1$, $x_2 = \ldots = x_n = 0$). Moreover, if $A_1(x_1 + \ldots)^2$ be deleted, the minimum of the remaining quadratic form in $x_2, \ldots, x_n$ is A_2; if $A_1(x_1 + \ldots)^2 + A_2(x_2 + \ldots)^2$ be

---

[1]) Hermite gave the first limit: $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$; cf. Dickson, History of the Theory of Numbers 3 (1923), pp. 234—252; Remak, Math. Zeitschr. 26 (1927), pp. 694—699; Bieberbach und Schur, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. (1928), p. 529; Blichfeldt, Math. Annalen 101 (1929), pp. 605—608. Recently Hofreiter has determined all the classes of extreme forms (in the sense of Korkine and Zolotareff) in six variables; Monatshefte für Mathematik und Physik 40 (1933), pp. 129—152. The limit $\sqrt[6]{\frac{64}{3}}$ for $n = 6$ is, of course, one of the results established.

[2]) Cf. Korkine and Zolotareff, Math. Annalen 5 (1872), pp. 581—583: ibid. 6 (1873), pp. 366—389; ibid. 11 (1877), pp. 242—292.

deleted the minimum value of the resulting form in $x_3, \ldots, x_n$ is A_3; etc Furthermore, the coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \delta, \ldots, \sigma$ inside the parentheses are none of them greater than $\frac{1}{2}$ in absolute value. We shall call the latter the "inner coefficients" and $A_1, \ldots, A_n$ the "outer coefficients".

Certain relations among the outer coefficients were established by Korkine and Zolotareff:

$$A_{i+1} \geqq \tfrac{3}{4} A_i, \quad A_{i+2} \geqq \tfrac{2}{3} A_i; \tag{2.2}$$

$$A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3} A_{i+4} \geqq \tfrac{1}{8} A_i^4. \tag{2.3}$$

These relations are sufficient to give the precise minima for $n \leqq 5$. The relation (2.3) follows from the theorem of these authors in Math. Annalen 11 (1877), p. 292. This same relation, as well as the precise minima for 6, 7, 8 variables to be established in this paper, would immediately follow from (2.2) and from a certain inequality that we would reasonably expect to be true, namely $A_{i+4} \geqq \frac{1}{2} A_i$. But such an inequality is not always true as is seen from the form

$$[x_1 - \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)]^2 + \tfrac{3}{4}[x_2 - \tfrac{1}{3}(x_3 + x_4 - x_5)]^2 + \tfrac{2}{3}[x_3 - \tfrac{1}{2} x_4 - \tfrac{1}{4} x_5]^2 + \tfrac{1}{2}(1 + r)[x_4 - \tfrac{1}{2} x_5]^2 + \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{4} r) x_5^2, \tag{2.4}$$

where r is an arbitrary positive number $\leqq \frac{1}{4}$.

It will be convenient to introduce the symbol $(ij \ldots k \mid ab \ldots c)$ to represent the result of substituting the numbers (integers) $a, b, \ldots, c$ respectively for $x_i, x_j, \ldots, x_k$; $i < j < \ldots < k$; and 0 for all the remaining variables in the form f; after deleting all the terms preceding $A_i(x_i + \ldots)^2$. Thus with reference to the form (2.4),

$$(2\,3\,4 \mid 1\,0 - 1) = \tfrac{3}{4}(1 + \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}(1 + r) = 2 + \tfrac{1}{2} r.$$

We obviously have $(ij \ldots k \mid ab \ldots c) \geqq A_i$.

3. Whe shall now establish a very important relation that connects any three successive outer coefficients A_i, A_{i+1}, A_{i+2}. Take the form

$$(i, i+1, i+2 \mid x\, y\, z) = A_i(x - sy \pm tz)^2 + A_{i+1}(y - vz)^2 + A_{i+2} z^2.$$

The relative signs of x, y, z can obviously be so determined that the signs preceding s and v will be negative; the numbers s, t, v being all $\geqq 0$. Assume that $A_i > A_{i+1} > A_{i+2}$; we can then write $A_{i+1} = A_i(1 - \lambda^2)$, $A_{i+2} = A_i(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)$. By (2.2) it follows that $\frac{1}{2} \geqq \lambda, \mu$, and we know that $\frac{1}{2} \geqq s, t, v$. Furthermore, the conditions $(1\,2 \mid 0\,1) \geqq A_i$, $(2\,3 \mid 0\,1) \geqq A_{i+1}$, reduce to $s \geqq \lambda$, $v \geqq \mu$. Finally, the conditions $(1\,2\,3 \mid 0\,0\,1) \geqq A_i$, $(1\,2\,3 \mid x_1\,1\,1) \geqq A_i$, give

$$t^2 + (1 - \lambda^2) v^2 + (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) \geqq 1; \tag{3.1}$$

$$(x_1 - s \pm t)^2 + (1 - \lambda^2)(1 - v)^2 + (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) \geqq 1. \tag{3.2}$$

In (3.2) we shall set $x_1 = 0$ when we have $+t$; $x_1 = 1$ when $-t$. The quantity $(x_1 - s \pm t)^2$ is, under these restrictions, found to be $\leqq (1 - s - t)^2$. We therefore replace (3.2) by

$$(3.3) \qquad (1 - s - t)^2 + (1 - \lambda^2)(1 - v)^2 + (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) \geqq 1.$$

Our object being to find out what restrictions upon λ, μ, free from s, t, v, are implied by the conditions (3.1) and (3.3), we obviously replace s by its smallest value λ.

We now transpose all the terms to the right hand sides in (3.1) and (3.3) except t^2 and $(1 - \lambda - t)^2$. Then, unless $(1 - \lambda^2)(1 - v)^2 + (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) > 1$, we may eliminate t by extracting the square roots and adding, obtaining an inequality which reduces to the following:

$$(3.4) \qquad (1 - 2v)^2 \geqq 1 - 2(1 - \lambda)(1 - \mu^2) = V, \text{ say.}$$

Since $v \geqq \mu$ we immediately derive the desired relation:

$$(3.5) \qquad \lambda + \mu + \lambda\mu \lessgtr 1; \quad \text{or} \quad \mu \lessgtr \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}.$$

The inequality (3.4) will also furnish an upper bound to v provided V is not negative. Hence under this condition the *inner coefficient* v *does not exceed* $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{V})$. From this result and from (3.1) we also find that *the inner coefficient* t does not fall below $\frac{1}{2}(1 - \lambda + (1 + \lambda)\sqrt{V})$.

If $(1 - \lambda^2)(1 - v)^2 + (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) > 1$, the condition (3.5) is found to be true nevertheless, after setting $v = \mu$ and comparing. Moreover, if we assume $V \geqq 0$ as above, the upper bound to v (and therefore also the lower bound to t) will again satisfy the conditions just given.

B. Evaluation of Upper Bounds to the Outer Coefficients.

4. We now take the quadratic form (2.1) in six to eight variables and write $A_1 = 1$, $A_2 = A$, $A_3 = B, \ldots, A_8 = G$. The object of this paper will have been attained if we show that $ABCDE \geqq \frac{3}{64}$, $AB \ldots F \geqq \frac{1}{64}$, $AB \ldots G \geqq \frac{1}{256}$, because then it would follow that $\gamma_6 \leqq \sqrt[6]{\frac{64}{3}}$, etc.[3]).

For convenience we write $A = a$, $B = ab$, $C = abc, \ldots G = abcdefg$. From (2.2) it follows that any one of the letters $a, \ldots, g$ is $\geqq \frac{3}{4}$, and

[3]) Among the "extreme forms" of Korkine and Zolotareff occur forms in 6, 7, 8 variables for which γ_n cannot be less than $\sqrt[6]{\frac{64}{3}}$, $\sqrt[7]{64}$, 2 respectively [Math. Annalen 6 (1873), p. 367].

the product of any two in succession is $\geqq \frac{2}{3}$; thus $b^2 c = b\,(bc) \geqq \frac{3}{4}(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$.

Accordingly in the case of 6 variables we start with the following assumption which ultimately we shall prove to be untenable:

$$a^5 b^4 c^3 d^2 e < \tfrac{3}{64}, \tag{4.1}$$

and proceed to determine upper bounds to $A, \ldots, E$, as far as they can be deduced from this inequality in addition to (2.2), (2.3), (3.5). To begin with,

$$a^5 b^4 = A B^4 < \tfrac{3}{16}, \tag{4.2}$$

$$a^5 b^4 c^3 d^2 = A B C D^2 < \tfrac{1}{16}, \tag{4.3}$$

by (2.2); and

$$a^5 < \tfrac{3}{8}, \tag{4.4}$$

by (2.3).

5. It is seen from (4.1) and (2.2) that a, b, c, d, e are all < 1. This is true in the cases of 7 and 8 variables as well. Hence we can write $a = 1 - \alpha^2$, $b = 1 - \beta^2$, $c = 1 - \gamma^2$, $d = 1 - \delta^2$, $e = 1 - \varepsilon^2$. Then the lowest value of e permissible under (3.5) is one in which $\varepsilon = \dfrac{1-\delta}{1+\delta}$ when $\delta > \frac{1}{3}$, or $\varepsilon = \frac{1}{2}$ when $\delta \gtreqless \frac{1}{3}$. Hence the lowest value of $d^2 e$ is $4\delta(1-\delta)^2$ when $\delta > \frac{1}{3}$, or $\frac{16}{27}$ when $\delta \lesseqgtr \frac{1}{3}$. Similarly the lowest value of $c^3 d^2 e$ is $[4\gamma(1-\gamma)^2]^2$ when $\gamma > \frac{1}{3}$, or $(\frac{16}{27})^2$ when $\gamma \lesseqgtr \frac{1}{3}$. Then by substitution in (4.1) we find that $\gamma > 0{,}424$, since $a^5 b^4 \geqq \frac{3}{4}(\frac{2}{3})^4$. Then $C < 0{,}55$ by $a^5 b^4 [4\gamma(1-\gamma)^2]^2 = \dfrac{a C^4 \cdot 16\gamma^2}{(1+\gamma)^4} < \dfrac{3}{64}$. From (4.2), $B < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Since $\gamma > \frac{1}{3}$, then $b^4 [4\gamma(1-\gamma)^2]^2 \geqq (J(\beta))^2$ by (3.5), where

$$J(\beta) = \tfrac{32}{81} \qquad \text{when } \beta \leqq \tfrac{1}{3},$$

$$J(\beta) = \frac{16\beta^2(1-\beta)^3}{1+\beta} \qquad \text{when } \beta > \tfrac{1}{3};$$

a function which decreases when β increases if $\beta > \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

By substitution in (4.1) we now find $A < 0{,}796$. This follows directly when $\beta \leqq 0{,}4$. If $\beta > 0{,}4 > \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ we set $\beta = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$, since $\alpha > \frac{1}{3}$ by (4.4), and get $(J(\alpha))^3 < \frac{3}{64}$, which entails $\alpha > 0{,}466$.

The upper bounds 0,796 and 0,55 to A and C are unnecessarily high. They are set at these values for uniformity with results obtained below in the cases of 7, 8 variables.

6. Next, taking up quadratic forms in 7 variables with outer coefficients 1, $A, \ldots, F$, we start with the assumption

$$A\,B\,C\,D\,E\,F = a^6\,b^5\,c^4\,d^3\,e^2\,f < \tfrac{1}{64}, \tag{6.1}$$

from which follow (by (2.2) and (2.3)):

$$a^6\,b^5 = A\,B^5 < \tfrac{1}{8}, \tag{6.2}$$

$$a^6\,b^5\,c^4\,d^3 = A\,B\,C\,D^3 < \tfrac{1}{32}. \tag{6.3}$$

At this point we may accept as proven that always $A\,B\,C\,D\,E \geqq \frac{3}{64}$, from which follows $b^5\,c^4\,d^3\,e^2\,f \geqq \frac{3}{64}$. Therefore, by (6.1),

$$a^6 < \tfrac{1}{3}; \tag{6.4}$$

giving $\alpha > 0{,}408$. Hence $\beta < 0{,}421$ by (3.5).

From (6.2) follows $B < 0{,}7$.

We have $c^4\,d^3\,e^2\,f \geqq (J(\gamma))^2$. Hence

$$a^6\,b^5\,(J(\gamma))^2 < \tfrac{1}{64}. \tag{6.5}$$

1) Let $\gamma \geqq 0{,}476$. Then $c < 0{,}78$; and then $C = B\,c < 0{,}55$. Also $\beta < 0{,}356$, $b > 0{,}873$, by (3.5). Hence $A < 0{,}796$ by (6.2).

2) Let $0{,}476 > \gamma \geqq 0{,}388 > \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Here $C < 0{,}5664$ from (6.5), which can be written

$$\frac{a\,C^5\,J(\gamma)^2}{(1-\gamma^2)^5} < \frac{1}{64}. \tag{6.6}$$

Again, since $b^5\,(J(\gamma))^2 \geqq (J(\beta))^3$, then $A < 0{,}796$ when $\beta \gtrless 0{,}4$. If $0{,}4 < \beta \gtrless 0{,}421$, then $a > 0{,}816$ by (3.5), and $J(\beta) > 0{,}387$. But now (6.5) is violated.

If we set $C > 0{,}55$ and $a \geqq \frac{3}{4}$ in (6.6), we find $\gamma < 0{,}436$. Then (6.5) reduces to $a^6\,b^5 = A\,B^5 < 0{,}10824$. In this case $B < 0{,}679$, and $A < 0{,}772$ (from the assumption $A > 0{,}772$ would follow $B \geqq \dfrac{4\,\alpha\,(1-\alpha)}{1+\alpha} > 0{,}6752$ by (3.5), and $A\,B^5 < 0{,}10824$ would not be satisfied).

3) Let $0{,}3445 \gtrless \gamma < 0{,}388$. Here (6.5) is violated.

4) Finally, let $\gamma < 0{,}3445$. Here $C = B\,(1-\gamma^2) > 0{,}5875$. Moreover, $C < 0{,}595$ from (6.1), since $a^2\,b \geqq \frac{1}{2}$ and $d^3\,e^2\,f \geqq \frac{1}{4}$.

We have $J(\gamma) \geqq \frac{32}{81}$. From (6.5) now follows $a^6\,b^5 = A\,B^5 < (\frac{9}{16})^4$, giving $B < 0{,}669$, $A < 0{,}753$.

Collecting our results for 7 variables we have the cases:

$$C \gtrless 0{,}55, \quad B < 0{,}7, \quad A < 0{,}796, \quad A\,B^5 < \tfrac{1}{8}; \tag{6.7}$$

$$0{,}55 < C < 0{,}5664, \quad B < 0{,}679, \quad A < 0{,}772, \quad A\,B^5 < 0{,}1083; \tag{6.8}$$

$$0{,}5875 < C < 0{,}595, \quad B < 0{,}669, \quad A < 0{,}753, \quad A\,B^5 < (\tfrac{9}{16})^4. \tag{6.9}$$

The inequality (6.3) holds in the foregoing cases, but can be modified to advantage in (6.8) and (6.9). Here $d < \frac{8}{9}$ from (6.1), because $C = abc > 0{,}55$, $a^2 b \geqq \frac{1}{2}$, and $e^3 f \geqq \frac{1}{2}$. Hence $d^3 e^2 f \geqq [4\delta(1-\delta)^2]^3$ Substituting this expression in (6.1) we find $\delta > 0{,}379$, and now $D < 0{,}471$ from $ABCDEF = ABD^4\left[\frac{4\delta}{(1+\delta)^2}\right]^2 < \frac{1}{64}$.

Similarly when $C > 0{,}5875$ we get $\delta > 0{,}487$ and $D < 0{,}448$.

7. We finally take up a quadratic form in 8 variables with outer coefficients 1, $A, \ldots, G$, and assume

$$ABCDEFG = a^7 b^6 c^5 d^4 e^3 f^2 g < \tfrac{1}{256}. \tag{7.1}$$

At this stage we take for granted that $c^5 d^4 e^3 f^2 g \geqq \frac{3}{64}$, $b^6 c^5 \ldots g \geqq \frac{1}{64}$ and thus obtain

$$a^7 b^6 = AB^6 < \tfrac{1}{12}, \tag{7.2}$$

$$ABCD^4 < \tfrac{1}{64}, \tag{7.3}$$

$$a^7 < \tfrac{1}{4}. \tag{7.4}$$

The inequality (7.4) gives $\alpha > 0{,}42$, and (7.2) gives $B < 0{,}7$. From (7.2) also follows $A < 0{,}796$ when $\beta \gtrless 0{,}368$.

We have $d^4 e^3 f^2 g \geqq (J(\delta))^2$. Hence from (7.1) follows

$$a^7 b^6 c^5 (J(\delta))^2 < \tfrac{1}{256}. \tag{7.5}$$

1) Let $\delta \gtrless 0{,}4$. Here $(J(\delta))^2 > 0{,}156$. Hence $a^7 b^6 c^5 = ABC^5 < 0{,}0251$, giving $C < 0{,}55$.

Taking $\beta > 0{,}368$, the minimum of $a^7 b^6 c^5$ for a fixed α is $[4\alpha(1-\alpha)^2]^6$ or is $a^7 \times (0{,}1257)$, by (3.5). It follows that $A < 0{,}796$ in any event.

2) Let $\delta > 0{,}4$. Here $\gamma < 0{,}429$ by (3.5). Also $c^5 (J(\delta))^2 \geqq (J(\gamma))^3$. Now we get $\gamma > 0{,}412$ from (7.5), since $a^7 b^6 \geqq \frac{3}{4}(\frac{2}{3})^6$. Hence setting $a = \frac{3}{4}$ and $\gamma = 0{,}412$ in (7.5), after this inequality is written in the form $\frac{a C^6 (J(\gamma))^3}{(1-\gamma^2)^6} < \frac{1}{256}$, we find that $C < 0{,}553$.

We also obtain $a^7 b^6 = AB^6 < 0{,}0693$ from $a^7 b^6 (J(\gamma))^3 < \frac{1}{256}$ by setting $\gamma = 0{,}429$. The upper bounds of A, B are here lower than those in (6.8).

Writing $a^7 b^6 c^5 (J(\delta))^2$ in the form $\frac{AB D^5 (J(\delta))^2}{(1-\delta^2)^5}$, then from (7.5) follows $D < 0{,}462$, since $\delta > 0{,}4$.

8. All the bounds of the outer coefficients A, B, C, D, sufficient for our purpose, have now been determined. Since (4.2) is true when either (6.2) or (7.2) is true, and (7.3) is true when either (4.3) or (6.3) is true, we shall reduce the multiplicity of cases by using only the weaker inequalities (4.2) and (7.3) when $C < 0{,}55$. For brevity we shall adopt

the notation $n = [k, m]$, implying that k, m, are respectively lower and upper bounds to n. Accordingly, deleting the variables x_6, x_7, x_8, we have the quadratic form:

$$(8.1)\qquad \begin{aligned}&(x_1 - \alpha_2 x_2 \pm \alpha_3 x_3 \pm \alpha_4 x_4 \pm \alpha_5 x_5)^2\\ &+ A\,(x_2 - a_3 x_3 \pm a_4 x_4 \pm a_5 x_5)^2\\ &+ B\,(x_3 - b_4 x_4 \pm b_5 x_5)^2\\ &+ C\,(x_4 - c_5 x_5)^2 + D\,x_5^2,\end{aligned}$$

whose outer coefficients satisfy one or other of the following sets of conditions:

I. $A = [\frac{3}{4},\ 0{,}796]$, $B = [\frac{2}{3},\ \sqrt{2}/2]$, $C = [\frac{1}{2},\ 0{,}55]$;
$A B^4 < \frac{3}{16}$, $A B C D^4 < \frac{1}{64}$;

II. $A = [\frac{3}{4},\ 0{,}772]$, $B = [\frac{2}{3},\ 0{,}679]$, $C = [0{,}55,\ 0{,}5664]$;
$A B^5 < 0{,}1083$, $D < 0{,}471$;

III. $A = [\frac{3}{4},\ 0{,}753]$, $B = [\frac{2}{3},\ 0{,}669]$, $C = [0{,}5875,\ 0{,}595]$;
$A B^5 < (\frac{9}{16})^4$, $D < 0{,}448$.

All the inner coefficients are assumed $\geqq 0$; and the signs preceding α_2, a_3, b_4, c_5, can be made negative as written by a suitable choice of signs of the variables.

C. Case I.

9. From $A = 1 - \alpha^2 < 0{,}796$, $A + \alpha_2^2 \geqq 1$, $B + A a_3^2 \geqq A$, $C + B b_4^2 \geqq B$ we get α, $\alpha_2 > 0{,}45166$; $a_3 > 0{,}239$; $b_4 > 0{,}418$.

By the theorems of § 3 and by using $A B^4 < \frac{3}{16}$ to advantage we get $a_3 < 0{,}4$, $\alpha_3 > 0{,}419$ (use minimum value of α, say $\alpha = 0{,}4516$; obtain $B < 0{,}6967$).

None of the inner coefficients are greater than $\frac{1}{2}$ (§ 2). Hence $C + B b_4^2 \leqq C + \frac{B}{4} < 0{,}7268$; $C + B b_4^2 + A a_4^2 \leqq C + \frac{(B+A)}{4} < 0{,}9232$. Hence from $(2\,3\,4 \mid 0\,0\,1) \geqq A$, $(1\,2\,3\,4 \mid 0\,0\,0\,1) \geqq 1$ we get $a_4 > 0{,}175$, $\alpha_4 > 0{,}277$.

The sign preceding a_4 must be negative. For, if it is positive, the condition $(1\,2\,3\,4 \mid x_1'\,0\,1\,1) \geqq 1$, namely $(x_1' \pm \alpha_3 \pm \alpha_4)^2 + A(-a_3 + a_4)^2 + B(1 - b_4)^2 + C \geqq 1$, would be impossible if we wrote 0 for x_1' when the signs of α_3 and α_4 are different, and ∓ 1 when they are alike.

The form (8.1) can now be written

$$(9.1)\qquad \begin{aligned}&(x_1 - [0{,}4516,\ 0{,}5]\,x_2 \pm [0{,}419,\ 0{,}5]\,x_3 \pm [0{,}277,\ 0{,}5]\,x_4 \pm \alpha_5 x_5)^2\\ &+ A\,(x_2 - [0{,}239,\ 0{,}4]\,x_3 - [0{,}175,\ 0{,}5]\,x_4 \pm a_5 x_5)^2\\ &+ B\,(x_3 - [0{,}418,\ 0{,}5]\,x_4 \pm b_5 x_5)^2\\ &+ C\,(x_4 - c_5 x_5)^2 + D\,x_5^2.\end{aligned}$$

We have $b_5 > 0{,}247$, from $D + C c_5^2 + B b_5^2 \geqq B$ (set $D = 0{,}4883$, $C = 0{,}55$, $B = \frac{2}{3}$, $c_5 = 0{,}5$).

10. *Signs preceding a_5, b_5 are* $(-, -)$. Given fixed positive numbers P, Q, R, a, b as well as non-negative upper and lower bounds to unknown numbers x, y; also the inequality $P(a-x)^2 + Q(b-y)^2 \geqq R$ (or $Px^2 + Qy^2 \geqq R$). By "extreme values" of x, y we shall mean a pair satisfying the above conditions, while at least one number of the pair is equal to its upper or lower bound. Now, only such numbers x, y that are extreme values will make $Px^2 + Qy^2$ (or $P(a-x)^2 + Q(b-y)^2$ in the alternate case) a maximum.

Applied to the quantity $M = D + C c_5^3 + B b_5^3$, having given $N = D + C(1-c_5)^2 + B(1-b_4-b_5)^2 \geqq B$ (namely the condition $(3\,4\,5\,|\,1\,1\,1) \geqq B$), setting $b_4 = 0{,}418$ and representing the numbers x, y by c_5, b_5, we find that $M < 0{,}7608$; namely for that pair of extreme values for which $y = b_5$ has its upper bound $\frac{1}{2}$. In this computation we take advantage of the inequality $ABCD^4 < \frac{1}{64}$; or we may use the following:

$$4D + C < 2{,}503; \quad 4D + C + \frac{3B}{5} < 2{,}903; \tag{10.1}$$

derived from the given inequality and (2.2).

In general, having given $N \geqq k \geqq B$, and $b \geqq b_5 > 0{,}291 \geqq (1-b_4)\,c_5$, we set $b_5 = b$ to obtain the maximum value of M. For this purpose we may also use the very convenient values $D < 0{,}5008$, $C = \frac{1}{2}$, $B = \frac{2}{3}$, obtained by subjecting these numbers to no conditions other than the second inequality in (10.1), in conjunction with $C \geqq \frac{3B}{4} \geqq \frac{1}{2}$, and the demands of the problem under consideration.

The possibility $b_5 \gtrless 0{,}291$ would give $M < 0{,}6824$, namely by substituting in M directly the values $c_5 = 0{,}5$, $b_5 = 0{,}291$ (set $B = \frac{2}{3}$ and use (10.1)).

11. We now fix our attention upon the three inequalites,

$$(1\,2\,3\,4\,5\,|\,0\,0\,0\,0\,1) \geqq 1, \quad (2\,3\,4\,5\,|\,0\,0\,0\,1) \geqq A, \quad (1\,2\,3\,4\,5\,|\,x_1'\,1\,1\,1\,1) \geqq 1:$$

$$M + A a_5^3 + \alpha_5^3 \geqq 1, \quad M + A a_5^3 \geqq A; \tag{11.1}$$

$$N + A(1 - a_3 - a_4 - a_5)^2 + (x_1' - \alpha_2 + e_3\alpha_3 + e_4\alpha_4 + e_5\alpha_5)^2 \geqq 1; \tag{11.2}$$

$$e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1;$$

proving ultimately (§ 13) that they are incompatible under our general conditions.

The last square of the left-hand member of (11.2) can be simplified. We take up the cases:

1) Let $a_3 + a_4 = [0{,}75,\ 0{,}9]$. The condition $(1\,2\,3\,4 \mid x_1''\,1\,1\,1) \geqq 1$; namely, $C + B(1 - b_4)^2 + A(1 - a_3 - a_4)^2 + (x_1'' - \alpha_2 + e_3\alpha_3 + e_4\alpha_4)^2 \geqq 1$, gives $|x_1'' - \alpha_2 + e_3\alpha_3 + e_4\alpha_4| > 0{,}417$. For, the maximum value of $C + B(1 - b_4)^2$, under the condition $C + Bb_4^2 \geqq B$, is $< 0{,}7756$ (set $b_4 = 0{,}4183$), and $A(1 - a_3 - a_4)^2 < \frac{0{,}796}{16} < 0{,}0498$. We can now chose the integer x_1' such that $(x_1' - \alpha_2 + e_3\alpha_3 + e_4\alpha_4 + e_5\alpha_5)^2 < (0{,}583 - \alpha_5)^2$.

2) Let $a_3 + a_4 = [0{,}62,\ 0{,}75]$. Here $(x_1' - \alpha_3 \ldots)^2$ can similarly be replaced by $(0{,}67 - \alpha_5)^2$.

3) Let $a_3 + a_4 < 0{,}62$. We add the two inequalities $(1\,2\,3 \mid 0\,0\,1) \geqq 1$, $(1\,2\,3\,4 \mid 0\,0\,0\,1) \geqq 1$, giving $C + B(b_4^2 + 1) + A(a_3^2 + a_4^2) + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 \geqq 2$. Now, $a_3^2 + a_4^2 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4)^2 + \frac{1}{2}(a_3 - a_4)^2 \leqq \frac{1}{2}\left((0{,}62)^2 + (0{,}4 - 0{,}175)^2\right) < 0{,}2176$. Therefore, since $C + \frac{5B}{4} + A(0{,}2176) < 1{,}6$, we obtain $\alpha_3^2 + \alpha_4^2 > 0{,}4$, and then $\alpha_3 + \alpha_4 > 0{,}887$, since $\alpha_3,\ \alpha_4 \leqq 0{,}5$. Therefore $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 > 1{,}338$.

Now, as long as $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 > 1{,}5$, the integer x_1' can be so chosen that $(x_1' - \alpha_2 + e_3\alpha_3 + e_4\alpha_4 + e_5\alpha_5)^2 \leqq (2 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5)^2$. The requirement is fulfilled, since $\alpha_5 > 0{,}2$, from (11. 1) and $M < 0{,}7608$.

Hence we may finally replace $(x_1' - \alpha_2 + \ldots + e_5\alpha_5)^2$ by $(2 - 1{,}338 - \alpha_5)^2 < (0{,}67 - \alpha_5)^2$.

We can also prove $a_3 + a_4 > 0{,}52$. For assume $a_3 + a_4 \leqq 0{,}52$. Then $a_3^2 + a_4^2 \leqq \frac{1}{2}\left((0{,}52)^2 + ((0{,}52 - 0{,}175) - 0{,}175)^2\right) < 0{,}15$. Hence we get $\alpha_3^2 + \alpha_4^2 > 0{,}4535$, and then $\alpha_3 + \alpha_4 > 0{,}95$. But now $(1\,2\,3\,4 \mid x_1''\,0\,1\,1) \geqq 1$ is impossible, by a suitable choice of the integer x_1''.

12. The inequality (11. 2) can accordingly be replaced by the following:

(12. 1) $N + A([0{,}1,\ 0{,}25] - a_5)^2 + (0{,}583 - \alpha_5)^2 \geqq 1$ in case 1);

(12. 2) $N + A([0{,}25,\ 0{,}48] - a_5)^2 + (0{,}67 - \alpha_5)^2 \geqq 1$ in cases 2) and 3).

Referring to § 10, we now compute the different pairs of extreme values of a_5, α_5. Setting $M = 0{,}7608$ in (11. 1), we find $(a_5, \alpha_5) = (0{,}5,\ 0{,}2+)$; or $(0,\ 0{,}489+)$. Then from (12. 1) and (12. 2) follows $N > 0{,}7259$.

A redetermination of an upper bound of M will now give $M < 0{,}724$. Then by (11. 1) the new extreme values will be $(a_5,\ \alpha_5) = (0{,}5,\ 0{,}277)$, $(0{,}186,\ 0{,}495+)$. Repeating this process a few times will bring M below 0,7. Then we use $(1\,2\,3\,4\,5 \mid 0\,0\,0\,0\,1) \geqq 1$, $(1\,2\,3\,4\,5 \mid x_1''\,1\,0\,0\,1) \geqq 1$, precisely like (3. 1) and (3. 2), setting $A = 1 - \lambda^2$, $M = (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)$, proving that $a_5 \leqq \frac{(1 - \sqrt{V})}{2}$, where $V = 1 - \frac{2M}{1 + \alpha}$. Hence $a_5 < 0{,}406$;

correspondingly $\alpha_5 > 0{,}41$ from (11. 1). The other pair of extreme values are (0,258, 0,495 +). Now follows $N > 0{,}89$.

We have $M \geqq B$; namely, $(3\,4\,5 \mid 0\,0\,1) \geqq B$. Adding to $N > 0{,}89$ gives

$$(12.3)\quad 2D + C\left((1-c_5)^2 + c_5^2\right) + B\left((0{,}582 - b_5)^2 + b_5^2\right) > 0{,}89 + B.$$

Since $b_5 > 0{,}247$ (§ 9) we set $b_5 = 0{,}5$ for the maximum value of the factor of B. There results $4D + C\,(1 + (1 - 2\,c_5)^2) > 2{,}77$, giving $C\,(1 - 2\,c_5)^2 > 0{,}26$ by (10. 1). Hence $c_5 < 0{,}16$. Now $C < 0{,}525$; otherwise $(4\,5 \mid 0\,1) \geqq C$ would be violated, since $D < 0{,}5$ by assumption.

13. We now have $C < \frac{1}{2}(1{,}05)$, and we found $M < 0{,}7 = \frac{2}{3}(1{,}05)$. Hence if we write $1 + g$ for the greatest of the numbers $2\,C$, $\frac{3}{2}M$, we have (cf. (2. 2))

$$C \lessapprox \tfrac{1}{2}(1+g);\quad M, B \lessapprox \tfrac{2}{3}(1+g);\quad A \lessapprox \tfrac{3}{4}(1+g);\quad g < 0{,}05.$$

We verify readily that $\alpha > \frac{(1-1{,}6\,g)}{2}$, $\sqrt{V} > \frac{(1-8\,g)}{3}$, etc. The method of § 3 is applied to find superior limits to a_3, a_4, a_5 (cf. § 12). There results the form

$$\begin{aligned}(x_1 &- [0{,}5 - 0{,}8\,g,\ 0{,}5]\,x_2 \pm [0{,}5 - 1{,}8\,g,\ 0{,}5]\,x_3 \pm [0{,}5 - 1{,}8\,g,\ 0{,}5]\,x_4 \\ &\pm [0{,}5 - 1{,}8\,g,\ 0{,}5]\,x_5)^2 + A\,(x_2 - \tfrac{1}{3}[1 - 4{,}6\,g,\ 1 + 4\,g]\,x_3 \\ &- \tfrac{1}{3}[1 - 4{,}6\,g,\ 1 + 4\,g]\,x_4 - \tfrac{1}{3}[1 - 4{,}6\,g,\ 1 + 4\,g]\,x_5)^2 \\ &+ B\,(x_3 - [0{,}5 - 0{,}8\,g,\ 0{,}5]\,x_4 - b_5\,x_5)^2 + C\,(x_4 - c_5\,x_5)^2 + D\,x_5^2.\end{aligned}$$

Corresponding to (12. 1) and (12. 2) we here have (cf. § 11 (3))

$$(13.1)\qquad N + A\,(4{,}6\,g)^2 + (6{,}2\,g)^2 \geqq 1,$$

and therefore

$$D + C\,(1 - c_5)^2 + B\,(0{,}5 + 0{,}8\,g - b_5)^2 \geqq N \geqq 1 - 60\,g^2 \geqq 1 - 3\,g.$$

Adding $M \geqq B$, and observing that $(0{,}5 + 0{,}8\,g - b_5)^2 + b_5^2 \lessapprox (0{,}8\,g)^2 + 0{,}25$ since $b_5 > 0{,}247$ (§ 9), we obtain

$$(13.2)\qquad 2D + C\,(1 - 2\,c_5 + 2\,c_5^2) \geqq 1{,}5 - 3{,}03\,g.$$

Let $C = \frac{(1+h)}{2}$, $h \lessapprox \frac{1}{10}$. Then $D < \frac{(1-0{,}23\,h)}{2}$ from $ABCD^4 < \frac{1}{64}$. Then $c_5 < 4\,g$, or (13. 2) would be false. Then $h < 0{,}7\,g$, from $D + C\,c_5^2 \geqq C$. Also $M < \frac{2}{3}(1 + 0{,}9\,g)$ by direct substitution (set $c_5 = 4\,g$, $b_5 = \frac{1}{2}$). But now both $2\,C$ and $\frac{3}{2}M$ are smaller than $1 + g$, contrary to hypothesis; unless $g = 0$. But in this event (13. 2) demands $D \geqq \frac{1}{2}$, and $A\,B\,C\,D^4 < \frac{1}{64}$ would be false. Hence, *no reduced quadratic form* (8.1) *exists which satisfies the conditions* I, *if the signs preceding* a_5, b_5 *are both negative.*

14. *Signs preceding* a_5, b_5 *are* $(+, +)$. Here we take as our fundamental inequalities (11.1) and $(1\,2\,3\,4\,5 \mid x_1'\,0\,0\,1\,1) \geqq 1$, namely

$$D + C(1 - c_5)^2 + B(b_4 - b_5)^2 + A(a_4 - a_5)^2 + (x_1' \pm \alpha_4 \pm \alpha_5)^2 \geqq 1.$$

We can obviously substitute the weaker condition

$$N + A(a_4 - a_5)^2 + (1 - \alpha_4 - \alpha_5)^2 \geqq 1, \tag{14.1}$$

with the proviso that the last square of the left-hand member is in no case to be greater than $(\frac{1}{2})^2$.

If $a_4 = [0{,}175,\ 0{,}25]$, then $\alpha_4 > 0{,}472$; if $a_4 = [0{,}25,\ 0{,}454]$, then $\alpha_4 > 0{,}33$. In these cases (14.1) would be more stringent than (12.1) and (12.2). Hence we may assume $a_4 > 0{,}454$; and then (14.1) can be replaced by

$$N + A([0{,}454,\ 0{,}5] - a_5)^2 + (0{,}723 - \alpha_5)^2 > 1. \tag{14.2}$$

Let $a_5 \geqq 0{,}4$. Then $N + A([0{,}454,\ 0{,}5] - [0{,}4,\ 0{,}5])^2 + (\frac{1}{2})^2 > 1$ gives $N > 0{,}742$. If $a_5 < 0{,}4$, the extreme values of (a_5, α_5) are $(0,\ 0{,}489+)$ and $(0{,}4,\ 0{,}334+)$. Again $N > 0{,}742$.

Hence, starting with $N > 0{,}742$ we obtain $M < 0{,}717$ (cf. § 10), and proceed as in § 12, proving ultimately that $M < 0{,}7$ and $C < 0{,}525$. Turning now to the method of § 13 we find that (14.1) becomes $N + A(3g)^2 + (3{,}6g)^2 > 1$, a stronger condition than (13.1). The statement at the end of § 13 is consequently also true if the signs preceding a_5, b_5 are both positive.

15. *Signs preceding* a_5, b_5 *are* $(+, -)$. Our fundamental inequalities are here (11.1) and $(1\,2\,3\,4\,5 \mid x_1'\,0\,1\,0\,1) \geqq 1$. The latter may be modified into

$$L + A(a_3 - a_5)^2 + (1 - \alpha_3 - \alpha_5)^2 \geqq 1, \tag{15.1}$$

where L represents the expression $D + C b_5^2 + B(1 - b_5)^2$. Extreme values shall be assigned to a_5, α_5 as well as to a_3, α_3; the values of α_3 being obtained direct from $B + A a_3^2 + \alpha_3^2 \geqq 1$. Accordingly the extreme values of a_3, α_3 are $(0{,}4,\ 0{,}415+)$ and $(0{,}239,\ 0{,}499+)$; those of a_5, α_5 are $(0{,}5,\ 0{,}2+)$ and $(0;\ 0{,}489)$.

We now find $L > 0{,}843$. Hence $L - M = B(1 - 2b_5) > 0{,}0822$, giving $b_5 < 0{,}442$. Now $M < 0{,}732$, by using $N \geqq B$ and $0{,}442 > b_5$ (§ 10). This process is continued. Since $M \geqq B$, better values of a_3 will be obtained than those found in § 9 as soon as M is less than 0,6967 (cf. §§ 9, 12). After a few repetitions we obtain $B \gtrapprox M < 0{,}6825$.

16. We can set $M = \dfrac{4\varphi(1 - \varphi)}{(1 + \varphi)}$, where $0{,}45 < \varphi \lessapprox 0{,}5$; an expression which decreases when φ increases in the given interval. Hence, since

$\alpha > 0{,}45$, and $M \geqq B \geqq \frac{4\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)}$ by (3. 5), we have $\alpha \geqq \varphi$. Hence $A \leqq 1 - \varphi^2$; also

$$a_3,\ a_5 \leqq \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2B}{1+\alpha}}\right)}{2} \leqq \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{1+\varphi}}\right)}{2} \leqq \frac{1-\varphi}{1+\varphi}.$$

Correspondingly $\alpha_3,\ \alpha_5 \geqq \varphi$. Moreover, since $a = a_3,\ a_5$ satisfies $M + A a^2 \geqq A \geqq \frac{3}{4}$, we have $a_3,\ a_5 \geqq \sqrt{1 - \frac{4M}{3}} \geqq \frac{5\varphi - 1}{3(1+\varphi)}$; correspondingly, using this last expression as a lower bound to $a_3,\ a_5$, we have $\alpha_3,\ \alpha_5 \geqq \frac{1}{3}\sqrt{(8 - 24\varphi + 25\varphi^2)} \geqq \frac{4+\varphi}{9}$. Now from (15. 1) we obtain $L \geqq 4\varphi(1-\varphi)$, and therefore $L - M = B(1 - 2b_5) \geqq \frac{4\varphi^2(1-\varphi)}{(1+\varphi)}$, giving $b_5 \leqq \frac{(1-\varphi)}{2}$.

Hence, because $D < \frac{1}{2}(1 - 0{,}23h)$ when $C = \frac{1}{2}(1+h)$ (§ 13), we have

$$M \leqq D + \frac{C}{4} + B b_5^2 < \frac{5}{8} + 0{,}02h + \frac{\varphi(1-\varphi)^3}{(1+\varphi)}. \tag{16.1}$$

Accordingly, $\varphi(1-\varphi)(3-\varphi) < \frac{5}{8} + 0{,}02h$. From this inequality and $0{,}5 - \varphi < 0{,}05$, $h < 0{,}1$, we readily prove $\varphi > \frac{1}{10}(5-h)$, and therefore $b_5 < 0{,}25 + 0{,}05h$. We also see that $h \neq 0$, since otherwise $\varphi > 0{,}5$.

When the number of variables is 6 or 7, then $D + \frac{C}{4} < \frac{5}{8}$, by (4. 3) and (6. 3); i. e., $D < \frac{1}{2}(1 - 0{,}25h)$. But the inequality $\varphi(1-\varphi)(3-\varphi) < \frac{5}{8}$, resulting under this condition, is impossible within the interval given for φ. It follows that the statement at the end of § 13 is still true in the cases of 6 and 7 variables when the signs preceding a_5, b_5 are $(+, -)$.

17. *Signs preceding a_5, b_5 are* $(-, +)$. In this case the conditions

$$(3\,4\,5 \mid 0\,1\,1) \geqq B, \quad (1\,2\,3\,4\,5 \mid x_1'\,0\,1\,0\,-1) \geqq 1 \tag{17.1}$$

take the places of, respectively, $N \geqq B$ and $(1\,2\,3\,4\,5 \mid x_1'\,0\,1\,0\,1) \geqq 1$, in the analysis of §§ 15, 16. Writing out in detail these conditions it is at once evident that (15. 1) can be made equivalent to the last of the conditions (17. 1), while $N \geqq B$ is less stringent than the first of (17. 1). Accordingly, the present situation must be similarly impossible, as long as $D + \frac{C}{4} < \frac{5}{8}$.

18. *Case of eight variables.* It remains for us to examine a form in which the signs of a_5, b_5 are unlike; in which, furthermore, $C = \frac{1}{2}(1+h)$, $h \leqq 0{,}1$; $D = [0{,}5 - 0{,}125h,\ 0{,}5 - 0{,}115h]$.

Substituting in (7.1) the above values of C and D, in addition to $AB \geqq \frac{1}{2}$, $E \geqq \frac{3D}{4}$, $F \geqq \frac{2D}{3}$, $G \geqq \frac{2E}{3}$, we readily verify that $E < \frac{3(1+0{,}03h)D}{4}$. Now consider the form $(3\,4\,5\,6 \mid x_3 x_4 x_5 x_6)$:

$$B(x_3 - b_4 x_4 + e_5 b_5 x_5 + e_6 b_6 x_6)^2 + C(x_4 - c_5 x_5 + e c_6 x_6)^2 + D(x_5 - d_6 x_6)^2 + E x_6^2; \quad e_5^2 = e_6^2 = e^2 = 1.$$

From $E + D d_6^2 \geqq D$ follows $d_6 > 0{,}5 - 0{,}023h$. The quantities D, $E + D d_6^2$, $E + D(1 - d_6)^2$ are now all less than $0{,}5 - 0{,}09h$. Hence the conditions $(3456 \mid 0010) \geqq B$, $(3456 \mid 0001) \geqq B$, setting $B = \frac{2}{3}$, writing c for c_5, c_6, and b for b_5, b_6, require

$$3(1+h)c^2 + 4b^2 > 1 + 0{,}54h. \tag{18.1}$$

We have $b_5 < 0{,}25 + 0{,}05h$ (§ 16). From this and (18.1) we obtain $c_5 > 0{,}5 - 0{,}11h$. Again, from $c_5 \lessgtr 0{,}5$ and (18.1) we obtain $b_5 > 0{,}25 - 0{,}11h$; finally, since $b_6 \lessgtr 0{,}5$ we obtain $c_6 > 1{,}2h$.

In the cases 1) and 2) below we have inequalities like (18.1), with $(c_5 - c_6)^2$ or $(1 - c_5 - c_6)^2$ replacing c^2, while the expressions replacing b^2 can be made $\lessgtr \frac{1}{4}$ by a suitable choice of x_3'. Hence $|c_5 - c_6|$, or $1 - c_5 - c_6$, is greater than $1{,}2h$, from which follows $c_6 < 0{,}5 - h$ in either case; and therefore, by (18.1), $b_6 > 0{,}25 + h$. Extreme values of c_6, b_6 can now be set at $(1{,}2h +;\ 0{,}5)$ and $(0{,}5 - h +;\ 0{,}25 + h)$.

1) Let $e = +1$. The inequality $(3\,4\,5\,6 \mid x_3'\,0\,1\,1) \geqq B$ can be reduced to, or replaced by, the following:

$$3(1+h)(c_5 - c_6)^2 + 4(1 - b_5 - b_6)^2 > 1 + 0{,}54h.$$

Setting $c_5 = [0{,}5 - 0{,}11h,\ 0{,}5]$ and writing $0{,}75 + 0{,}11h$ for $1 - b_5$, afterwards substituting the extreme values for c_6, b_6 given above, we find that the given inequality is impossible, since $h \neq 0$.

2) Let $e = -1$. We take $(3\,4\,5\,6 \mid x_3'\,1\,1\,1) \geqq B$, giving

$$3(1+h)(1 - c_5 - c_6)^2 + 4(x_3' - b_4 + e_5 b_5 + e_6 b_6)^2 > 1 + 0{,}54h. \tag{18.2}$$

When $e_5 = e_6 = +1$ we set $x_3' = 0$; when $e_5 = e_6 = -1$ we set $x_3' = 1$. In either case the term $4(x_3' - b_4 + \ldots)^2$ is found to be $< 4(0{,}25 + h)^2$, since $b_4 = [0{,}5 - 0{,}9h,\ 0{,}5]$ (cf. § 13). Moreover, $1 - c_5 - c_6 < 0{,}5 - h$. But now (18.2) is not satisfied.

When $e_5 = -e_6 = +1$ we set $x_3' = 1$; when $e_5 = -e_6 = -1$ we set $x_3' = 0$. In these cases the term $4(x_3' - b_4 + \ldots)^2$ is found to be $< 4(0{,}75 + h - b_6)^2$. We also have $1 - c_5 - c_6 < (0{,}5 + 0{,}11h) - c_6$. But the pairs of extreme values of c_6, b_6 given above will not satisfy the resulting inequality.

D. Cases II, III.

19. In case II we have $A < 0{,}772$, $B < 0{,}679$, $C = [0{,}55,\ 0{,}5664]$, $AB^5 < 0{,}1083$, $D < 0{,}471$. Following the method in § 9 we construct the form

$$\begin{aligned}(x_1 - [0{,}4774,\ 0{,}5]\,x_2 + e_3\,[0{,}473,\ 0{,}5]\,x_3 + e_4\,[0{,}31,\ 0{,}5]\,x_4 + e_5\,\alpha_5\,x_5)^2 \\ + A\,(x_2 - [0{,}307,\ 0{,}354]\,x_3 - [0{,}135,\ 0{,}466]\,x_4 \pm a_5\,x_5)^2 \\ + B\,(x_3 - [0{,}387,\ 0{,}5]\,x_4 \pm b_5\,x_5)^2 \\ + C\,(x_4 - c_5\,x_5)^2 + D\,x_5^2; \qquad e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1.\end{aligned}$$

We find $c_5 > 0{,}378$, $D + \frac{C}{4} > 0{,}6126$, $b_5 > 0{,}284$, $M < 0{,}7402$. Corresponding to this upper bound of M we obtain the following extreme values of a_5, α_5: $(0{,}5,\ 0{,}258+)$; $(0{,}114,\ 0{,}499+)$.

When $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$, the term $(x_1 - \ldots + e_5\,\alpha_5\,x_5)^2$ is not greater than $(0{,}667 - \alpha_5)^2$. For if $a_4 \geqq 0{,}388$, then

$$C + B\,(1 - b_4)^2 + A\,(1 - a_3 - a_4)^2 + (x_1' - \alpha_2 + e_3\,\alpha_3 + e_4\,\alpha_4)^2 \geqq 1$$

gives $|x_1' - \alpha_2 + e_3\,\alpha_3 + e_4\,\alpha_4| > 0{,}333$; and if $a_4 < 0{,}388$ then $\alpha_4 > 0{,}384$, and then $2 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 < 0{,}666 - \alpha_5$ (cf. § 11). Hence, first assuming the signs of a_5, b_5 to be $(-,\ -)$ we obtain $N > 0{,}753$. But then $N + M > 0{,}753 + B$ gives $c_5 < 0{,}37$ (cf. (12.3)); whereas $c_5 > 0{,}378$.

When the signs of a_5, b_5 are $(+,\ +)$ we find it expedient to treat separately the two cases: $a_4 = [0{,}135,\ 0{,}3]$, in which case $1 - \alpha_4 - \alpha_5 < 0{,}56 - \alpha_5$; and $a_4 = [0{,}3,\ 0{,}466]$, when $1 - \alpha_4 - \alpha_5 < 0{,}69 - \alpha_5$. We now obtain $N > 0{,}78 > 0{,}753$ from the condition corresponding to (14.1).

When the signs of a_5 and b_5 are unlike, we first find $L > 0{,}8988$ (cf. § 15). Then since $L = M + B\,(1 - 2\,b_5)$, $M \leqq D + \frac{C}{4} + B\,b_5^2 < 0{,}6126 + B\,b_5^2$, we obtain $b_5 < 0{,}351$ and then $M < 0{,}7$. Now (cf. § 12) the extreme values of a_5, α_5 may be set at $(0{,}39,\ 0{,}42+)$; $(0{,}25,\ 0{,}49+)$. Now $L > 0{,}98$, and then $b_5 < 0{,}28$, contrary to the value $b_5 > 0{,}284$ found above.

20. In case III we have $A < 0{,}753$, $B < 0{,}669$, $C = [0{,}5875,\ 0{,}595]$, $AB^5 < (\frac{9}{16})^4$, $D < 0{,}448$. The form is here

$$\begin{aligned}(x_1 - [0{,}4969,\ 0{,}5]\,x_2 + e_3\,[0{,}495,\ 0{,}5]\,x_3 + e_4\,[0{,}222,\ 0{,}5]\,x_4 + e_5\,\alpha_5\,x_5)^2 \\ + A\,(x_2 - [0{,}333,\ 0{,}337]\,x_3 - [0;\ 0{,}5]\,x_4 \pm a_5\,x_5)^2 \\ + B\,(x_3 - [0{,}327,\ 0{,}5]\,x_4 \pm b_5\,x_5)^2 \\ + C\,(x_4 - c_5\,x_5)^2 + D\,x_5^2; \qquad e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1.\end{aligned}$$

The sign preceding $a_4 = [0;\ 0{,}5]$ is negative as written. For, the condition $C + B\,(1 - b_4)^2 + A\,(a_3 - a_4)^2 + (1 - \alpha_3 - \alpha_4)^2 \geqq 1$ is impossible;

directly so when $a_4 \geqq 0{,}166$; and by substituting $\alpha_4 > 0{,}465$ when $a_4 < 0{,}166$.

We have $D + \frac{C}{4} < 0{,}5968$, $c_5 > 0{,}487$, $b_5 > 0{,}323$. Hence, since $D + C(1 - 0{,}487)^2 + B(1 - 0{,}327 - b_5)^2 > B$ we find $b_5 < 0{,}369$, and then $M < 0{,}5968 + B(0{,}369)^2 < 0{,}69$. The extreme values of a_5, α_5 are therefore $(0{,}37,\ 0{,}45+)$, $(0{,}28,\ 0{,}49+)$. We also have $N < D + C(1-0{,}487)^2 + B(1 - 0{,}327 - 0{,}323)^2 < 0{,}69$, $L < D + \frac{C}{4} + B(1 - 0{,}323)^2 < 0{,}91$. But the inequalities corresponding to (12. 1), (12. 2), (14. 1) here give $N > 0{,}78$; and that corresponding to (15. 1) gives $L > 0{,}99$. We conclude that our present form, like that in case II, can not be a reduced form.

To sum up:

The acceptance of any one of the inequalities (4. 1), (6. 1), (7. 1), led to conditions which implied the existence of certain forms in five variables, reduced by the method of Korkine and Zolotareff, and falling into one or other of the three classes listed in § 8. But we have found that no such form is possible. Hence we have proved the statements made at the beginning of § 4. The precise values (i. e., lowest permissible) of γ_6, γ_7, γ_8 are those given in § 1.

(Eingegangen am 11. Juli 1932.)

Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren.

Von

Hans Fitting in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 16
§ 1. Hilfsbetrachtungen 18
§ 2. Der Krull-Schmidtsche Satz 21
§ 3. Der Schmidtsche Austauschsatz 24
§ 4. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die absolute Eindeutigkeit der „Remakschen Zerlegungen“ 24
§ 5. Verallgemeinerungen 30

Einleitung.

In dieser Arbeit handelt es sich um Gruppen (mit oder ohne Operatoren), in denen der Doppelkettensatz für die Normalteiler vorausgesetzt wird. Ist von Gruppen schlechthin die Rede, so sind immer solche von der genannten speziellen Art gemeint. Für diese Gruppen wird eine Neubegründung und Ergänzung der Theorie der direkten Produktzerlegungen in direkt unzerlegbare Faktoren („Remaksche Zerlegungen“) gegeben, welche auf der — im folgenden mit F zitierten — Abhandlung des Verfassers: Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nichtkommutativen Gruppen [Math. Annalen **107** (1932), S. 514—542] aufbaut. Die Darstellung ist jedoch so gehalten, daß ein Verständnis des folgenden auch ohne Kenntnis von F möglich sein wird, da die wichtigsten aus F übernommenen Hilfsmittel und Begriffe teils im Text, teils in Fußnoten noch einmal kurz hergeleitet bzw. erklärt werden.

Im Mittelpunkt steht ein neuer, besonders einfacher Beweis des Krull-Schmidtschen Satzes, daß eine Gruppe (von der in dieser Arbeit betrachteten speziellen Art) bis auf zentrale Isomorphie eindeutig als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen dargestellt werden kann (§ 2). Dieser Beweis wird durch sukzessiven Ersatz der Faktoren einer Remakschen Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ durch die einer anderen $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_n$ geführt. Die Möglichkeit eines solchen Ersatzes wird — nachdem jedes $H_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ in seine $\mathfrak{R}$-Komponenten $H_\mu = K_{\mu 1} \cdot \ldots \cdot K_{\mu n}$, jedes $K_\nu \in \mathfrak{R}_\nu$ in seine $\mathfrak{H}$-Komponenten $K_\nu = H_{\nu 1} \cdot \ldots \cdot H_{\nu m}$ zerlegt worden

st — durch Betrachtung der n aus den beiden Isomorphismen $J_{\mu\nu} = H_\mu \to K_{\mu\nu}$, $\bar{J}_{\nu\mu} = K_\nu \to H_{\nu\mu}$ [siehe Fußnote [2])] zusammengesetzten Automorphismen $\Theta_\nu = J_{\mu\nu} \cdot \bar{J}_{\nu\mu}$ von $\mathfrak{H}_\mu$ [siehe Fußnote [2])] nachgewiesen. Es stellt sich heraus, daß die Θ_ν „normal" [siehe Fußnote [3])] und „addierbar" sind [siehe Fußnote [5])] und daß die „Summe" $\sum_\nu \Theta_\nu$ [siehe Fußnote [5])] der identische Automorphismus von $\mathfrak{H}_\mu$, also „eigentlich" ist [siehe Fußnote [2])]. Der springende Punkt des Beweises ist die aus den Resultaten von F leicht zu gewinnende Erkenntnis, daß mit der Summe $\Sigma\Theta_\nu$ auch einer der Summanden (etwa Θ_α) und mit ihm auch jeder der Isomorphismen $J_{\mu\alpha}$, $\bar{J}_{\alpha\mu}$ eigentlich sein muß, was mit der Austauschbarkeit der Faktoren $\mathfrak{H}_\mu$ und $\mathfrak{K}_\alpha$ äquivalent ist! Hiermit ist der Schmidtsche Austauschsatz gleichzeitig mitbewiesen (§ 3). Anschließend wird die — in dieser Allgemeinheit meines Wissens noch nicht behandelte — Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die absolute Eindeutigkeit der Remakschen Zerlegungen untersucht, die sich unter Benutzung der in F entwickelten Theorie vollständig erledigen läßt (§ 4). Eine Gruppe besitzt stets dann und nur dann eine einzige Remaksche Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$, wenn für $\mu \neq \nu$ alle „normalen" $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen [siehe Fußnote [3])] $\mathfrak{H}_\mu$ auf das Einheitselement von $\mathfrak{H}_\nu$ abbilden. Als Spezialfall ergibt sich als hinreichende aber nicht notwendige Bedingung, daß homomorphe Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf Untergruppen $\overline{3}$ des Zentrums von $\mathfrak{G}$ nicht möglich sind, wenn $\overline{3}$ mehr als das Einheitselement enthält; dies ergibt sich auch unabhängig von dem allgemeinen Kriterium direkt daraus, daß die Gruppe unter der gemachten Voraussetzung neben dem identischen Automorphismus keine eigentlichen, zentralen Automorphismen Θ mehr besitzen kann, da bei einem solchen die Zuordnung $A \to A \cdot (A\Theta)^{-1}$ — wegen $A \cdot (A\Theta)^{-1} \cdot B \cdot (B\Theta)^{-1} = A \cdot B \cdot (A\Theta \cdot B\Theta)^{-1}$ — eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe des Zentrums ist. In diesem Zusammenhang findet auch der merkwürdige von Herrn Speiser [1]) hervorgehobene Dualismus zwischen Zentrum und Restklassengruppe nach der Kommutatorgruppe (siehe unten Satz 8, § 4) eine einfache Erklärung: In beiden Fällen dieses Dualismus, bei dem Gruppen ohne Zentrum solchen Gruppen gegenüberstehen, die mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmen, sind die Remakschen Zerlegungen absolut eindeutig bestimmt, weil kein Automorphismus existiert, welcher die Gruppe auf eine von der Einheitsgruppe (E) verschiedene Untergruppe $\overline{3}$ des Zentrums abbildet [siehe Fußnote [2])], da ein solcher eine homomorphe Abbildung der Restklassengruppe nach der Kommutatorgruppe auf $\overline{3}$ vermitteln würde. Zum Schluß wird eine naheliegende Ausdehnung der

[1]) A. Speiser, Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, 2. Aufl. (1927), S. 136.

Theorie auf direkte Produktzerlegungen in $\mathfrak{M}$-charakteristische und $\mathfrak{M}$-charakteristisch direkt unzerlegbare Faktoren gegeben, wobei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge von Gruppenautomorphismen bedeutet, es gelingt dies mühelos durch Adjunktion von $\mathfrak{M}$ zum (eventuell auch leeren) Operatorensystem der Gruppe.

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

Der neue Beweis, der in § 2 für den Krull-Schmidtschen Satz gegeben werden soll, stützt sich auf vier Hilfssätze aus F, die wir in diesem Paragraphen in einer für die speziellen Zwecke dieser Arbeit abgeänderten Fassung noch einmal, z. T. auch — vor allem den dritten (Peircesche Zerlegung) — wesentlich einfacher als in F beweisen. Unmittelbar finden von diesen Hilfssätzen beim Beweis des Krull-Schmidtschen Satzes übrigens nur der zweite und vierte Verwendung; der erste und dritte werden nur in diesem Paragraphen beim Beweis des zweiten und vierten benutzt.

Hilfssatz 1 (F, § 16, Hilfssatz 1). *$\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ seien zwei Gruppen mit demselben Operatorensystem. J sei ein $\mathfrak{R}\,\mathfrak{L}$-Isomorphismus und $\mathfrak{R}^*$ ein Normalteiler von $\mathfrak{R}$. Ist der durch J induzierte $\mathfrak{R}^*\,\mathfrak{L}$-Isomorphismus J^* eigentlich*[2]*), so vermittelt J eine direkte Produktzerlegung $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* \times \mathfrak{R}^{**}$, wo $\mathfrak{R}^{**}$ aus allen Elementen $\mathfrak{R}^{**} \in \mathfrak{R}$ besteht, die durch J auf das Einheitselement E von $\mathfrak{L}$ abgebildet werden: $\mathfrak{R}^{**} J = E$.*

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{R}^{**}$ nach dem Homomorphiesatz Normalteiler von $\mathfrak{R}$. Ferner haben $\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{R}^{**}$ nur das Einheitselement von $\mathfrak{R}$ gemein, so daß $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}^* \times \mathfrak{R}^{**} \subseteq \mathfrak{R}$ gilt. Setzt man für ein beliebiges Element $K \in \mathfrak{R}$ $(K J) J^{*-1} = K^*$, $K \cdot K^{*-1} = K^{**}$, so ist $K^* \in \mathfrak{R}^*$, $K^{**} \in \mathfrak{R}^{**}$ und $K = K^* \cdot K^{**}$, woraus $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* \times \mathfrak{R}^{**}$ folgt.

Hilfssatz 2 (F, § 16, Hilfssatz 2). *$\mathfrak{H}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$ seien drei direkt unzerlegbare Gruppen mit demselben Operatorensystem. Ist J_1 ein $\mathfrak{H}\,\mathfrak{R}$-Isomorphismus, welcher $\mathfrak{H}$ auf einen Normalteiler $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{H} J_1$ von $\mathfrak{R}$ abbildet, J_2 irgendein $\mathfrak{R}\,\mathfrak{L}$-Isomorphismus, und J_3 der aus J_1 und J_2 zusammengesetzte $\mathfrak{H}\,\mathfrak{L}$-Isomorphismus $H \to (H J_1) J_2 = J_3$, so sind mit J_3 auch J_1 und J_2 eigentlich.*

---

[2]) Nach F, § 2 wird bei Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{R}$ mit demselben Operatorensystem unter einem Isomorphismus (genauer $\mathfrak{H}\,\mathfrak{R}$-Isomorphismus) eine operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf eine *Untergruppe* $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ verstanden. Ein solcher heißt eigentlich, wenn er $\mathfrak{H}$ einstufig isomorph (umkehrbar eindeutig) auf die *volle* Gruppe $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$) abbildet, sonst uneigentlich. Im Fall $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ werden die $\mathfrak{H}\,\mathfrak{R}$-Isomorphismen nach F, § 3 auch Automorphismen von $\mathfrak{H}$ genannt, bei denen wieder eigentliche und uneigentliche zu unterscheiden sind.

Beweis. 1. Sicherlich ist der durch J_2 induzierte $\mathfrak{R}^*$ $\mathfrak{L}$-Isomorphismus J_2^* eigentlich, was nach Hilfssatz 1 wegen der direkten Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{H} J_1 = \mathfrak{R}$ und $J_2^* = J_2$ führt, also ist J_2 eigentlich.

2. Da $\mathfrak{H} J_1 = \mathfrak{R}$ gilt und J_1 eine *umkehrbar* eindeutige Abbildung ist, weil ja sonst J_3 gewiß nicht eigentlich sein könnte, ist auch J_1 eigentlich.

Hilfssatz 3 (F, § 4, Satz II). *Jeder normale*[3]) *Automorphismus* Θ *einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *führt zu einer direkten Produktzerlegung* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^* \times \mathfrak{G}^{**}$ *(die ich in* F, § 4 *die durch* Θ *erzeugte verallgemeinerte Peircesche Zerlegung von* $\mathfrak{G}$ *genannt habe), für ein hinreichend groß gewähltes* n *wird* $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}\Theta^n$ *und* $\mathfrak{G}^{**}$ *die aus allen Elementen* G^{**} *mit der Eigenschaft* $G^{**}\Theta^n = E$ *(Einheitselement) bestehende Gruppe.*

Beweis. Wählt man n so groß, daß in der absteigenden Kette $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{G}\Theta \supseteq \mathfrak{G}\Theta^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{G}\Theta^\nu \supseteq \ldots$: $\mathfrak{G}\Theta^n = \mathfrak{G}\Theta^{n+1}$, also auch $(\mathfrak{G}\Theta^n)\Theta^n = \mathfrak{G}\Theta^n$ ausfällt, was wegen des vorausgesetzten Doppelkettensatzes (siehe Einleitung) gewiß möglich ist, so ist der von dem $\mathfrak{G}\mathfrak{G}\Theta^n$-Isomorphismus Θ^n induzierte Automorphismus Θ^* des Normalteilers $\mathfrak{G}\Theta^n = \mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ nach F, Satz I, § 4[4]) eigentlich, woraus die Behauptung nach Hilfssatz 1 unmittelbar hervorgeht.

Hilfssatz 4 (vgl. F, § 14, Satz 7). *Wenn die Summe addierbarer*[5]) *und normaler Automorphismen* $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *einer direkt unzerlegbaren Gruppe* $\mathfrak{G}$ *eigentlich ist, so ist auch einer der Automorphismen* $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ *eigentlich.*

---

[3]) Bei Normalteilern $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ derselben Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt allgemein ein $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$-Isomorphismus J *normal* (bezüglich $\mathfrak{G}$), wenn die Bedingung

$$G^{-1} \cdot H J \cdot G = (G^{-1} \cdot H \cdot G) J, \quad G \in \mathfrak{G}, \quad H \in \mathfrak{H}$$

erfüllt ist, d. h. die inneren (absoluten) Automorphismen mit zu den Operatoren der Gruppen gerechnet werden.

[4]) Es handelt sich um die Tatsache, daß ein normaler Automorphismus Θ^* einer Gruppe $\mathfrak{G}^*$ (mit Doppelkettensatz für die Normalteiler!) immer schon dann eigentlich ist, wenn $\mathfrak{G}^*\Theta^* = \mathfrak{G}^*$ gilt. — Der Beweis ergibt sich sofort durch Vergleich der „Hauptreihenlängen" von $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{G}_0^*$, wo $\mathfrak{G}_0^*$ die Gruppe aller von Θ^* auf die Einheit E abgebildeten Elemente von $\mathfrak{G}^*$ bedeutet, offenbar muß $\mathfrak{G}_0^* = (E)$ sein.

[5]) „Addierbar" nenne ich nach F, § 9 mehrere Automorphismen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn die „Addierbarkeitsbedingung" erfüllt ist, daß die Gruppen $\mathfrak{G}\Theta_1, \ldots, \mathfrak{G}\Theta_n$ zu je zwei elementweise miteinander vertauschbar sind. In diesem Fall verstehe ich unter der „Summe $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n$" den Automorphismus $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n = G \to G\Theta_1 \cdot \ldots \cdot G\Theta_n$. Das „Produkt" zweier Automorphismen Θ und Π wird wie üblich als der aus Θ und Π zusammengesetzte Automorphismus $\Theta\Pi = G \to (G\Theta)\Pi$ erklärt. Bei additiver und multiplikativer Verknüpfung im oben definierten Sinne bilden die *normalen* Automorphismen [s. Anm. [3])] einen sogenannten „verallgemeinerten Ring" (F, § 5): den „Automorphismenbereich" der Gruppe (F, § 9), dessen Theorie der Gegenstand von F ist.

Beweis. Wegen des Assoziativgesetzes

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_n = (((\Theta_1 + \Theta_2) + \Theta_3) + \Theta_4) + \ldots$$

(siehe Anm. 5 bzw. F, § 5 und 9) dürfen wir uns von vornherein auf den einfachsten Fall $n = 2$ beschränken.

Setzen wir $(\Theta_1 + \Theta_2)^{-1} = \Theta$, so wird $\Theta(\Theta_1 + \Theta_2) = \Theta\Theta_1 + \Theta\Theta_2$ der identische Automorphismus $A \to A$ von $\mathfrak{G}$, den wir genau wie in F (§ 10) mit P_1 bezeichnen: $\Theta\Theta_1 + \Theta\Theta_2 = P_1$.

Wir machen nun die ad absurdum zu führende Annahme, Θ_1, Θ_2 seien entgegen unserer Behauptung beide uneigentlich. Zunächst müßten dann $\Theta\Theta_1$ und $\Theta\Theta_2$ ebenfalls uneigentlich sein, da sonst $\Theta^{-1}(\Theta\Theta_1) = \Theta_1$ oder $\Theta^{-1}(\Theta\Theta_2) = \Theta_2$ eigentlich wäre (vgl. auch Hilfssatz 2). Auf Grund des Hilfssatzes 3 schließen wir hieraus, daß $\Theta\Theta_1$ und $\Theta\Theta_2$ nilpotent wären, d. h. für ein hinreichend großes n der Gleichung

$$\mathfrak{G}(\Theta\Theta_1)^n = \mathfrak{G}(\Theta\Theta_2)^n = (E) \quad \text{oder} \quad (\Theta\Theta_1)^n = (\Theta\Theta_2)^n = P_0$$

genügen würden, wo P_0 den ‚Nullautomorphismus" $A \to E$ von $\mathfrak{G}$ bezeichnet (siehe F, § 10). Wegen der aus $\Theta\Theta_1 + \Theta\Theta_2 = P_1$ folgenden multiplikativen Vertauschbarkeit von $\Theta\Theta_1$ und $\Theta\Theta_2$ hätte dies aber

$$P_1 = P_1^{2n} = (\Theta\Theta_1 + \Theta\Theta_2)^{2n} = \sum_{\nu=0}^{2n} \binom{2n}{\nu} (\Theta\Theta_1)^{2n-\nu} \cdot (\Theta\Theta_2)^{\nu} = P_0$$

zur Folge, was offenbar ein Widerspruch ist. Θ_1 und Θ_2 können also nicht beide gleichzeitig uneigentlich sein.

Anschließend beweisen wir noch einen fünften Hilfssatz, der — obwohl er beim Beweis des Krull-Schmidtschen Satzes nicht gebraucht wird — an dieser Stelle noch mit eingefügt werden soll, da er sonst in dieser Arbeit häufig benutzt wird.

Hilfssatz 5. *Bei verschiedenen Faktoren $\mathfrak{H}_\mu, \mathfrak{H}_\nu$ eines direkten Produktes $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ ist ein $\mathfrak{H}_\mu\,\mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus J stets dann und nur dann normal* [bezüglich $\mathfrak{G}$, siehe Anm. [3])], *wenn $\mathfrak{H}_\mu$ durch J auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch des Zentrums von $\mathfrak{G}$ abgebildet wird.*

Beweis. 1. Ist J normal, so ist $\mathfrak{H}_\mu J$ im Zentrum von $\mathfrak{H}_\nu$ enthalten, da für jedes $H_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ und $A_\nu \in \mathfrak{H}_\nu$ die Beziehung:

$$H_\mu J = (A_\nu^{-1} \cdot H_\mu \cdot A_\nu) J = A_\nu^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A_\nu$$

besteht.

2. Umgekehrt ist ein $\mathfrak{H}_\mu\,\mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus stets normal, wenn $\mathfrak{H}_\mu J$ zum Zentrum von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch zum Zentrum von $\mathfrak{G}$ gehört; in der Tat gilt für $A_\lambda \in \mathfrak{H}_\lambda$ $(\lambda \neq \mu)$:

$$A_\lambda^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A_\lambda = H_\mu J = (A_\lambda^{-1} \cdot H_\mu \cdot A_\lambda) J$$

und für $A_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$:

$$A_\mu^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A_\mu = H_\mu J = (A_\mu J)^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A_\mu J = (A_\mu^{-1} \cdot H_\mu \cdot A_\mu) J,$$

womit die für normale Isomorphismen charakteristische Gleichung

$$A^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A = (A^{-1} \cdot H_\mu \cdot A) J$$

für jedes Element $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$ aus $\mathfrak{G}$ bewiesen ist.

§ 2.

Der Krull-Schmidtsche Satz.

Satz 1 [von W. Krull und Otto Schmidt[6])]. *Jede Gruppe (im speziellen Sinne dieser Arbeit) läßt sich bis auf normale Isomorphie eindeutig als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen darstellen:*

Bei zwei Zerlegungen

$$(1) \qquad \begin{cases} (h) & \mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m, \\ (k) & \mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_n \end{cases}$$

dieser Art kann zwischen den $\mathfrak{H}_\mu$ und den $\mathfrak{K}_\nu$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{H}_1 & \ldots\ldots & \mathfrak{H}_m \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathfrak{K}_{i_1} & \ldots\ldots & \mathfrak{K}_{i_m} \end{array}$$

hergestellt werden ($m = n$) und zwar so, daß die Abbildung $H_\mu \to K_{i_\mu}$, bei der jedem Element $H_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ seine $\mathfrak{K}_{i_\mu}$-Komponente K_{i_μ} zugewiesen wird, ein eigentlicher, normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{K}_{i_\mu}$-Isomorphismus ist und die „Überführungsgleichungen"

$$(3) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{K}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{K}_{i_\mu} \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

($\mu = 1, \ldots, m$) bestehen.

Beweis. Daß Zerlegungen im Sinne unseres Satzes überhaupt existieren, folgt aus dem vorausgesetzten Doppelkettensatz (siehe Einleitung) nach den üblichen Schlüssen. Wir gehen darum gleich zum Beweis der Eindeutigkeitsbehauptung über.

Zunächst zeigen wir, daß in (h) jedes $\mathfrak{H}_\mu$ durch mindestens ein $\mathfrak{K}_\nu$ ersetzt werden kann und dabei die Abbildung $H_\mu \to$ ($\mathfrak{K}_\nu$ = Komponente

[6]) W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschr. **23** (1925); Otto Schmidt, Unendliche Gruppen mit endlicher Kette, ebenda **29** (1929). Für gewöhnliche endliche Gruppen wurde der Satz im Abelschen Spezialfall von Frobenius und Stickelberger (Über Gruppen vertauschbarer Elemente, Crelle Journ. **86**, S. 217—262), im nichtkommutativen Fall von R. Remak (Zerlegungen endlicher Gruppen in direkt unzerlegbare Faktoren, ebenda **139**, 1911) bewiesen.

von H_μ) ein eigentlicher $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{K}_\nu$-Isomorphismus ist. Zu diesem Zweck zerlegen wir jedes Element $H_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ in seine $\mathfrak{K}$-Komponenten

$$H_\mu = K_{\mu 1} \cdot \ldots \cdot K_{\mu n} \tag{4a}$$

und jedes Element $K_\nu \in \mathfrak{K}_\nu$ in seine $\mathfrak{H}$-Komponenten

$$K_\nu = H_{\nu 1} \cdot \ldots \cdot H_{\nu m}. \tag{4b}$$

Für $K_\nu = K_{\mu\nu}$ [siehe (4a)] schreiben wir (4b) auch in der Form

$$K_{\mu\nu} = H_{\nu 1}^{(\mu)} \cdot \ldots \cdot H_{\nu m}^{(\mu)}. \tag{4c}$$

Die Zuordnung $H_\mu \to K_{\mu\nu}$ [siehe (4a)] ist offenbar ein normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{K}_\nu$-Isomorphismus $J_{\mu\nu}$, die Zuordnung $K_\nu \to H_{\nu\mu}$ [siehe (4b)] ein normaler $\mathfrak{K}_\nu \mathfrak{H}_\mu$-Isomorphismus $\bar{J}_{\nu\mu}$ und die aus $J_{\mu\nu}$ und $\bar{J}_{\nu\mu}$ zusammengesetzte Zuordnung $H_\mu \to K_{\mu\nu} \to H_{\nu\mu}^{(\mu)}$ [siehe (4c)] ein natürlich ebenfalls normaler Automorphismus Θ_ν von $\mathfrak{H}_\mu$. Die Θ_ν sind addierbar (siehe Anm. 5), da mit den Elementen $K_1, \ldots, K_n$ bzw. aus $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ auch deren $\mathfrak{H}_\mu$-Komponenten $H_{1\mu}, \ldots, H_{n\mu}$ immer paarweise, also auch die Gruppen $\mathfrak{H}_\mu\Theta_1, \ldots, \mathfrak{H}_\mu\Theta_n$ zu je zweien elementweise miteinander vertauschbar sind. Wegen der Beziehung $H_\mu = H_{1\mu}^{(\mu)} \cdot \ldots \cdot H_{n\mu}^{(\mu)}$ — welche durch Einsetzen von (4c) in (4a) unmittelbar ersichtlich wird — ist die Summe $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n$ (siehe Anm. 5) der identische Automorphismus von $\mathfrak{H}_\mu$, also eigentlich. Da $\mathfrak{H}_\mu$ direkt unzerlegbar ist, muß infolgedessen nach Hilfssatz 4 auch unter den Θ_ν wenigstens einer etwa $\Theta_\alpha (\nu = \alpha)$ eigentlich sein. Nach Hilfssatz 2 sind mit Θ_α auch $J_{\mu\alpha}$ und $\bar{J}_{\alpha\mu}$ eigentlich. Für jedes den Gruppen

$$\mathfrak{K}_\alpha \text{ und } \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{\mu-1} \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

gemeinsame Element

$$K_\alpha = H_{\alpha,1} \cdot \ldots \cdot H_{\alpha,\mu-1} \cdot E \cdot H_{\alpha,\mu+1} \cdot \ldots \cdot H_{\alpha,m}$$

folgt hieraus $K_\alpha \bar{J}_{\alpha\mu} = E = E\bar{J}_{\alpha\mu}$ [siehe (4b)], d. h. $K_\alpha = E$, weil $\bar{J}_{\alpha\mu}$ eigentlich ist. Es gilt also

$$\mathfrak{K}_\alpha \cdot (\mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{\mu-1} \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m) = \mathfrak{K}_\alpha \times \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{\mu-1} \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m \subseteq \mathfrak{G}$$

wegen des Jordan-Hölderschen Satzes sogar

$$\mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{\mu-1} \times \mathfrak{K}_\alpha \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{G}. \tag{5}$$

Allgemein liegt dem Beweis der letzten Gleichung (5) die einfache Tatsache zugrunde, *daß bei zwei beliebigen direkten Produktzerlegungen einer Gruppe* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_m = \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n$ $\mathfrak{A}_1$ *durch* $\mathfrak{B}_1$ *stets dann und nur dann ersetzt werden kann, wenn die Zuordnung* $A_1 \to (\mathfrak{B}_1 = $ *Komponente von* $A_1)$ $(A_1 \in \mathfrak{A}_1)$ *ein eigentlicher Isomorphismus ist.*

Wendet man das bisher Bewiesene hintereinander

1. bei den Zerlegungen (h) und (k) auf den Faktor $\mathfrak{H}_1$ an, wobei die Gleichung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_{i_1} \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m \tag{h_1}$$

entsteht,

2. bei den Zerlegungen $(\mathfrak{h}_1)$ und (k) auf den Faktor $\mathfrak{H}_2$, woraus die Gleichung

$$(\mathfrak{h}_2) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{K}_{i_1} \times \mathfrak{K}_{i_2} \times \mathfrak{H}_3 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

entsteht, so erhält man, in diesem Sinne fortfahrend, den Satz 1 schrittweise (induktiv) in seinem vollen Umfange.

Zusatz. *Bei zwei Remakschen Zerlegungen einer Gruppe*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m$$

gibt es zu jedem nichtabelschen $\mathfrak{H}_\mu$ genau ein mit $\mathfrak{H}_\mu$ normal-isomorphes $\mathfrak{K}_\mu$.

Beweis. Mindestens ein solches $\mathfrak{K}_\mu$ gibt es nach Satz 1. Mehr als eines kann es aber nicht geben, weil sonst zwei nichtabelsche Faktoren $\mathfrak{K}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_\beta$ desselben direkten Produkts $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m$ normal-isomorph sein müßten, was nicht möglich ist, da ein normaler $\mathfrak{K}_\alpha \mathfrak{K}_\beta$-Isomorphismus J nach Hilfssatz 5 $\mathfrak{K}_\alpha$ auf eine Untergruppe des *Zentrums* von $\mathfrak{K}_\beta$ abbildet, also gewiß nicht eigentlich sein kann.

Äquivalent mit der Eindeutigkeitsbehauptung des Satzes 1 ist auch der folgende, für manche Anwendungen zweckmäßigere

Satz 2. *Ist eine Gruppe auf zweierlei Art als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Faktoren dargestellt,*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m,$$

so gibt es stets einen eigentlichen, normalen Automorphismus Θ, der die erste in die zweite Zerlegung überführt, was in dem Sinne zu verstehen ist, daß $\mathfrak{H}_\mu \Theta = \mathfrak{K}_{i_\mu}$ gilt und die $\mathfrak{K}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{i_m}$ hierbei eine Permutation der $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ bilden.

Beweis. Ist $\mathfrak{H}_\mu$ mit $\mathfrak{K}_{i_\mu}$ normal-isomorph nach Satz 1 und Θ_μ ein infolgedessen existierender eigentlicher, normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{K}_{i_\mu}$-Isomorphismus, so erfüllt der Automorphismus

$$\Theta = H_1 \cdot \ldots \cdot H_m \to H_1 \Theta_1 \cdot \ldots \cdot H_m \Theta_m \qquad (H_1 \in \mathfrak{H}_1, H_2 \in \mathfrak{H}_2, \ldots, H_m \in \mathfrak{H}_m)$$

die Bedingung unseres Satzes. Daß umgekehrt aus Satz 2 die Eindeutigkeitsbehauptung des Satzes 1 hervorgeht, ist unmittelbar klar.

Da ein *eigentlicher*, normaler Automorphismus einer Gruppe zugleich zentral[7]) ist, was aus

$$B^{-1} \cdot A\Theta \cdot B = B^{-1}\Theta \cdot A\Theta \cdot B\Theta \quad \text{und} \quad A\Theta \cdot B \cdot (B\Theta)^{-1} = B \cdot (B\Theta)^{-1} \cdot A\Theta$$

hervorgeht, wenn man beachtet, daß mit A auch $A\Theta$ alle Elemente der Gruppe durchläuft, so lehrt Satz 2, *daß eine Gruppe auch bis auf zentrale*

---

[7]) Bei einem *uneigentlichen*, normalen Automorphismus A trifft dies im allgemeinen nicht zu, wie das Beispiel des Nullautomorphismus $P_0 = A \to E$ zeigt. In der Tat ist bei einem solchen der im Text gegebene Beweis nicht stichhaltig, da ja $A\,A$ nicht mit A alle Elemente der Gruppe durchläuft.

Isomorphie eindeutig als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen dargestellt werden kann. Wir erhalten so die übliche Fassung der Krull-Schmidtschen Eindeutigkeitsbehauptung, die natürlich inhaltlich ebenfalls mit der in Satz 1 gegebenen Formulierung identisch ist.

§ 3.

Der Schmidtsche Austauschsatz.

Die Überführungsgleichungen (3) des Satzes 1 bringen den Inhalt des sogenannten Schmidtschen Austauschsatzes zum Ausdruck, der sich allgemein folgendermaßen formulieren läßt:

Satz 3 von Otto Schmidt[8]). *Das Produkt* $\mathfrak{P}$ *beliebiger Faktoren einer Remakschen Gruppenzerlegung*

(h) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

kann stets durch das Produkt $\mathfrak{Q}$ *gewisser Faktoren einer anderen*

(k) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m$$

ersetzt werden; die Faktoren von $\mathfrak{P}$ *lassen sich dabei denen von* $\mathfrak{Q}$ *umkehrbar eindeutig so zuordnen, daß entsprechende Faktoren zentral-(normal-) isomorph sind.*

Die Auszeichnung der ersten Faktoren von (h) in den Gleichungen (3) des Satzes 1 ist natürlich unwesentlich, da in einem direkten Produkt die Reihenfolge der Faktoren gleichgültig ist.

Als Spezialfälle des Schmidtschen Austauschsatzes erwähnen wir:

Jeder nichtabelsche Faktor von (h) kann gegen den (einzigen!) mit ihm normal-(zentral-)isomorphen Faktor von (k), ebenso das Produkt aller Faktoren von (h), die mit einem Abelschen $\mathfrak{H}_\mu$ isomorph sind, gegen das Produkt aller mit $\mathfrak{H}_\mu$ isomorphen Faktoren von (k) ausgetauscht werden; auf gewöhnliche, endliche Gruppen angewandt, entsteht hieraus das bekannte Ergebnis von Remak, daß in einer Remakschen Zerlegung einer gewöhnlichen, endlichen Gruppe das Produkt aller vorkommenden zyklischen Faktoren von derselben Primzahlpotenzordnung stets durch das isomorphe Produkt einer anderen Remakschen Zerlegung der Gruppe ersetzt werden kann[9]).

§ 4.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die absolute (identische) Eindeutigkeit der Remakschen Gruppenzerlegungen.

Satz 4. *Damit eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *nur auf eine einzige Weise in das direkte Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen zerlegt werden kann, ist*

[8]) Otto Schmidt, a. a. O., siehe Anm. [6]).

[9]) R. Remak, a. a. O. [siehe Anm. [6])], Satz 4.

hinreichend und notwendig, daß alle direkten Faktoren von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{N}$*-charakteristisch*[10]) *sind, wo* $\mathfrak{N}$ *die Menge aller normalen, eigentlichen Automorphismen von* $\mathfrak{G}$ *bedeutet.*

Beweis. Nach Satz 2 ist die Bedingung hinreichend; sind nämlich

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m$$

zwei Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ im Sinne des Krull-Schmidtschen Satzes, so gibt es nach Satz 2 einen eigentlichen, normalen Automorphismus $\Theta \in \mathfrak{N}$, für den $\mathfrak{H}_\mu \supseteq \mathfrak{H}_\mu \Theta = \mathfrak{K}_{i_\mu} \supseteq \mathfrak{K}_{i_\mu} \Theta^{-1} = \mathfrak{H}_\mu$ gilt, woraus $\mathfrak{H}_\mu = \mathfrak{K}_{i_\mu}$ folgt.

Die Notwendigkeit der Bedingung beruht darauf, daß, wenn in einer Remakschen Zerlegung von $\mathfrak{G}$

(h) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

ein Faktor $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht $\mathfrak{N}$-charakteristisch ist, stets ein eigentlicher Automorphismus Π angegeben werden kann, der (h) in eine von (h) verschiedene Remaksche Zerlegung (h′) von $\mathfrak{G}$ überführt.

(h′) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \Pi \times \ldots \times \mathfrak{H}_m \Pi.$$

Wir gelangen zu einem solchen Automorphismus Π auf folgendem Wege:

Zunächst wählen wir aus $\mathfrak{N}$ einen Automorphismus Θ aus, der $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht auf eine Untergruppe von sich abbildet ($\mathfrak{H}_\alpha \Theta$ *nicht* $\subseteq \mathfrak{H}_\alpha$). Hierauf führen wir die m Automorphismen $A \to A_\mu = \mathsf{H}_\mu$ ein, wo A ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}$ und A_μ die $\mathfrak{H}_\mu$-Komponente von A bedeutet. Aus den H_μ und Θ setzen wir durch Multiplikation die m^2 Automorphismen $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu = \Theta_{\mu\nu}$ zusammen. Für $\mu \neq \nu$ bilden wir aus diesen die Summe $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu + P_1$, $-\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu + P_1$, was im Sinne der in Anm. [5]) angegebenen Definition darum möglich ist, weil das Element $A\Theta_{\mu\nu} = A_\mu \Theta_{\mu\nu}$ wegen

$$A_\mu \Theta_{\mu\nu} = (H_\nu^{-1} \cdot A_\mu \cdot H_\nu)\Theta_{\mu\nu} = H_\nu^{-1} \cdot A_\mu \Theta_{\mu\nu} \cdot H_\nu \qquad (H_\nu \in \mathfrak{H}_\nu)$$

zum Zentrum von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch zum Zentrum von $\mathfrak{G}$ gehört und $\Theta_{\mu\nu} = \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu$ daher stets ein Zentrumsautomorphismus[11]) ist (vgl. Hilfssatz 5, § 1). Schließlich wählen wir unter den Summen $\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\nu + P_1$ ($\alpha \neq \nu$) noch eine von P_1 verschiedene $\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1$ ($\alpha \neq \beta$) aus, bei der also $\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta \neq P_0$ ist, eine solche muß existieren, da sonst wegen

$$\sum_{\mu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu = P_1, \quad \Theta = P_1 \Theta P_1 = \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu$$

---

[10]) Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge von Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so heißt eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{M}$-charakteristisch, wenn sie bei allen Automorphismen aus $\mathfrak{M}$ auf eine Untergruppe von sich selber abgebildet wird.

[11]) So nenne ich nach F, § 10 diejenigen Automorphismen einer Gruppe, welche die Gruppe auf eine Untergruppe ihres Zentrums abbilden. Zentrumsautomorphismen sind dadurch ausgezeichnet, daß sie zu *allen* Automorphismen addierbar sind.

die Beziehung

$$\mathfrak{H}_\alpha \Theta = \mathfrak{H}_\alpha \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu = \mathfrak{H}_\alpha \sum_{\nu=1}^{m} \mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\nu = \mathfrak{H}_\alpha \mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\alpha \subseteq \mathfrak{H}_\alpha$$

gelten würde, was der Voraussetzung über Θ widerspricht.

Mit $\Pi = \mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1 \neq P_1$ $(\alpha \neq \beta)$ haben wir nun in der Tat einen Automorphismus von der verlangten Beschaffenheit erhalten: Π ist eigentlich, da wegen $\mathsf{H}_\alpha \mathsf{H}_\beta = P_0$ die Relation $(\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1) \cdot (-\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1) = P_1$ besteht. Außerdem führt Π die Zerlegung (h) in eine zweite (h') über, die von (h) verschieden ist, weil die Beziehungen

$$\mathfrak{H}_\mu = \mathfrak{H}_\mu \Pi \text{ für } \mu \neq \alpha, \qquad \mathfrak{H}_\alpha \neq \mathfrak{H}_\alpha (\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1)$$

gelten.

Aus dem soeben Bewiesenen folgt, daß in einer Gruppe, die nur eine einzige Remaksche Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ zuläßt, alle Faktoren $\mathfrak{H}_\mu$ dieser Zerlegung und mit diesen überhaupt alle direkten Faktoren, die ja durch Multiplikation gewisser $\mathfrak{H}_\mu$ entstehen, notwendig $\mathfrak{N}$-charakteristisch sein müssen.

Über die an Satz 4 anschließende Frage, wann ein direkter Faktor von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{N}$-charakteristisch ist, erhalten wir Aufschluß durch

Satz 5a. *Ein Faktor $\mathfrak{H}_\alpha$ einer beliebigen direkten Produktzerlegung einer Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ $(1 \leqq \alpha \leqq m)$ ist stets dann und nur dann $\mathfrak{N}$-charakteristisch [wo $\mathfrak{N}$ (wie in Satz 4) die Menge der eigentlichen, normalen Automorphismen bezeichnet], wenn normale $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen — von der „trivialen" Abbildung $H_\alpha \to E$ (welche jedem Element $H_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$ das Einheitselement E von $\mathfrak{G}$ zuordnet) abgesehen — für $\nu \neq \alpha$ nicht existieren.* (In diesem Satz werden die $\mathfrak{H}_\mu$ nicht direkt unzerlegbar vorausgesetzt!)

Beweis. Zunächst beweisen wir die erste Hälfte der Behauptung: Ist die Bedingung unseres Satzes erfüllt, so ist $\mathfrak{H}_\alpha$ $\mathfrak{N}$-charakteristisch. Es sei $\Theta \in \mathfrak{N}$. Bezeichnet man den Automorphismus $A \to A_\mu$ (welcher jedem Element A aus $\mathfrak{G}$ seine $\mathfrak{H}_\mu$-Komponente A_μ zuordnet) genau wie beim Beweis des Satzes 4 mit H_μ, so gilt $\sum_{\mu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu = P_1$ und $\Theta = P_1 \Theta P_1 = \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu$. Zur Abkürzung werde $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu = \Theta_{\mu\nu}$ gesetzt. Dann ist die Abbildung $H_\mu \to H_\mu \Theta_{\mu\nu}$, wo H_μ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{H}_\mu$ bedeutet, ein normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus, der unter den gemachten Voraussetzungen für $\mu = \alpha$, $\nu \neq \alpha$ mit der trivialen Zuordnung $\mathfrak{H}_\alpha \to E$ identisch sein muß. Hieraus folgt (für *alle* $A \in G$): $A\Theta_{\alpha\nu} = A_\alpha \Theta_{\alpha\nu} = E$, d. h. $\Theta_{\alpha\nu} = P_0$. Daher gilt

$$\mathfrak{H}_\alpha \Theta = \mathfrak{H}_\alpha \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \Theta_{\mu\nu} = \mathfrak{H}_\alpha \sum_{\nu=1}^{m} \Theta_{\alpha\nu} = \mathfrak{H}_\alpha \Theta_{\alpha\alpha} \subseteq \mathfrak{H}_\alpha,$$

was zu beweisen war.

Die Notwendigkeit der Bedingung beweisen wir, indem wir zeigen, daß aus jedem nicht-trivialen, normalen $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus J eigentliche, normale Automorphismen konstruiert werden können, die $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht auf eine Untergruppe von sich abbilden. Automorphismen dieser Art erhalten wir dadurch, daß wir von J zu dem Automorphismus

$$A = H_1 \cdot \ldots \cdot H_m \to H_\alpha J \qquad (H_1 \in \mathfrak{H}_1,\ H_2 \in \mathfrak{H}_2, \ldots, H_m \in \mathfrak{H}_m)$$

(den ich in F, § 15 die „Erweiterung von J" genannt habe) und von A zu den Summen $A + P_1$, $-A + P_1$ übergehen, die im Sinne der in der Anm. [5]) gegebenen Definition in der Tat gebildet werden können, da J nach Hilfssatz 5 (§ 1) $\mathfrak{H}_\alpha$ auf eine Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch des Zentrums von $\mathfrak{G}$ abbildet und A infolgedessen ein Zentrumsautomorphismus ist [siehe Anm. [11])]. Mühelos bestätigt man, daß $A + P_1$, $-A + P_1$ die gewünschte Eigenschaft haben. Sie sind normal und eigentlich, ersteres, weil A und P_1 normal sind, letzteres, weil sie der aus $A^2 = P_0$ folgenden Relation $(A + P_1)\ (-A + P_1) = P_1$ genügen, ferner bilden sie — wie unmittelbar ersichtlich — $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht auf eine Untergruppe von $\mathfrak{H}_\alpha$ ab.

Satz 5 b. *Die Bedingung des Satzes* 5 a *ist äquivalent damit, daß — unter* $\mathfrak{K}_\alpha$ *die Kommutatorgruppe* [12]) *von* $\mathfrak{H}_\alpha$ *verstanden — homomorphe Abbildungen von* $\overline{\mathfrak{H}}_\alpha = \mathfrak{H}_\alpha/\mathfrak{K}_\alpha$ *auf eine von der Einheitsgruppe* (E) *verschiedene Untergruppe* $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ *des Zentrums von* $\mathfrak{H}_\nu$ *nicht möglich sind. Bei einer gewöhnlichen, endlichen Gruppe ist hierfür notwendig und hinreichend, daß die Ordnung der Gruppe* $\overline{\mathfrak{H}}_\alpha$ *und die Ordnung des Zentrums* $\mathfrak{Z}_\nu$ *von* $\mathfrak{H}_\nu$ *keinen echten Teiler gemein haben, was bei einer Abelschen (gewöhnlichen, endlichen) Gruppe stets dann und nur dann der Fall ist, wenn Ordnung und Index von* $\mathfrak{H}_\alpha$ *teilerfremd zueinander sind.*

Beweis. Nach Hilfssatz 5 (§ 1) sind normale $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen (im Fall $\nu \neq \alpha$) dadurch ausgezeichnet, daß sie $\mathfrak{H}_\alpha$ auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$ abbilden, die bei „nicht-trivialen" $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen und nur bei diesen überdies von (E) verschieden ist. Im Besitz dieser Charakterisierung nicht-trivialer, normaler $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen übersieht man die Äquivalenz der in den Sätzen 5 a und 5 b angegebenen Bedingungen unmittelbar; denn allgemein gilt ja der fast triviale

Hilfssatz 6. *Bei beliebigen Gruppen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *mit demselben Operatorensystem sind* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$*-Isomorphismen, die* $\mathfrak{A}$ *auf eine Abelsche Unter-*

[12]) Die Kommutatorgruppe der operatorfreien Gruppe ist für jedes Operatorensystem ein zulässiger Normalteiler, d. h. nach einer von Herrn F. Levi in seiner Arbeit: Über die Untergruppen der freien Gruppen (2. Mittlg.), Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 92 eingeführten Bezeichnungsweise — „vollinvariant"; für jeden Operator $\omega \in \Omega$ gilt nämlich $\omega\,(A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1}) = \omega A \cdot \omega B \cdot \omega A^{-1} \cdot \omega B^{-1}$.

gruppe $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ abbilden, stets dann und nur dann möglich, wenn $\mathfrak{B}'$ zu $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^*$ homomorph ist, wo $\mathfrak{A}^*$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{A}$ bedeutet. Daß die Bedingung hinreicht, ist nach dem Homomorphiesatz unmittelbar klar ($\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^* \sim \mathfrak{B}'$). Ebenso einfach erkennt man auch die Notwendigkeit der Bedingung, wenn man beachtet, daß in $\mathfrak{A}$ alle Normalteiler $\mathfrak{A}'$ mit Abelscher Restklassengruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{A}^*$ umfassen und nach dem ersten Isomorphiesatz $\mathfrak{B}' \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \simeq (\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}^*)/(\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}^*)$ gilt. — Im Spezialfall des Satzes 5 b ist $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{Z}_\nu = \mathfrak{B}'$ zu setzen!

Durch Zusammenfassung der Sätze 4, 5 a und 5 b erhalten wir

Satz 6. *Eine zweite notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Gruppe nur eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ in direkt unzerlegbare Untergruppen besitzt, besteht darin, daß neben der trivialen Abbildung $H_\mu \to E$ normale $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen ($\mu \neq \nu$) oder — was nach Satz 5 b auf dasselbe herausläuft — homomorphe Abbildungen von $\overline{\mathfrak{H}}_\mu = \mathfrak{H}_\mu/\mathfrak{R}_\mu$ auf $\mathfrak{Z}_\nu$ nicht existieren, wobei $\mathfrak{R}_\mu$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}_\mu$, $\mathfrak{Z}_\nu$ eine von (E) verschiedene Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$ bedeutet.* Im Spezialfall Abelscher Gruppen ist dieser Satz mit dem von Herrn Krull in seiner Arbeit: Über verallgemeinerte, endliche, Abelsche Gruppen [a. a O., siehe Anm. [6])], Satz 13 ausgesprochenen Kriterium identisch.

Satz 7 a. *Eine hinreichende, allerdings nicht notwendige Bedingung für die absolute Eindeutigkeit der Remakschen Zerlegungen einer Gruppe ist auch die, daß die Gruppe keinen vom Nullautomorphismus $P_0 = A \to E$ verschiedenen Zentrumsautomorphismus besitzt.*

Beweis. Nach Satz 6 ergibt sich die Behauptung daraus, daß unter den gemachten Voraussetzungen ein nicht-trivialer, normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus J nicht existieren kann, wenn $\mathfrak{H}_\mu$, $\mathfrak{H}_\nu$ voneinander verschiedene Faktoren einer beliebigen Remakschen Zerlegung der Gruppe bedeuten. Gäbe es nämlich einen solchen, so müßte die Gruppe — entgegen der Bedingung unseres Satzes — auch einen von P_0 verschiedenen Zentrumsautomorphismus besitzen, da wir, um einen solchen zu erhalten, nur von J zu der sogenannten „Erweiterung" von J, d. h. der Abbildung $A = H_1 \ldots H_m \to H_\mu J$ überzugehen brauchten. In der Tat würde J den Faktor $\mathfrak{H}_\mu$ nach Hilfssatz 5 (§ 1) auf eine von der Einheitsgruppe (E) verschiedene Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch des Zentrums von $\mathfrak{G}$ abbilden, auf welche auch $\mathfrak{G}$ von A abgebildet würde.

Noch einfacher ergibt sich — wie wir bereits in der Einleitung andeuteten — nach Satz 4 (oder auch 2) die Behauptung direkt daraus, daß die Gruppe unter der Bedingung unseres Satzes neben dem identischen Automorphismus keinen eigentlichen, normalen (zentralen) Automorphismus Θ mehr besitzen kann, da bei einem solchen die Zuordnung

$A \to A \cdot (A\Theta)^{-1} = Z$ der Relation $A \cdot (A\Theta)^{-1} \cdot B \cdot (B\Theta)^{-1} = A \cdot B \cdot (A\Theta \cdot B\Theta)^{-1}$ zufolge ein *Zentrumsautomorphismus*, in unserem Falle also $Z = P_0$, d. h. $\Theta = P_1$ sein muß.

Satz 7b. *Die Bedingung des Satzes* 7a *kann auch in der gleichwertigen Fassung formuliert werden, daß homomorphe Abbildungen der Restklassengruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ *nach der Kommutatorgruppe* $\mathfrak{K}$ *(von* $\mathfrak{G}$*) auf Untergruppen* $\overline{\mathfrak{Z}}$ *des Zentrums (von* $\mathfrak{G}$*) für* $\overline{\mathfrak{Z}} \neq (E)$ *nicht existieren.*

Beweis. Genau wie bei den Sätzen 5a und 5b ergibt sich auch hier wieder der Zusammenhang zwischen den Sätzen 7a und 7b aus dem Hilfssatz 6, wenn dieser auf den Spezialfall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}' = \overline{\mathfrak{Z}}$ angewandt wird.

Aus den Sätzen 7a und 7b folgt als spezieller Fall

Satz 8 [Speiserscher Dualismus[13])]. *Eine Gruppe, die mit ihrer Kommutatorgruppe identisch ist, oder eine solche, deren Zentrum nur die Einheitsgruppe* (E) *als zulässige Untergruppe enthält, kann nur auf eine einzige Weise als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen dargestellt werden.*

Man sieht, daß beide Fälle des Speiserschen Dualismus einer gemeinsamen Wurzel, dem fast trivialen Satz 7a (bzw. 7b) entspringen und sich aus diesem Zusammenhang das Bestehen dieses merkwürdigen Dualismus sehr einfach erklärt.

Eine Anwendung der Sätze dieses Paragraphen auf gewöhnliche endliche Gruppen führt auf bekannte Ergebnisse zurück, die schon von Herrn Remak[14]) aufgestellt und kürzlich von Herrn Shoda[15]) in seiner Arbeit „Über die Automorphismen einer endlichen zerlegbaren Gruppe" neu bewiesen wurden:

Satz 9. *Damit eine gewöhnliche, endliche Gruppe nur eine einzige Zerlegung* $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ *in direkt unzerlegbare Untergruppen besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß der Index der Kommutatorgruppe* $\mathfrak{K}_\mu$ *von* $\mathfrak{H}_\mu$ *unter* $\mathfrak{H}_\mu$ *und die Ordnung des Zentrums* $\mathfrak{Z}_\nu$ *von* $\mathfrak{H}_\nu$ $(\mu \neq \nu)$ *teilerfremd zueinander sind (vgl. Satz* 6*), was z. B. bei solchen nicht-kommutativen Gruppen, bei denen Index der Kommutatorgruppe* $\mathfrak{K}$ *und Ordnung des Zentrums* $\mathfrak{Z}$ *von* $\mathfrak{G}$ *keinen von* ± 1 *verschiedenen Teiler gemein haben, immer und bei kommutativen Gruppen stets dann und nur dann der Fall ist, wenn die Gruppe zyklisch ist.*

---

[13]) A. Speiser, Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, 2. Aufl., S. 136.

[14]) Man vergleiche hierzu z. B. die in der Anm. [6]) zitierte Arbeit, S. 308.

[15]) K. Shoda, Über die Automorphismen einer endlichen zerlegbaren Gruppe, Journ. of the Fac. of Science, Univ. of Tokio, Sect. I, vol. II, part 2. Bei Herrn Shoda handelt es sich zwar nicht wie hier um Remaksche, sondern um „normale" Zerlegungen, der Unterschied ist aber nicht wesentlich.

§ 5.

Verallgemeinerungen.

$\mathfrak{M}$ sei irgendeine Menge von Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Operatorensystem Ω und Ω^* diejenige Menge, welche aus Ω durch Hinzunahme aller Automorphismen aus $\mathfrak{M}$ entsteht. Offenbar ist Ω^* wieder ein System von Operatoren, die auf die Elemente aus $\mathfrak{G}$ angewendet werden können, so daß $\mathfrak{G}$ auch als Gruppe mit dem Operatorensystem Ω^* aufgefaßt werden kann. Die für Gruppen geforderte Endlichkeitsbedingung: der Doppelkettensatz für die Normalteiler, ist natürlich erfüllt, weil ja jede normale Ω^*-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ immer zugleich normale Ω-Untergruppe ist. Auf die Ω^*-Gruppe $\mathfrak{G}$ wenden wir jetzt die Ergebnisse aus den §§ 2, 3 und 4 an. Da die Ω^*-Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit den $\mathfrak{M}$-charakteristischen Untergruppen der Ω-Gruppe $\mathfrak{G}$ identisch sind, erhalten wir auf diese Weise die folgenden Resultate:

Satz 10. *Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge von Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so läßt sich $\mathfrak{G}$ stets bis auf zentrale (normale) Isomorphie eindeutig als direktes Produkt solcher Untergruppen darstellen, welche $\mathfrak{M}$-charakteristisch und $\mathfrak{M}$-charakteristisch direkt unzerlegbar sind, d. h. nicht weiter in das direkte Produkt $\mathfrak{M}$-charakteristischer, echter Untergruppen zerfällt werden können. Diese Zerlegungen sind sogar absolut eindeutig bestimmt, wenn alle $\mathfrak{M}$-charakteristischen, direkten Faktoren von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{N}^*$-charakteristisch sind, wobei $\mathfrak{N}^*$ die Menge derjenigen eigentlichen, normalen Automorphismen bedeutet, die mit $\mathfrak{M}$ elementweise vertauschbar sind;* für die Ω^*-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist nämlich $\mathfrak{N}^*$ die Menge der eigentlichen, normalen Automorphismen. *Absolute Eindeutigkeit besteht bei den Zerlegungen dieses Satzes insbesondere dann, wenn $\mathfrak{M}$ die Menge $\mathfrak{N}$*[16]) *umfaßt, beispielsweise dann, wenn $\mathfrak{M}$ die Menge aller Automorphismen, der Bereich $\mathfrak{A}$ aller normalen Automorphismen, die Gesamtheit aller eigentlichen Automorphismen von $\mathfrak{G}$*[17]) *oder die Menge $\mathfrak{N}$ selber ist.*

---

[16]) $\mathfrak{N}$ bedeutet hier genau wie in Satz 4 die Gesamtheit aller eigentlichen, normalen Automorphismen der Ω-Gruppe $\mathfrak{G}$.

[17]) Für gewöhnliche endliche Gruppen beweist Herr Shoda die absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in charakteristische und charakteristisch direkt unzerlegbare Untergruppen im Anhang der in der Anm. [15]) zitierten Arbeit.

(Eingegangen am 1. August 1933.)

Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring.

Von

Gottfried Köthe in Münster.

Die Struktur der gewöhnlichen unendlichen Abelschen Gruppen ist noch nicht völlig geklärt. Seit den grundlegenden Untersuchungen von H. Prüfer[1]) hat jetzt H. Ulm[2]) einen wesentlichen Fortschritt erzielt, es gelang ihm für beliebige abzählbare Gruppen von Elementen endlicher Ordnung Normalformen aufzufinden.

In der jüngsten Entwicklung der Algebra sind die gewöhnlichen Abelschen Gruppen zu einem Spezialfall der Abelschen Gruppen mit einem Operatorenbereich geworden, deren Einführung auf W. Krull[3]) zurückgeht. Die gewöhnlichen Abelschen Gruppen können aufgefaßt werden als Abelsche Gruppen mit dem Ring der ganzen Zahlen als Operatorenbereich. Nun ist der Ring der ganzen Zahlen aber idealtheoretisch betrachtet ziemlich kompliziert gebaut und es ist zu erwarten, daß bei einfacherem Operatorenring die Struktur der Abelschen Gruppen auch einfacher sein wird als im Fall der gewöhnlichen Abelschen Gruppen.

In dieser Arbeit betrachte ich Abelsche Gruppen mit einem nichtkommutativen Operatorenring $\mathfrak{o}$, der den Doppelkettensatz für Linksideale erfüllt und eine Haupteinheit besitzt[4]). Hat $\mathfrak{o}$ kein Radikal, so ist $\mathfrak{o}$ und

[1]) H. Prüfer, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 35 ff.; Theorie der unendlichen Abelschen Gruppen 1 und 2, Math. Zeitschr. 20 (1924), S. 165 ff. und 22 (1925), S. 222 ff.

[2]) H. Ulm, Zur Theorie der abzählbar-unendlichen Abelschen Gruppen, Math. Annalen 107 (1933), S. 774 ff.

[3]) W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 161 ff.

[4]) Diese Eigenschaft haben speziell alle hyperkomplexen Systeme mit Haupteinheit. Was an Tatsachen aus der Theorie der hyperkomplexen Systeme benützt wird, ist in G. Köthe, Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 161 ff., zitiert als K, zu finden. Die aus dieser Arbeit verwendeten Resultate finden sich aber auch schon meistens bei E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. d. math. Seminars d. Univ. Hamburg 5 (1927), S. 251 ff. Die wichtigsten Grundbegriffe stehen auch in van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. 2, und E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 641 ff., zitiert als N.

damit auch eine Abelsche Gruppe mit $\mathfrak{o}$ als Operatorenring vollständig reduzibel, und diesen Fall hat schon W. Krull[5]) betrachtet, es wird jede solche Abelsche Gruppe direkte Summe von zu einfachen Linksidealen von $\mathfrak{o}$ isomorphen Gruppen, und diese Zerlegung ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Wir zeigen nun in § 1, daß eine bis auf Isomorphie eindeutige Zerlegung in zyklische, direkt unzerlegbare Gruppen auch existiert, wenn $\mathfrak{o}$ ein *einreihiger* Ring ist, d. h. ein Ring, der direkte Summe von zweiseitigen primären Idealen mit Haupteinheit ist, in denen jedes primitive Idempotent ein Rechts- und ein Linksideal erzeugt, die nur eine einzige Kompositionsreihe besitzen.

In § 2 wird bewiesen, daß für kommutatives $\mathfrak{o}$ eine solche eindeutige Zerlegung in zyklische direkt unzerlegbare Summanden auch nur für einen einreihigen Operatorenring möglich ist, im nichtkommutativen Fall bleibt das Problem offen.

In § 3 machen wir Anwendungen auf die Darstellungstheorie und Elementarteilertheorie. Die Darstellungsmoduln für hyperkomplexe Systeme mit Haupteinheit sind Abelsche Gruppen der betrachteten Art und wir kommen umgekehrt von unseren Abelschen Gruppen, über die wir ja keine Endlichkeitsvoraussetzungen gemacht haben, zu einer Erweiterung des Darstellungsbegriffes auf Darstellungen durch unendliche spaltenfinite (zeilenfinite) Matrizen. Alle unsere Struktursätze über Abelsche Gruppen gehen so über in Sätze über die Darstellungen von hyperkomplexen Systemen. Der § 1 Satz 3 entsprechende Satz der Darstellungstheorie enthält nicht nur die übliche Darstellungstheorie der vollständig reduziblen hyperkomplexen Systeme und der endlichen Gruppen, sondern auch einen Teil der Elementarteilertheorie, nämlich die Reduktion einer Matrix auf die Normalform, wie sie z. B. von W. Krull im Anhang des zweiten Bandes von O. Haupt, Einführung in die Algebra, gegeben wurde. Die Darstellungstheorie der Gruppen und die Elementarteilertheorie erscheinen somit als Spezialfälle einer allgemeinen Darstellungstheorie der einreihigen Ringe.

§ 1.

Einreihiger Operatorenring.

Wir betrachten in diesem Paragraphen nichtkommutative Ringe $\mathfrak{o}$, die den Doppelkettensatz für Linksideale erfüllen, eine Haupteinheit besitzen und die direkte Summe

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n \tag{1}$$

[5]) W. Krull, Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe, Math. Annalen **99** (1928), S. 51ff.

von zweiseitigen Idealen $\mathfrak{a}_i$ sind, die selbst primäre Ringe sind (ein Ring heißt bekanntlich primär, wenn jedes echte zweiseitige Unterideal des Ringes nilpotent ist). Es gelten die Orthogonalitätsrelationen $\mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = 0$ für $i \neq k$, die auch für die Einheitselemente m_i der $\mathfrak{a}_i$ gültig sind.

Definition. *Ein Ring* $\mathfrak{o}$, *der die obigen Voraussetzungen erfüllt, heißt einreihig, wenn jedes primitive*[6]) *Idempotent* e *ein Rechts- und ein Linksideal* $e\mathfrak{o}$ *bzw.* $\mathfrak{o}e$ *erzeugt, die nur eine einzige Kompositionsreihe besitzen.*

Ein Linksideal in $\mathfrak{o}$ heißt *regulär*, wenn es nicht nur nilpotente Elemente enthält, *minimal regulär*, wenn es kein echtes reguläres Unterideal besitzt.

Wir betrachten nun Abelsche Gruppen mit $\mathfrak{o}$ als Operatorenring. $\mathfrak{o}$ selbst ist das einfachste Beispiel: Die Addition der Elemente in $\mathfrak{o}$ ist die Gruppenverknüpfung, die Multiplikation von links $x \cdot a$ mit den Elementen x aus $\mathfrak{o}$ wird als die Anwendung des Operators x auf das Element a von $\mathfrak{o}$ aufgefaßt.

Allgemein sprechen wir von einer *Abelschen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit* $\mathfrak{o}$ *als Operatorenbereich*, wenn $\mathfrak{G}$ eine additive Gruppe ist und für jedes Element α aus $\mathfrak{G}$ und x aus $\mathfrak{o}$ die Verbindung $x \cdot \alpha$ erklärt und ein Element von $\mathfrak{G}$ ist, wenn ferner $x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta$, $(xy)\alpha = x(y\alpha)$ und $(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$ gilt. Man nennt $\mathfrak{G}$ dann auch einen $\mathfrak{o}$-Links-Modul.

Wir wollen weiter voraussetzen, daß das Einheitselement m von $\mathfrak{o}$ Einheitsoperator für $\mathfrak{G}$ ist, d. h. $m\alpha = \alpha$ für alle α aus $\mathfrak{G}$.

Im folgenden betrachten wir nur *zulässige* Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, d. h. Untergruppen, für die $\mathfrak{o}\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$ gilt, wobei wir unter $\mathfrak{o}\mathfrak{H}$ die von allen Summen über Elemente $x\beta$ gebildete Untergruppe verstehen, x beliebig aus $\mathfrak{o}$, β beliebig aus $\mathfrak{H}$. Von Isomorphie (in Zeichen $\simeq$) zweier Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ sprechen wir nur dann, wenn es sich um Operatorisomorphie handelt, d. h. wenn für α aus $\mathfrak{H}$, α' aus $\mathfrak{H}'$, die Zuordnung $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ für jedes x aus $\mathfrak{o}$ die Zuordnung $x\alpha \leftrightarrow x\alpha'$ zur Folge hat.

Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie keine echte Untergruppe außer der Null umfaßt. Jede einfache Gruppe ist zyklisch, denn ist $\alpha \neq 0$ ein Element daraus, so ist $\mathfrak{o}\alpha$ eine Untergruppe ungleich Null, also mit der Gruppe identisch.

Satz 1. (Zerlegung in primäre Summanden.) *Jede Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit einreihigem Operatorenbereich* $\mathfrak{o}$ *ist als direkte Summe* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \ldots + \mathfrak{G}_n$ *der Gruppen* $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{a}_i \mathfrak{G}$ *darstellbar. Diese Zerlegung ist eindeutig, d. h. es gibt keine zu ihr isomorphe aber von ihr verschiedene Zerlegung.*

[6]) Ein Idempotent heißt primitiv, wenn es nicht die Summe zweier sich gegenseitig annullierender Idempotente ist.

Da nach (1) $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n$ ist, ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{o}\,\mathfrak{G} = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{a}_n\mathfrak{G})$, also $\mathfrak{G}$ Vereinigungsgruppe der Untergruppen $\mathfrak{a}_i\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}_i$ und $(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_{i-1}, \mathfrak{G}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{G}_n)$ haben aber den Durchschnitt Null, denn ist m_i das Einheitselement von $\mathfrak{a}_i$, so ist $m_i\mathfrak{a}_k = 0$ für $i \neq k$, also müßte für ein Element α aus dem Durchschnitt einerseits $m_i\alpha$ gleich α, andererseits gleich 0 sein.

Die so gewonnene Zerlegung ist eindeutig, denn jede zu $\mathfrak{a}_1\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe muß als annullierendes Ideal auch $\mathfrak{a}_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n$ haben, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{G}$ ist aber bereits die maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit dieser Eigenschaft. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Hat ein Element x aus $\mathfrak{o}$ nach (1) die Zerlegung $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, so folgt aus den Orthogonalitätsrelationen der $\mathfrak{a}_i$, daß $x\alpha_i = x_i\alpha_i$ ist, α_i irgend ein Element aus $\mathfrak{a}_i\mathfrak{G}$. Daraus ergibt sich, daß jede Untergruppe von $\mathfrak{G}_i$, die nur bezüglich $\mathfrak{a}_i$ als Operatorenbereich zulässig ist, auch bezüglich $\mathfrak{o}$ als Operatorenbereich zulässig ist. Die $\mathfrak{a}_i$ sind mit $\mathfrak{o}$ einreihig, da jedes Ideal in $\mathfrak{a}_i$ auch Ideal in $\mathfrak{o}$ ist. Zur weiteren Untersuchung der Struktur der Gruppen genügt es also, den Operatorenbereich als primären einreihigen Ring $\mathfrak{a}$ vorauszusetzen, die Struktur einer Gruppe mit beliebigem einreihigen Operatorenring kann dann sofort aus Satz 1 abgelesen werden.

Jeder primäre Ring mit Haupteinheit ist nach K. S. 176 als Matrizenring in einem vollständig primären Ring $\mathfrak{t}$ darstellbar, es wird also

$$(2) \qquad \mathfrak{a} = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\mathfrak{t} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{l}_k \quad \text{mit} \quad \mathfrak{l}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\mathfrak{t}.$$

$\mathfrak{l}_k$ ist das Linksideal mit c_{kk} als Rechtseinheit, c_{kk} ist ein primitives Idempotent. Ist $\mathfrak{d}$ das Radikal von $\mathfrak{t}$, so ist $\mathfrak{c} = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\mathfrak{d}$ das Radikal von $\mathfrak{a}$. Auch $\mathfrak{t}$ besitzt eine Haupteinheit, die ein primitives Idempotent ist. $\mathfrak{t}$ ist einreihig, denn zwei verschiedenen Linksidealen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ in $\mathfrak{t}$ entsprechen die verschiedenen Linksideale $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{l}' c_{ik}$ und $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{l}'' c_{ik}$ in $\mathfrak{a}$, die beide in $\mathfrak{l}_1$ liegen; hätte also $\mathfrak{t}$ mehr als eine Kompositionsreihe, so auch $\mathfrak{l}_1$. Analoges gilt für Rechtsideale.

Da $\mathfrak{t}$ vollständig primär ist, ist $\mathfrak{t}/\mathfrak{d}$ isomorph einem Schiefkörper $\mathfrak{K}$. Ferner müssen $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}^2$, $\mathfrak{d}^2/\mathfrak{d}^3$, ..., $\mathfrak{d}^{i-1}/\mathfrak{d}^i = \mathfrak{d}^{i-1}/0$ ebenfalls isomorph $\mathfrak{K}$ sein, denn $\mathfrak{d}^i/\mathfrak{d}^{i+1}$ hat als absoluten Multiplikatorenbereich $\mathfrak{t}/\mathfrak{d} \simeq \mathfrak{K}$; als Gruppe mit einem Körper $\mathfrak{K}$ als Operatorenring ist $\mathfrak{d}^i/\mathfrak{d}^{i+1}$ aber direkte Summe von einfachen zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Gruppen und es darf nicht mehr als ein Summand auftreten, denn sonst bekäme ich durch Übergang von den Restklassen nach $\mathfrak{d}^{i+1}$ zu den Elementen in $\mathfrak{t}$ aus zwei solchen

Summanden zwei Ideale $\supset \mathfrak{d}^{i+1}$, deren Durchschnitt $\mathfrak{d}^{i+1}$ wäre, daraus würde die Existenz von wenigstens zwei verschiedenen Kompositionsreihen von $\mathfrak{t}$ folgen, was der Einreihigkeit von $\mathfrak{t}$ widerspricht.

Ist speziell c ein Element aus $\mathfrak{d}$, aber nicht aus $\mathfrak{d}^2$, so ist daher $\mathfrak{d} = c\mathfrak{t} = \mathfrak{t}c$, $\mathfrak{d}^2 = c^2\mathfrak{t} = \mathfrak{t}c^2$, ... und dies ist die einzige Kompositionsreihe von $\mathfrak{t}$, sowohl nach Rechts- wie nach Linksidealen. Die Ideale $\mathfrak{l}_k$ von (2) sind nach K. § 6 minimal regulär. Nach K. S. 179 Zusatz 1 sind alle minimal regulären Linksideale von $\mathfrak{a}$ isomorph einem fest vorgegebenen, wir wollen dazu $\mathfrak{l} = \mathfrak{t}c_{11} + \ldots + \mathfrak{t}c_{n1}$ nehmen mit der Rechtseinheit c_{11}. $\mathfrak{l}$ besitzt, wenn wir mit $\mathfrak{s}$ das Ideal $\mathfrak{d}c_{11} + \ldots + \mathfrak{d}c_{n1}$ bezeichnen, die einzige Kompositionsreihe $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{s} \supset \mathfrak{s}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{s}^{t-1} \supset 0$. Es ist $\mathfrak{s}^i = \mathfrak{l}c^i = c^i\mathfrak{l}$.

Wir betrachten nun Gruppen mit $\mathfrak{a}$ als Operatorenring.

Satz 2. *Die Vereinigungsgruppe $\mathfrak{G}$ von endlich vielen zyklischen Gruppen ist die direkte Summe von endlich vielen zyklischen direkt unzerlegbaren Gruppen, die einer der t Gruppen $\mathfrak{l}\mathfrak{s}$, $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^2$, ..., $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^t = \mathfrak{l}$ isomorph sind. Eine zyklische Gruppe ist also dann und nur dann direkt unzerlegbar, wenn sie einem $\mathfrak{l}\mathfrak{s}^i$ isomorph ist.*

Wir zeigen zuerst, daß wir uns darauf beschränken können, den Satz für eine Vereinigungsgruppe von zyklischen zu $\mathfrak{l}\mathfrak{s}^i$, $i = 1, \ldots, t$, isomorphen Gruppen zu beweisen.

Es ist wegen (2) eine zyklische Gruppe $\mathfrak{o}\alpha$ gleich $(\mathfrak{l}_1\alpha, \ldots, \mathfrak{l}_n\alpha)$, also Vereinigungsgruppe der $\mathfrak{l}_k\alpha$. Eine Gruppe $\mathfrak{l}_k\alpha$ ist aber isomorph einem $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^i$, denn vermittelt das Element a den Isomorphismus $\mathfrak{l}_k \sim \mathfrak{l}$ durch die Gleichung $\mathfrak{l}_k = \mathfrak{l}a$ (vgl. K. S. 179), so bekommen wir $\mathfrak{l}_k\alpha = \mathfrak{l}(a\alpha)$ und das aus allen Elementen von $\mathfrak{l}$, die $a\alpha$ annullieren, bestehende Ideal $\subseteq \mathfrak{l}$ muß einem $\mathfrak{s}^i$ gleich sein, also $\mathfrak{l}(a\alpha) \sim \mathfrak{l}/\mathfrak{s}^i$.

Weiter führen wir den Begriff des Höhenexponenten ein.

Definition. *Ein Element α aus $\mathfrak{G}$ heißt vom Höhenexponenten i in $\mathfrak{G}$, wenn es ein Element β in $\mathfrak{G}$ gibt, so daß $d\beta = \alpha$ ist für ein d aus $\mathfrak{c}^i$, und wenn die Zahl i die größte dieser Art ist.*

Es gibt in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{a}$ nur Elemente von einem Höhenexponenten $\leqq t$ (t der Exponent des Radikals $\mathfrak{c}$) und die Elemente vom Höhenexponenten Null erzeugen die ganze Gruppe.

Es sei nun $\mathfrak{G} = \sum_{\sigma<\tau} \mathfrak{H}_\sigma$ eine wohlgeordnete direkte Summe von beliebig vielen zyklischen, zu gewissen $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^i$ isomorphen Gruppen und i_0 die kleinste unter den Zahlen i. Dann gilt der

Hilfssatz 1. *Jedes Element α aus $\mathfrak{G}$, das eine zyklische, bei der Zuordnung $\alpha \leftrightarrow c_{11}$ zu $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^l$ isomorphe Gruppe erzeugt, $l \leqq i_0$, hat einen*

Höhenexponenten $\geqq i_0 - l$ *in einer zyklischen, zu* $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^r$ *isomorphen Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, $r \geqq i_0$.

Es sei $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{a}\,\alpha_\sigma$ und die Zuordnung $\alpha_\sigma \leftrightarrow c_{11}$ vermittle den Isomorphismus $\mathfrak{H}_\sigma \sim \mathfrak{l}/\mathfrak{s}^l$. Als Element aus $\mathfrak{G}$ besitzt α eine Darstellung $\alpha = d_1\alpha_1 + \ldots + d_s\alpha_s$, die α_i gewisse der α_σ, die d_i aus $\mathfrak{l}$. Nun haben die α_i das Element c_{11} als Linkseinheit, da $c_{11}\alpha_\sigma \leftrightarrow c_{11}^2 = c_{11}$ sein muß, also $c_{11}\alpha_\sigma = \alpha_\sigma$, ebenso haben alle d_i die Linkseinheit c_{11}, da $c_{11}\alpha = \alpha$ sein muß aus demselben Grunde und da wegen der direkten Summe aus $(c_{11}d_1)\alpha_1 + \ldots + (c_{11}d_s)\alpha_s = d_1\alpha_1 + \ldots + d_s\alpha_s$ die Beziehung $c_{11}d_i = d_i$ gefolgert werden kann. d_i hat als Element aus $\mathfrak{l}$ auch c_{11} als Rechtseinheit. Daher ist d_i ein Element aus $c_{11}\mathfrak{d}^{l_i}$ für geeignetes l_i, d. h. $d_i = c^{l_i}f_ic_{11}$, mit f_i aus $\mathfrak{t}$, nicht aus $\mathfrak{d}$ (für $l_i = 0$ ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{d}^0$ und $c_{11} = c^0$ zu setzen).

Aus $\mathfrak{s}^l\alpha = 0$ folgt, daß $c^l d_i\alpha_i = c^{l+l_i}f_ic_{11}\alpha_i = 0$ sein muß, daher ist $l + l_i \geqq e_i$, e_i der Exponent von $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{a}\,\alpha_i \sim \mathfrak{l}\,\mathfrak{s}^{e_i}$. Also ist $l_i \geqq e_i - l \geqq i_0 - l$. Ist r die kleinste der Zahlen $l_i + l$, so ist $\alpha = c^{r-l}(f_1'\alpha_1 + \ldots + f_s'\alpha_s)$ und es kann keine höhere Potenz von c ausgeklammert werden, also ist α vom Höhenexponenten $r - l \geqq i_0 - l$. Das Element $f_1'\alpha_1 + \ldots + f_s'\alpha_s$ erzeugt eine zyklische zu $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^r$ isomorphe Gruppe, $r \geqq i_0$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. $\sum_{\sigma<\tau}\mathfrak{H}_\sigma$ *sei eine wohlgeordnete direkte Summe von zyklischen, zu gewissen* $\mathfrak{l}\,\mathfrak{s}^i$ *isomorphen Untergruppen einer Gruppe* $\mathfrak{G}$. *Es sei* i_0 *das kleinste* i *und* $\mathfrak{H} = \mathfrak{l}\alpha$ *eine bei der Zuordnung* $\alpha \leftrightarrow c_{11}$ *zu* $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^k$ *isomorphe Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, $k \leqq i_0$. *Dann ist die Vereinigungsgruppe* $(\sum_{\sigma<\tau}\mathfrak{H}_\sigma, \mathfrak{H})$ *darstellbar in der Form* $\sum_{\sigma<\tau}\mathfrak{H}_\sigma + \mathfrak{H}_\tau$, $\mathfrak{H}_\tau$ *direkt unzerlegbar und von kleinerer oder gleicher Länge wie* $\mathfrak{H}$.

Dabei verstehen wir unter der „Länge" einer Gruppe die Anzahl der Kompositionsfaktoren in einer Kompositionsreihe der Gruppe.

Beweis. Es sei der Durchschnitt $[\sum\mathfrak{H}_\sigma, \mathfrak{H}] = \mathfrak{U} \neq 0$. Dann ist $\mathfrak{U}$ zyklisch und als Untergruppe von $\mathfrak{H}$ gleich $\mathfrak{l}\,c^l\alpha$. Nun ist $\mathfrak{l}\,c^l\alpha$ isomorph $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^{k-l}$ und es wird $c^l\alpha$ nach Hilfssatz 1 auch gleich $c^{l'}\gamma$ für ein geeignetes γ aus $\sum\mathfrak{H}_\sigma$ und $l' \geqq l$.

Das Element $\alpha' = \alpha - c^{l'-l}\gamma$, für das $c^l\alpha' = c^l\alpha - c^{l'}\gamma = 0$ ist, erzeugt nun eine zyklische direkt unzerlegbare Gruppe $\mathfrak{H}_\tau$ von kleinerer oder gleicher Länge wie $\mathfrak{H}$ und es ist offenbar $(\sum\mathfrak{H}_\sigma, \mathfrak{H}_\tau) = (\sum\mathfrak{H}_\sigma, \mathfrak{H})$.

Nun ist aber der Durchschnitt $[\sum\mathfrak{H}_\sigma, \mathfrak{H}_\tau] = 0$, denn eine Beziehung $p\alpha' = \beta$, β aus $\sum\mathfrak{H}_\sigma$ und p aus $\mathfrak{l}$, kann, da sie mit $p\alpha = \beta + pc^{l'-l}\gamma = \beta'$, β' aus $\sum\mathfrak{H}_\sigma$ gleichbedeutend ist, nur für p aus $\mathfrak{s}^l$ erfüllt sein, dann ist aber $p\alpha' = 0$.

Aus $[\sum_{\sigma<\tau} \mathfrak{H}_\sigma, \mathfrak{H}_\tau] = 0$ folgt nun leicht, daß die Summe über alle $\mathfrak{H}_\sigma$, $\sigma \leqq \tau$, direkt ist.

Der Beweis von Satz 2 geht nun so vor sich. Wir wählen unter den zyklischen direkt unzerlegbaren Gruppen eine, $\mathfrak{H}_1$, von größter Länge aus, bilden mit den übrigen, $\mathfrak{H}_i'$, die Vereinigungsgruppen $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_i')$ und zerspalten sie nach Hilfssatz 2 in $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_i''$ und bekommen so lauter Gruppen $\mathfrak{H}_i''$, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{H}_1$ Null ist, und die alle kleinere oder gleiche Länge wie $\mathfrak{H}_1$ haben. Unter diesen wählen wir nun eine, $\mathfrak{H}_2$, mit größter Länge aus, bilden $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ und ersetzen die restlichen zyklischen Gruppen $\mathfrak{H}_i''$ durch Zerspalten von $(\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_i'')$ durch solche, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ Null ist und die alle kleinere oder gleiche Länge wie $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ haben, usf. Nach endlich vielen Schritten kommen wir so zur gesuchten direkten Summenzerlegung von $\mathfrak{G}$.

Wenden wir dieses Verfahren allgemeiner auf eine Vereinigungsgruppe von beliebig vielen zu den $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^i$ isomorphen zyklischen Gruppen an, so bekommen wir den

Satz 3 (Zerlegungssatz). *Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einreihigem Operatorenring $\mathfrak{o}$ ist direkte Summe von zyklischen, direkt unzerlegbaren Gruppen, die einer der Gruppen $\mathfrak{l}_k/\mathfrak{s}_k^i$ isomorph sind, wobei $\mathfrak{l}_k$ ein von einem primitiven Idempotent erzeugtes Linksideal aus $\mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{s}_k$ das größte nilpotente Unterideal von $\mathfrak{l}_k$ ist. Die Gruppen $\mathfrak{l}_k/\mathfrak{s}_k^i$ sind nicht isomorph untereinander.*

Aus Satz 1 folgt, daß es genügt, den Satz für Gruppen mit primärem $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ zu beweisen. Man legt eine Wohlordnung der Elemente zugrunde, die Gruppen erzeugen, die zu einem $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^i$ isomorph sind. Man setzt $\mathfrak{H}_0$ gleich der ersten zyklischen Gruppe von der größten überhaupt auftretenden Länge, reduziert nach Hilfssatz 2 alle übrigen Gruppen zu solchen, die mit $\mathfrak{H}_0$ einen Durchschnitt Null haben, setzt $\mathfrak{H}_1$ gleich der ersten so erhaltenen zyklischen Gruppe größter Länge usf. Man kann diesen Prozeß durch alle Ordnungszahlen fortsetzen und sieht leicht ein, daß ganz $\mathfrak{G}$ dadurch erschöpft wird.

Daß die $\mathfrak{l}_k/\mathfrak{s}_k^i$ nicht untereinander isomorph sind, folgt für dasselbe k und verschiedene i aus der Verschiedenheit ihrer Längen, für verschiedene k daraus, daß die $\mathfrak{a}_{k'}$, mit $k' \neq k$ die $\mathfrak{l}_k/\mathfrak{s}_k^i$ annullieren (vgl. den Schluß bei N. S. 659).

Satz 3 enthält als Spezialfall den Zerlegungssatz für gewöhnliche unendliche Abelsche Gruppen, deren Elemente Ordnungen haben, die Teiler einer festen Zahl n sind. Als Operatorenring kann dann ja der Restklassenring der ganzen Zahlen nach n genommen werden, der bekanntlich einreihig ist.

Satz 4 (Isomorphiesatz). *Die Zerlegung von Satz 3 ist bis auf Isomorphie eindeutig.*

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von Satz 1 genügt es wieder, den Operatorenring $\mathfrak{a}$ als primär vorauszusetzen. Es seien die beiden Zerlegungen

$$\mathfrak{G} = \sum_{\tau_1 < \eta_1} \mathfrak{H}^{(1)}_{\tau_1} + \ldots + \sum_{\tau_t < \eta_t} \mathfrak{H}^{(t)}_{\tau_t} \tag{1}$$

und

$$\mathfrak{G} = \sum_{\tau'_1 < \eta'_1} \mathfrak{H}^{(1)'}_{\tau'_1} + \ldots + \sum_{\tau'_t < \eta'_t} \mathfrak{H}^{(t)'}_{\tau'_t} \tag{2}$$

gegeben, wobei alle $\mathfrak{H}^{(i)}_{\tau_i}$ und $\mathfrak{H}^{(i)'}_{\tau'_i}$ für festes i isomorph $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^i$ sind.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}_i$ bzw. $\mathfrak{E}_i$ die Untergruppen

$$\mathfrak{G}_i = \sum_{\tau_1 < \eta_1} \mathfrak{H}^{(1)}_{\tau_1} + \ldots + \sum_{\tau_i < \eta_i} \mathfrak{H}^{(i)}_{\tau_i} \text{ bzw. } \mathfrak{E}_i = \sum_{\tau_{i+1} < \eta_{i+1}} \mathfrak{H}^{(i+1)}_{\tau_{i+1}} + \ldots + \sum_{\tau_t < \eta_t} \mathfrak{H}^{(t)}_{\tau_t}.$$

Alle Elemente ungleich Null aus $\mathfrak{G}_i$ vom Höhenexponenten k haben Ordnungen zwischen 1 und $i-k$, wenn wir als „Ordnung" eines Elementes den kleinsten Exponenten l bezeichnen, für den $\mathfrak{c}^l \alpha = 0$ ist.

Alle Elemente ungleich Null aus $\mathfrak{E}_i$ vom Höhenexponenten k haben Ordnungen $> i-k$.

Beweis. Es sei $\beta = d_1 \alpha_1 + \ldots + d_r \alpha_r$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{E}_i$, α_j die Basiselemente gewisser $\mathfrak{H}^{(p)}_{\tau_p}$ mit $p > i$. Sind die α_j so gewählt, daß die Zuordnung $\alpha_j \leftrightarrow c_{11}$ eine Homomorphie $\mathfrak{l} \to \mathfrak{a}\,\alpha_j$ vermittelt, so können die d_j aus $\mathfrak{l}$ gewählt werden. Ist nun $\mathfrak{s}^k$ die größte Potenz von $\mathfrak{s}$, so daß alle d_j noch in $\mathfrak{s}^k$ liegen (es sei $\mathfrak{s}^0 = \mathfrak{l}$, $c^0 = c_{11}$ gesetzt), so können wir wegen $\mathfrak{s}^k = c^k \mathfrak{l}$ das Element β schreiben als

$$\beta = c^k (d'_1 \alpha_1 + \ldots + d'_r \alpha_r),$$

wenigstens ein d'_{j_0} ist in $\mathfrak{l}$, aber nicht in $\mathfrak{s}$. Dann ist

$$\mathfrak{c}^{i-k}\beta = \mathfrak{s}^{i-k}\beta = \mathfrak{s}^{i-k} c^k (d'_1 \alpha_1 + \ldots + d'_r \alpha_r) = \mathfrak{s}^i (d'_1 \alpha_1 + \ldots + d'_r \alpha_r) \neq 0,$$

da $\mathfrak{s}^i d'_{j_0} = \mathfrak{s}^i$ ist und $\mathfrak{s}^i \alpha_{j_0} \neq 0$ ist nach Voraussetzung. Also hat β den Höhenexponenten k, aber eine Ordnung $> i-k$.

Die aus (2) analog gebildeten Gruppen

$$\mathfrak{G}'_i = \sum_{\tau'_1 < \eta'_1} \mathfrak{H}^{(1)'}_{\tau'_1} + \ldots + \sum_{\tau'_i < \eta'_i} \mathfrak{H}^{(i)'}_{\tau'_i} \text{ bzw. } \mathfrak{E}'_i = \sum_{\tau'_{i+1} < \eta'_{i+1}} \mathfrak{H}^{(i+1)'}_{\tau'_{i+1}} + \ldots + \sum_{\tau'_t < \eta'_t} \mathfrak{H}^{(t)'}_{\tau'_t}$$

haben dieselben Eigenschaften.

Wir ordnen nun jedem Element aus $\mathfrak{G}_i$ seine $\mathfrak{G}'_i$-Komponente bei der Zerlegung (2) zu. Diese Zuordnung ist eine Isomorphie von $\mathfrak{G}_i$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{G}'_i$, denn hätte ein Element ungleich Null aus $\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{G}'_i$ die Komponente Null, so müßte es als Element ungleich Null aus $\mathfrak{E}'_i$, falls es den Höhenexponenten k hat, eine Ordnung $> i-k$ haben

im Widerspruch dazu, daß es als Element aus $\mathfrak{G}_i$ dann nur eine Ordnung $\leqq i-k$ haben kann.

Speziell wird bei dieser Isomorphie $\mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{G}_i = \sum_{\tau_i < \eta_i} \mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{H}_{\tau_i}^{(i)}$ abgebildet auf eine Untergruppe $\mathfrak{R}_i$ von $\mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{G}_i' = \sum_{\tau_i' < \eta_i'} \mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{H}_{\tau_i}^{(i)'}$. Nun ist $\mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{G}_i'$ eine Gruppe mit dem zweiseitig einfachen Operatorenbereich $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$, da $\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{G}_i' = \mathfrak{c}^i\mathfrak{G}_i' = 0$ ist, $\mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{G}_i'$ ist also eine vollständig reduzible Gruppe im Sinne von W. Krull[5]). $\mathfrak{R}_i$ ist ebenfalls vollständig reduzibel, aus der Isomorphie mit $\mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{G}_i$ folgt ja, daß sie eine direkte Zerlegung in η_i zyklische unzerlegbare Summanden besitzt. Für vollständig reduzible Gruppen gilt der Isomorphiesatz[5]), man kann ferner die Zerlegung von $\mathfrak{R}_i$ zu einer Zerlegung von $\mathfrak{c}^{i-1}\mathfrak{G}_i'$ ergänzen, daraus folgt dann, daß die Kardinalzahl von η_i kleiner oder gleich der Kardinalzahl von η_i' sein muß. Ebenso erschließt man die umgekehrte Beziehung, mithin sind die Kardinalzahlen von η_i und η_i' gleich.

Aus der Gleichheit der Kardinalzahlen von η_i und η_i' folgt nun sofort, daß die Zerlegungen (1) und (2) bis auf Isomorphie identisch sind.

§ 2.

Allgemeiner Operatorenring.

In diesem Paragraphen zeigen wir zuerst, daß unter den kommutativen Ringen $\mathfrak{o}$, die den Doppelkettensatz für Linksideale erfüllen und eine Haupteinheit besitzen, die einreihigen die einzigen sind, deren zugehörige Gruppen immer eine Zerlegung in zyklische direkt unzerlegbare Summanden besitzen. In nichtkommutativen Ringen liegen weit kompliziertere Verhältnisse vor, eine genaue Angabe der Voraussetzungen für die Gültigkeit eines Zerlegungssatzes scheint schwierig zu sein.

Ist $\mathfrak{o}$ kommutativ und besitzt $\mathfrak{o}$ eine Haupteinheit, so ist $\mathfrak{o}$ immer direkte Summe von primären Ringen, $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_r$[7]). Ich kann mich also auf die Untersuchung nicht einreihiger primärer Ringe $\mathfrak{a}$ beschränken.

Hat $\mathfrak{a}$ das Radikal $\mathfrak{c}$, so muß unter den $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$-Gruppen $\mathfrak{c}/\mathfrak{c}^2$, $\mathfrak{c}^2/\mathfrak{c}^3$, ... wenigstens eine nichteinfache Gruppe vorkommen, es sei dies $\mathfrak{c}^i/\mathfrak{c}^{i+1}$. Als Gruppe mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$, der ein Körper ist, wird $\mathfrak{c}^i/\mathfrak{c}^{i+1}$ direkte Summe von $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$-Gruppen, $\mathfrak{c}^i/\mathfrak{c}^{i+1} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,.\,c_1 + \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,.\,c_2 + \ldots$. Es seien nun $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{a}\,\alpha$ und $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{a}\,\beta$ zwei zu $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}^{i+1}$ isomorphe verschiedene zyklische

[7]) Dies ergibt sich leicht aus K. S. 184/85. Im kommutativen Fall fallen die einreihigen Ringe mit den zerlegbaren Ringen von W. Krull zusammen, vgl. Algebraische Theorie der zerlegbaren Ringe, Math. Annalen **92** (1924), S. 183ff.

Gruppen, wobei die Zuordnungen $\alpha \leftrightarrow \beta \leftrightarrow m$, m die Haupteinheit von $\mathfrak{a}$, die Isomorphismen $\mathfrak{H}_1 \simeq \mathfrak{H}_2 \simeq \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}^{i+1}$ vermitteln mögen.

Wir konstruieren uns nun aus $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ eine neue Gruppe, indem wir $c_1\alpha = c_2\beta$ setzen, also die Untergruppen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\cdot c_1\alpha$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\cdot c_2\beta$ identifizieren, was wegen ihrer Isomorphie zu keinem Widerspruch führt, und mit $\mathfrak{H}$ die so definierte, $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ enthaltende Gruppe bezeichnen. Wir behaupten nun:

$\mathfrak{H}$ ist direkt unzerlegbar, aber nicht zyklisch.

$\mathfrak{H}$ ist sicher nicht zyklisch, denn jede zyklische Gruppe $\subseteq \mathfrak{H}$ ist isomorph $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}^{i+1}$ oder einer Faktorgruppe davon, eine solche kann aber nie gleich $\mathfrak{H}$ sein, da ihre Kompositionsreihenlänge höchstens gleich k, der Länge von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}^{i+1}$, also nie gleich $2k-1$ ist, der Länge von $\mathfrak{H}$.

Wenn $\mathfrak{H}$ zerlegbar wäre, so müßte wenigstens in einem der Summanden ein Element $x\alpha + y\beta$ vorkommen, x nicht im Radikal $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$. Dann gibt es ein x', so daß $x'(x\alpha + y\beta)$ die Form $\alpha + y'\beta$ hat. Wir zeigen jetzt, daß die Gruppe $\mathfrak{a}(\alpha + y'\beta)$ isomorph $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}^{i+1}$ ist. Wäre nämlich $r(\alpha + y'\beta) = 0$ für r aus $\mathfrak{c}^i$ aber nicht $\mathfrak{c}^{i+1}$, so müßte $r\alpha = -ry'\beta$ sein; nach Definition von $\mathfrak{H}$ ist dies nur möglich, wenn $r = dc_1$ und $ry' = -dc_2$ ist. Die beiden Ideale $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\cdot c_1$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\cdot c_2$ aus $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}^{i+1}$ sind aber elementefremd, also muß $r \equiv 0\,(\mathfrak{c}^{i+1})$ sein gegen die Voraussetzung.

Ein direkter Summand von $\mathfrak{H}$ müßte also mindestens eine Kompositionsreihenlänge k haben. Für einen zweiten dürfte daher diese Zahl höchstens gleich $k-1$ sein. Damit aber sowohl α wie β in $\mathfrak{H}$ liegen, muß es noch einen zyklischen Summanden geben, bei dessen Basiselement $u\alpha + v\beta$ entweder der Koeffizient von α oder der von β nicht in $\mathfrak{c}$ liegt. Für diese zyklische Gruppe gilt derselbe Schluß, sie hat also ebenfalls mindestens die Länge k, damit haben wir einen Widerspruch, denn die Länge von $\mathfrak{H}$ ist ja $2k-1$, also bestimmt kleiner wie $2k$.

Damit ist bewiesen

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß jede Abelsche Gruppe mit einem kommutativen Ring $\mathfrak{o}$, der den Doppelkettensatz erfüllt und eine Haupteinheit besitzt, als Operatorenring in zyklische direkt unzerlegbare Summanden zerlegt werden kann, ist die Einreihigkeit von $\mathfrak{o}$.*

Wir wollen nun für den allgemeinen Fall, daß $\mathfrak{o}$ ein (nicht mehr als kommutativ vorausgesetzter) Ring mit Haupteinheit ist, der den Doppelkettensatz für Linksideale erfüllt, einen Satz ableiten, der einen gewissen Ersatz für den Zerlegungssatz bildet, aber in dieser Form keineswegs zu bis auf Isomorphie bestimmten Normalformen für die Abelschen Gruppen führt.

Es sei $\mathfrak{c}$ das Radikal von $\mathfrak{o}$.

Definition. *Als das Radikal einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit dem Operatorenring* $\mathfrak{o}$ *bezeichnen wir die Untergruppe* $\mathfrak{c}\,\mathfrak{G}$.

Satz 2. *Jede Gruppe* $\mathfrak{G}$ *mit dem Operatorenring* $\mathfrak{o}$ *ist darstellbar als die Vereinigungsgruppe von zyklischen direkt unzerlegbaren Gruppen* $\mathfrak{H}_\alpha$, *die isomorph Faktorgruppen von minimalregulären Linksidealen von* $\mathfrak{o}$ *sind. Der Durchschnitt eines* $\mathfrak{H}_\alpha$ *mit der Vereinigungsgruppe der übrigen* $\mathfrak{H}_{\alpha'}$, $\alpha' \neq \alpha$, *ist eine Gruppe, die zum Radikal von* $\mathfrak{G}$ *gehört.*

Beweis. $\mathfrak{G}$ ist die Vereinigungsgruppe zyklischer Gruppen $\mathfrak{o}\,\alpha$. Nun besitzt $\mathfrak{o}$ eine Zerlegung $\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 + \ldots + \mathfrak{l}_n$ in minimal reguläre direkt unzerlegbare Linksideale (vgl. K. S. 170, Satz 9), also wird $\mathfrak{o}\,\alpha = (\mathfrak{l}_1\,\alpha, \ldots, \mathfrak{l}_n\,\alpha)$ Vereinigungsgruppe von zyklischen direkt unzerlegbaren Gruppen, die isomorph Faktorgruppen der $\mathfrak{l}_i$ sind. Mit Hilfe einer Wohlordnung der solche Gruppen erzeugenden Elemente kann man dafür sorgen, daß die letzte Bedingung erfüllt ist.

Eine unmittelbare Folgerung von Satz 2 ist

Satz 3. *Die Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{c}\,\mathfrak{G}$ *einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *nach ihrem Radikal ist die direkte Summe der einfachen Gruppen* $\mathfrak{H}_\alpha\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{H}_\alpha$.

§ 3.

Anwendungen auf die Darstellungstheorie hyperkomplexer Systeme und die Elementarteilertheorie.

Über die reduziblen Darstellungen von hyperkomplexen Systemen, die ein Radikal besitzen, weiß man bisher nichts außer der Tatsache, daß sie nicht immer vollreduzibel sind. Unsere Sätze werden uns einigen Aufschluß hierüber geben, speziell werden wir die Darstellungen einreihiger Systeme völlig übersehen können.

Wir beginnen mit einer Erweiterung des Darstellungsbegriffs.

Ist eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{o}$ als Operatorenring ein Rechts-K-Modul, K irgendein Körper, so nennen wir $\mathfrak{G}$ einen Darstellungsmodul von $\mathfrak{o}$ in bezug auf K, falls auch noch das Gesetz $a\,(\alpha\,\varkappa) = (a\,\alpha)\,\varkappa$ gilt, a aus $\mathfrak{o}$, α aus $\mathfrak{G}$, $\varkappa$ aus K.

Es läßt sich $\mathfrak{G}$ durch eine Wohlordnung immer schreiben als $\mathfrak{G} = \sum_{\sigma<\tau} \alpha_\sigma K$, also als direkte Summe von einfachen K-Moduln. Die Kardinalzahl $\mathfrak{t}$ von τ ist nach § 1 Satz 4 eine Invariante des Darstellungsmoduls. Ist c in $\mathfrak{o}$, so ist $c\,\alpha_\xi = \sum_\sigma \alpha_\sigma k_{\sigma\xi}$, $k_{\sigma\xi}$ aus K, wobei nur endlich viele $k_{\sigma\xi}$ für festes ξ von Null verschieden sind. Man kann diese Gleichungen für alle ξ zusammenfassen zu einer Matrizengleichung

$$(\ldots, c\,\alpha_\xi, \ldots) = (\ldots, \alpha_\xi, \ldots)\,C,$$

$C = (k_{\sigma\xi})$ eine spaltenfinite Matrix mit τ Zeilen und Spalten.

Die Zuordnung $c \to C$ ist nun, wie man sich analog wie bei N. S. 669 überzeugt, ein Ringhomomorphismus von $\mathfrak{o}$ auf die Gesamtheit der Matrizen C. Die Addition und Multiplikation der Matrizen geht genau so wie bei endlichen Matrizen vor sich, wegen der Spaltenfinitheit gelten die bekannten Rechenregeln auch für diese Matrizen.

Eine solche Ringhomomorphie soll eine Darstellung t-ten Grades heißen, t die Kardinalzahl von τ.

Jede Basis eines Darstellungsmoduls vermittelt also eine Darstellung von $\mathfrak{o}$ durch spaltenfinite Matrizen einer bestimmten Kardinalzahl. Zwei Darstellungen C und C' durch verschiedene Basen desselben Darstellungsmoduls sind äquivalent[8]), d. h. es gibt eine feste spaltenfinite Matrix P mit einer eindeutigen vorderen und hinteren Reziproken P^{-1}, so daß $C' = P^{-1} C P$ wird für alle C. Die Matrix P ist dabei die Matrix, die die Basis der zweiten Darstellung β_η durch die der ersten ausdrückt, $(\ldots, \beta_\eta, \ldots) = (\ldots, \alpha_\xi, \ldots) P$.

Umgekehrt gehört zu jeder Darstellungsklasse von $\mathfrak{o}$ in K, also zur Gesamtheit aller zu einer festen Darstellung durch spaltenfinite Matrizen äquivalenten Darstellungen, ein Darstellungsmodul.

Wie im Fall der Darstellung durch endliche Matrizen nennt man eine Darstellung *reduzibel*, wenn sie einer Darstellung äquivalent ist, in der sämtliche Matrizen die Form

$$\left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline S & T \end{array}\right)$$

haben, R, T, quadratisch, *direkt zerlegbar*, wenn in einer äquivalenten Darstellung auch noch $S = 0$ ist.

Eine Darstellung ist dann und nur dann direkt zerlegbar, wenn der dazugehörige Darstellungsmodul direkte Summe von zwei Darstellungsmoduln ist. Einer direkten Summenzerlegung des Darstellungsmoduls entspricht die Reduktion der Darstellung auf einzelne Kästchen, die die durch die direkten Summanden gelieferten Darstellungen sind.

Nehmen wir $\mathfrak{o}$ jetzt als hyperkomplexes System bezüglich des Körpers K an mit einer Haupteinheit und betrachten wir nur Darstellungsmoduln $\mathfrak{G}$ bezüglich K, deren Elemente kommutativ mit denen von K verbunden sind, so wird jeder $\mathfrak{o}$-Linksmodul automatisch K-Rechtsmodul, so daß wir also eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in Darstellungsmoduln schon bekommen, wenn wir $\mathfrak{G}$ nur als Abelsche Gruppe mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{o}$ auffassen und danach zerlegen.

---

[8]) Die Beweise der im folgenden angeführten Sätze führen wir nicht aus, sie ergeben sich durch einfache Übertragung der Überlegungen in N. auf unseren allgemeineren Fall.

Aus § 1 Satz 3 folgt daher speziell für halbeinfache Ringe, daß jede Darstellung eines halbeinfachen hyperkomplexen Systems durch spaltenfinite Matrizen in K direkt zerlegbar ist in lauter irreduzible endliche Darstellungen, die durch die einfachen Linksideale der zweiseitig einfachen Bestandteile $\mathfrak{a}_i$ von $\mathfrak{o}$ vermittelt werden. Die Anzahl der zu einem $\mathfrak{a}_i$ gehörigen irreduziblen Darstellungen ist nach dem Isomorphiesatz eine Invariante der Darstellungsklasse.

Diese Resultate enthalten im wesentlichen die Darstellungstheorie, wie sie bei N. zu finden ist. Darüber hinaus folgt aus den Resultaten von § 1, daß jede Darstellung in K eines einreihigen hyperkomplexen Systems $\mathfrak{o}$ ausreduzierbar ist in direkt unzerlegbare endliche Darstellungen, die sich alle aus den Gruppen $\mathfrak{l}/\mathfrak{s}^i$ ergeben, $\mathfrak{l}$ irgendein durch ein primitives Idempotent erzeugtes Linksideal, $\mathfrak{s}$ sein maximales nilpotentes Unterideal. Da zwei solche Ideale $\mathfrak{l}$ aus demselben primären Bestandteil $\mathfrak{a}_i$ von $\mathfrak{o}$ isomorph sind (K. S. 179, Zusatz 1), gibt es auch in diesem Fall nur endlich viele direkt unzerlegbare Darstellungsklassen. Die einzelnen direkt unzerlegbaren Darstellungen können aus den regulären Darstellungen der Ringe $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{c}_i^k$ gewonnen werden, $\mathfrak{c}_i$ das Radikal von $\mathfrak{a}_i$.

Die Darstellungstheorie in dieser allgemeinen Form umfaßt nun auch ein Hauptresultat der Elementarteilertheorie, nämlich die Überführung einer Matrix mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper K in die Normalform.

Die von W. Krull im Anhang des zweiten Bandes von O. Haupt, Einführung in die Algebra, gegebene Ableitung kann fast unmittelbar als Spezialfall unserer Ergebnisse gedeutet werden:

Wir betrachten gleich allgemeiner eine spaltenfinite Matrix A mit Koeffizienten aus K, die einer Gleichung $h(A) = 0$ genügt. Dies sei schon die normierte Gleichung niedrigsten Grades mit Koeffizienten aus K. Mit A betrachten wir alle Polynome $f(A)$ mit Koeffizienten aus K. Ordnen wir dem Polynom $f(x)$, x eine Unbestimmte, das Polynom $f(A)$ zu, so bekommen wir eine Ringhomomorphie, es wird der Ring $\mathfrak{D}$ aller Polynome $f(A)$ daher isomorph dem Restklassenring $\mathfrak{o} = K[x]/(h(x))$, $K[x]$ der Polynombereich über K. $\mathfrak{o}$ ist ein einreihiges hyperkomplexes System über K, und $\mathfrak{D}$ bildet eine Darstellung von $\mathfrak{o}$.

Nach dem obigen Satz kann diese Darstellung ausreduziert werden in direkt unzerlegbare Darstellungen endlichen Grades, die durch direkt unzerlegbare Ideale aus den $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{c}_i^k$ erzeugt werden.

Diese Darstellungen können noch näher beschrieben werden. Ist $h(x) = p_1(x)^{r_1} \dots p_k(x)^{r_k}$, die $p_i(x)$ irreduzibel, so sind die $K[x]/p_i(x)^l$ mit $0 < l \leqq r_i$ die direkt unzerlegbaren Ideale aus den $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{c}_i^k$. Wählen

wir als Basis dieser Ideale die Restklassen $[1]$, $[x]$, $[x^2]$, ..., $[x^{t-1}]$, t der Grad von $p_i(x)^l$, so entspricht der Restklasse $[x]$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & a_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & a_{t-1} \end{pmatrix}$$

$-a_0$, $-a_1$, ..., $-a_{t-1}$ die Koeffizienten von $1, x, \ldots, x^{t-1}$ in $p_i(x)^l$. Dies ist eine Loewysche Begleitmatrix in der Krullschen Terminologie. Da die Matrix A bei der Darstellung von $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{O}$ gerade die $[x]$ zugeordnete Matrix ist, ist A ähnlich einer Matrix, die in lauter Begleitmatrizen zerfällt. Dies ist die gesuchte Normalform und der Isomorphiesatz gibt die Eindeutigkeit dieser Normalform bis auf die Anordnung der einzelnen Begleitmatrizen.

Die Resultate von § 2 besagen darstellungstheoretisch, daß im allgemeinen Fall die direkt unzerlegbaren Darstellungen nicht mehr allein durch die direkt unzerlegbaren Linksideale oder Faktorgruppen davon geliefert werden. Im allgemeinen gibt es sogar unendlich viele direkt unzerlegbare Darstellungsklassen eines hyperkomplexen Systems, sogar wenn der Grad der Darstellungen beschränkt wird.

(Eingegangen am 11. August 1933.)

Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen *).

Von

Michael Golomb in Berlin.

Inhalt.

Seite

Einleitung 45

I. Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

§ 1. Eindeutige Lösungen 48

§ 2. Funktionen, die nicht stärker wachsen als lineare 54

§ 3. Anwendung auf die nichtlineare Randwertaufgabe 56

§ 4. Allgemeine Funktionalgleichungen 60

II. Mehrdeutige Probleme.

§ 5. Existenz einer nicht identisch verschwindenden Lösung (Eigenwertproblem) 63

§ 6. Eine Verallgemeinerung 66

§ 7. Einige Spezialfälle und Ergänzungen 72

Einleitung.

Das Studium der Randwertaufgaben der linearen Differentialgleichungen hat durch die Theorie der linearen Integralgleichungen eine weitgehende Förderung erfahren. Der gleiche Zusammenhang besteht zwischen der Theorie der Randwertaufgaben der nichtlinearen Differentialgleichungen und der nichtlinearen Integralgleichungen und läßt es berechtigt erscheinen, Gleichungen von der Gestalt

$$\psi(s) + \int_B K(s,t)\, f(t, \psi(t))\, dt = 0 \tag{1}$$

zu studieren. Dabei bedeutet B einen ein- oder mehrdimensionalen schlichten ganz im Endlichen gelegenen Bereich; s, t sind Punkte darin.

*) Dissertation der Philosophischen Fakultät Berlin.

$K(s, t)$ ist ein für alle s, t in B erklärter Kern, $f(s, u)$ eine für alle s in B und alle reellen Werte von u erklärte Funktion. $\psi(s)$ soll so bestimmt werden, daß (1) identisch in s erfüllt ist.

Hammerstein hat als erster Existenz- und Eindeutigkeitssätze von allgemeinerem Charakter für die Lösungen der Gleichungen (1) aufgestellt[1]). Schon vorher wurden allgemeingültige Aussagen über nichtlineare Integralgleichungen von E. Schmidt gemacht[2]). Diese behandeln aber nur Existenz- und Eindeutigkeitsprobleme „im Kleinen", d. h. von einer bereits bekannten Lösung der Gleichung (1) ausgehend wird untersucht, wie viele Lösungen bei geringer Abänderung der Funktion $f(s, u)$ in der Nachbarschaft der Ausgangslösung liegen.

Setzt man über den Kern nur so viel voraus, daß auch die Greensche Funktion mit einbegriffen wird, nämlich, daß er brauchbar unstetig (im Sinne der linearen Integralgleichungen), symmetrisch und positiv definit ist, so muß man annehmen, daß $f(s, u)$ von beschränkter Ableitung in u ist, um über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (1) nach den Sätzen von Hammerstein etwas aussagen zu können. Die Beweismethode, die dabei verwandt wird, besteht darin, daß die Integralgleichung zurückgeführt wird auf ein System von unendlich vielen nichtlinearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, das durch endliche Gleichungssysteme approximiert wird. Diese werden als die notwendigen Extremumsbedingungen eines endlichen Extremumproblems erkannt und ihre Lösbarkeit damit nach dem Weierstraßschen Satz über die Extrema einer stetigen Funktion sichergestellt.

Die vorliegende Arbeit verwendet eine Methode, die sich der von Hammerstein darin anschließt, daß sie die nichtlineare Integralgleichung durch endliche Gleichungssysteme approximiert. Diese werden aber mit Hilfe eines gewöhnlichen Iterationsverfahrens gelöst und damit führt diese Methode nicht nur zu einem rein theoretischen Existentialbeweis, sondern liefert auch ein konstruktives Auflösungsverfahren (§ 1).

Sie benutzt ferner nicht die Symmetrie und Definitheit des Kernes und läßt sich auf Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen und damit auf die Randwertaufgabe der allgemeinen nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung

$$\Delta u = F(x, y, u, u'_x, u'_y),$$

---

[1]) Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta math. **54**, S. 117 u. f.

[2]) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen III. Math. Annalen **65**, S. 370 u. f.

wo also rechts noch die ersten Ableitungen der Funktion $u(x, y)$ auftreten, anwenden (§ 3).

Auch ein Eindeutigkeitssatz kann für solche Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen, bei denen die Funktionen, die die Unbekannten enthalten, gewisse Lipschitzbedingungen erfüllen, bewiesen werden. Dies ist jedoch nicht mehr möglich, wenn man von diesen Funktionen nur voraussetzt, daß sie nicht stärker wachsen als lineare. Für diesen Fall kann aber noch mit Hilfe topologischer Methoden die Existenz einer Lösung bewiesen werden (§ 2). Dieselben Methoden gestatten es, die Existenz- und Eindeutigkeitssätze auch auf allgemeinere Funktionalgleichungen von nichtlinearem Charakter zu übertragen (§ 4).

Die Frage, ob neben einer reellen Lösung $\psi_1(s)$ eine weitere reelle Lösung $\psi_2(s)$ von (1) existiert, führt zur Untersuchung der Existenz reeller nicht identisch verschwindender Lösungen der Gleichung

$$\psi(s) + \int_B K(s, t)\, g(t, \psi(t))\, dt = 0, \tag{2}$$

wo

$$g(s, u) = f(s, \psi_1(s) + u) - f(s, \psi_1(s))$$

gesetzt ist. Denn (2) ist die Gleichung für die Differenz $\psi = \psi_2 - \psi_1$. Statt der Gleichung (2), die gewiß nicht immer eine nicht identisch verschwindende Lösung hat, [sonst wären Eindeutigkeitssätze für die Gleichung (1) nicht möglich] betrachten wir die mit einem Parameter versehene Gleichung

$$\lambda\, \psi(s) + \int_B K(s, t)\, g(t, \psi(t))\, dt = 0 \tag{3}$$

und fragen nach der Existenz solcher λ-Werte, für die diese Gleichung nicht identisch verschwindende Lösungen besitzt (II. Abschnitt). Auch in diesem Falle führt die Approximation durch endliche Gleichungssysteme zu einem Existenzsatz. Unter geeigneten Voraussetzungen über $K(s, t)$ und $g(s, u)$, die nur allgemeine Stetigkeitsforderungen (keine Wachstumsbedingungen) enthalten, gibt es immer mindestens einen reellen λ-Wert, für den die Gleichung (3) eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt (§ 5). Ein ähnlicher Satz ist bereits von L. Lichtenstein, der als erster dieses Problem behandelte, von anderem Ausgangspunkt und mit anderen Methoden bewiesen worden[3]). Der gleiche Satz kann auch durch direkte Auflösung eines Variationsproblems bewiesen werden, eine Methode, die diesen Satz auch für allgemeinere Funktionalgleichungen ähnlichen Charakters zu beweisen gestattet (§§ 6, 7).

[3]) L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen. (Berlin 1931), S. 141 u. f.

I. Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

§ 1.

Eindeutige Lösungen.

Satz 1. In dem nichtlinearen Integralgleichungssystem [4])

$$(4)\quad \psi_i(s) + \int_B K_i(s,t)\, f_i(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

seien die $K_i(s,t)$ brauchbar unstetige Kerne und die $f_i(s, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ für alle dem Bereich B angehörigen Punkte s und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$ stetige Funktionen, die den Lipschitzbedingungen

$$(5a)\quad [f_i(s, u_1, \ldots, u_n) - f_i(s, v_1, \ldots, v_n)]^2 \leqq k_i^2 [(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2]$$

genügen, wobei die k_i von s, u_1, v_1, $\ldots$, u_n, v_n unabhängige positive Zahlen sind, für die

$$(5b)\quad \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = k^2 < \lambda_1^2$$

ist. Dabei ist λ_1 der kleinste der Eigenwerte der Kerne

$$\overline{K}_i(s,t) = \int_B K_i(s,r)\, K_i(t,r)\, dr.$$

Dann gibt es genau n in B stetige Funktionen $\psi_i(s)$, die die Gleichungen (4) identisch in s erfüllen [5]).

1. Existenzbeweis.

$p_{i1}(s)$, $p_{i2}(s)$, $\ldots$; $q_{i1}(s)$, $q_{i2}(s)$, $\ldots$

seien das E. Schmidtsche „vollständige normierte Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes“ $K_i(s,t)$, $0 < \lambda_{i1} \leqq \lambda_{i2} \leqq \ldots$ die zugehörigen Eigenwerte, die ja positiv angenommen werden dürfen [6]).

---

[4]) Das Gleichungssystem

$$G_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)) + \int_B K_i(s,t)\, F_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

läßt sich durch eine Substitution auf die Form (4) bringen, wenn das gewöhnliche System

$$G_i(s, u_1, \ldots, u_n) = v_i$$

für beliebige $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Lösung hat; vgl. Hammerstein, loc. cit. 1, S. 118. Das System (4) läßt sich nicht durch „Aneinanderfügen der Kerne“ auf eine einzige Integralgleichung zurückführen, wie das bei linearen Integralgleichungen der Fall ist. Diese Reduktion beruht wesentlich auf der Additivität linearer Funktionalausdrücke.

[5]) Unter Lösungen sind im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, immer reelle Lösungen zu verstehen. Ebenso sind alle vorkommenden Funktionen $K_i(s,t)$, f_i usw. als reelle anzusehen.

[6]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I. Math. Annalen, S. 461 u. f.

Mit Hilfe eines einfachen Iterationsverfahrens erkennt man, daß das Gleichungssystem

$$(6) \quad c_{i\varrho} + \frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{1\sigma} p_{1\sigma}(t), \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{n\sigma} p_{n\sigma}(t)\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \varrho = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

für jede natürliche Zahl N Lösungen besitzt. Sind nämlich ${}^0c_{1\varrho}, \ldots, {}^0c_{n\varrho}$ $n \cdot N$ beliebige reelle Zahlen, so werden die Systeme ${}^\varkappa c_{i\varrho}$ für alle natürlichen Zahlen $\varkappa$ sukzessive durch folgende Gleichungen definiert:

$$(7) \quad {}^\varkappa c_{i\varrho} = -\frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{1\sigma} p_{1\sigma}, \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{n\sigma} p_{n\sigma}\Big) q_{i\varrho}\, dt \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Mit Hilfe der Besselschen Ungleichung ergibt sich dann:

$$\sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho}^2 ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq \int_B \Big[f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^\varkappa c_{1\sigma} p_{1\sigma}, \ldots\Big) - f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{1\sigma} p_{1\sigma}, \ldots\Big)\Big]^2 dt.$$

Berücksichtigt man (5a), so erhält man

$$\sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho}^2 ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq k_i^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{\sigma\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{\sigma\varrho})^2.$$

Beachtet man noch, daß $\lambda_{i\varrho} \geqq \lambda_1$, so erhält man durch Summation über i nach (5b)

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq \frac{k^2}{\lambda_1^2} \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{\sigma\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{\sigma\varrho})^2.$$

Mit den Bezeichnungen $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho})^2 = {}^\varkappa C^2$ und $\frac{k}{\lambda_1} = \alpha$ schreibt sich (8)

$${}^{\varkappa+1}C \leqq \alpha \cdot {}^\varkappa C.$$

Wegen $\alpha < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} {}^\varkappa C$. Da nun $|{}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho}| \leqq {}^\varkappa C$ ist, konvergieren die Reihen $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} ({}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho})$ absolut, es existieren also die Grenzwerte

$$c_{i\varrho} = \lim_{\varkappa \to \infty} {}^\varkappa c_{i\varrho}$$

und aus (7) ergibt sich, daß diese $n \cdot N$ Zahlen Lösungen des Systems (6) sind. Für jede natürliche Zahl N kann also eine Lösung dieses Systems bestimmt werden. Mit Hilfe der Besselschen Ungleichung entnimmt man (6) die Abschätzung

$$(9) \quad \sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho} c_{i\varrho})^2 \leqq \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{1\sigma} p_{1\sigma}(t), \ldots\Big)^2 dt.$$

Aus der Voraussetzung (5a) erkennt man leicht, daß es zu jeder positiven Zahl ε eine Konstante $a = a(\varepsilon)$ gibt, derart, daß für alle Punkte s in B und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$(10) \quad f_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq a + (k_i^2 + \varepsilon)(u_1^2 + \ldots + u_n^2)$$

wird. Dies ergibt zusammen mit (9)

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho})^2 \leqq a \int_B dt + (k_i^2 + \varepsilon) \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} c_{\sigma\varrho}^2. \tag{11}$$

Ist ε so klein gewählt, daß $\sum_{i=1}^{n} (k_i^2 + \varepsilon) = k^2 + n\varepsilon < \lambda_1^2$ wird, so erhält man aus der letzten Ungleichung durch Summation über i

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^2 \leqq \frac{n a \int_B dt}{1 - \frac{k^2 + n\varepsilon}{\lambda_1^2}} = C, \tag{12}$$

wo C eine von N unabhängige Zahl ist. Die Ungleichung (11) lehrt dann, daß auch für die Summen $\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho})^2$ eine von N unabhängige obere Schranke existiert. Daraus fließt nun der ausgesprochene Existenzsatz, denn es gilt folgendes

Lemma: Hat das „approximierende" Gleichungssystem (6) für eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen N Lösungen $c_{i\varrho}^{(N)}$ und gibt es eine von N unabhängige Zahl C_1, so daß für alle Zahlen N der Folge

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho}^{(N)})^2 \leqq C_1^2 \tag{13}$$

ist, so gibt es n stetige Funktionen $\psi_1(s), \ldots, \psi_n(s)$, die das Integralgleichungssystem (4) identisch in s erfüllen[7]).

---

[7]) Es gilt auch folgende Umkehrung dieses Lemmas: Ist $\Psi_1(s), \Psi_2(s), \ldots, \Psi_n(s)$ ein Lösungssystem von (4) und hat das lineare System

$$\psi_i(s) + \int_B K_i(s, t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} (t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, \psi_k(t)\, dt = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

keine Nullösungen $\psi_i(s)$, so gibt es zwei Zahlen N_1 und C_1, so daß für jedes $N > N_1$ das Gleichungssystem (6) reelle Lösungen $c_{i\varrho}^{(N)}$ besitzt, für die die Ungleichung (13) gilt. Man beweist dies mit Hilfe der E. Schmidtschen Theorie über die Lösbarkeit von nichtlinearen Integralgleichungen im Kleinen, vgl. loc. cit. 2. Es gilt nur zu beachten, daß das Gleichungssystem (6) äquivalent ist mit dem System

$$\psi_i^{(N)}(s) + \int_B (K_i(s, t) - \varepsilon_i^{(N)}(s, t))\, f_i(t, \psi_1^{(N)}, \ldots, \psi_n^{(N)})\, dt = 0,$$

wo

$$\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)}\, p_{i\varrho}(s) \quad \text{und} \quad \varepsilon_i^{(N)}(s, t) = K_i(s, t) - \sum_{\varrho=1}^{N} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}}$$

gesetzt ist, und daß $\int_B \varepsilon_i^{(N)}(s, t)^2\, dt$ gleichmäßig in s gegen 0 konvergiert.

Zum Beweise erkläre man für alle Zahlen N der Folge die Funktionen

$$\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)} p_{i\varrho}(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Aus dem Entwicklungssatz für quellenmäßig dargestellte Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} R_i^{(N)}(s) &= \psi_i^{(N)}(s) + \int_B K_i(s,t) f_i(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t))\, dt \\ &= \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t))\, q_{i\varrho}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Schwarzsche und Besselsche Ungleichung liefern also

$$|R_i^{(N)}(s)| \leqq \left\{ \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \int_B f_i^2\, dt \right\}^{1/2}. \tag{16}$$

Aus der Voraussetzung (13) folgt nun die gleichmäßige Beschränktheit der $\psi_i^{(N)}(s)$; denn aus

$$\begin{aligned} |\psi_i^{(N)}(s)| = \left| \sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)} \frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \right| &\leqq \left\{ \sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)})^2 \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\leqq C_1 \left\{ \sum_{\varrho=1}^{N} \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

ergibt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{\varrho=1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2$ die Existenz einer von N unabhängigen Zahl C_2, für die

$$|\psi_i^{(N)}(s)| \leqq C_2 \tag{17}$$

ist. Beachtet man noch die Stetigkeit der Funktionen f_i, so zeigt (16) also, daß die Reste $R_i^{(N)}(s)$ gleichmäßig für alle s in B gegen 0 konvergieren.

Die Funktionenfolgen

$$\omega_i^{(N)}(s) = \int_B K_i(s,t) f_i(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t))\, dt$$

sind gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig in B. Das ergibt die Schwarzsche Ungleichung, wenn man (17) und die Stetigkeit der iterierten Kerne beachtet. Es gibt also eine Teilfolge $\omega_i^{(N^*)}$ dieser Funktionen, die gleichmäßig für alle s in B gegen stetige Grenzfunktionen konvergieren. Dann müssen, wie aus der gleichmäßigen Konvergenz der $R_i^{(N)}(s)$ gegen Null folgt, auch die $\psi_i^{(N^*)}(s)$ gleichmäßig gegen stetige Grenzfunktionen $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, …, $\psi_n(s)$ konvergieren, die Lösungen des Gleichungssystems (4) sind.

2. Eindeutigkeitsbeweis.

Das Gleichungssystem (4) möge zwei Lösungssysteme haben: $\psi_i^{(1)}(s)$ und $\psi_i^{(2)}(s)$. Setzt man

(18) $$\Psi_i(s) = \psi_i^{(2)}(s) - \psi_i^{(1)}(s) \quad \text{und}$$

$$f_i(s, \psi_1^{(1)} + u_1, \ldots, \psi_n^{(1)} + u_n) - f_i(s, \psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}) = F_i(s, u_1, \ldots, u_n),$$

so erhält man durch Subtraktion der beiden für $\psi_i^{(1)}$ und $\psi_i^{(2)}$ aufgeschriebenen Gleichungen

(19) $$\Psi_i(s) + \int_B K_i(s, t) F_i(t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, dt = 0.$$

Das Gleichungssystem (4) hat also dann und nur dann eine von $\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}$ verschiedene Lösung, wenn das Gleichungssystem (19) ein von $\Psi_1(s) = \Psi_2(s) = \ldots = \Psi_n(s) = 0$ (für alle s in B) verschiedenes Lösungssystem besitzt.

Wenn es ein Lösungssystem $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ von (19) gibt, so läßt es sich durch die gleichmäßig konvergenten Reihen $\Psi_i(s) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{i\varrho}\, p_{i\varrho}(s)$ darstellen. Die Fourier-Koeffizienten $C_{i\varrho}$ haben dabei nach (19) die Gestalt

(20) $$C_{i\varrho} = -\frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B F_i(t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, q_{i\varrho}(t)\, dt \quad (\varrho = 1, 2, \ldots).$$

Es ist also nach der Besselschen Ungleichung

(21) $$\sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq \int_B F_i(t, \Psi_1, \ldots, \Psi_n)^2\, dt.$$

Aus der Voraussetzung (5a) folgt

$$F_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq k_i^2 (u_1^2 + \ldots + u_n^2).$$

Somit ist wegen (21)

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq k_i^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{\sigma\varrho}^2$$

und durch Summation über i erhält man daraus

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq k^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{\sigma\varrho}^2.$$

Das ist wegen $k^2 < \lambda_1^2 \leqq \lambda_{i1}^2 \leqq \lambda_{i2}^2 \leqq \ldots$ nur möglich, wenn alle Fourier-Koeffizienten $C_{i\varrho}$ verschwinden, die Funktionen $\Psi_1(s), \ldots, \Psi_n(s)$ also identisch Null sind. Dieser Eindeutigkeitssatz ergibt auch, daß jedes der Systeme (6) genau ein Lösungssystem besitzt; denn die $c_{i\varrho}^{(N)}$ sind die Fourier-Koeffizienten sämtlicher Lösungen des Systems

$$\psi_i(s) + \int_B \Big(\sum_{\varrho=1}^{N} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}} \Big) f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0.$$

Da für dieses System die Voraussetzungen (5a) und (5b) erfüllt sind, besitzt es genau ein Lösungssystem $\psi_i^{(N)}(s)$; die Fourier-Koeffizienten dieser Lösungsfunktion in der Entwicklung $\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)} p_{i\varrho}(s)$ sind daher eindeutig bestimmt.

Ohne Beweis sei hier noch angeführt:

Zusatz zu Satz 1: Der Satz 1 bleibt gültig, wenn statt (5b) die etwas weniger einschränkende Voraussetzung

$$\frac{k_1^2}{\lambda_{11}^2} + \frac{k_2^2}{\lambda_{21}^2} + \ldots + \frac{k_n^2}{\lambda_{n1}^2} < 1 \tag{5b'}$$

erfüllt ist.

Die Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ mögen nun die Lipschitzbedingungen (5a) erfüllen, die zweite Voraussetzung (5b) sei aber verletzt. Dann gilt der

Satz 2: Genügen die stetigen Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ den Lipschitzbedingungen (5a), so ist die Anzahl der Lösungen des nichtlinearen Integralgleichungssystems (4) gleich der Anzahl der Lösungen eines endlichen transzendenten Gleichungssystems.

Beweis: Laut bekannten Eigenschaften der Eigenwerte kann man Indizes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ finden, für die

$$\lambda_{i m_i} \leqq k < \lambda_{i m_i + 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, wo k die in (5a) genannte Zahl ist[8]). [λ_{i0} ist dabei gleich Null zu setzen].

Setzt man nun

$$K_i^{(m_i)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{\varrho=1}^{m_i} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}},$$

so hat nach Satz 1 das Gleichungssystem

$$\Psi_i(s) + \int_B K_i^{(m_i)}(s, t) f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{m_1} a_{1\sigma} p_{1\sigma}(t) + \Psi_1(t), \ldots\Big) dt = 0 \tag{22}$$

bei beliebiger Wahl der Konstanten $a_{i\varrho}$ genau ein Lösungssystem $\Psi_1(s) = \Psi_1(s, a_1, \ldots, a_n), \ldots, \Psi_n(s) = \Psi_n(s, a_1, \ldots, a_n)$. Jedes Lösungssystem $a_{i\varrho}$ der $n \cdot (m_1 + \ldots + m_n)$ transzendenten Gleichungen

$$a_{i\varrho} + \frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{m_1} a_{1\sigma} p_{1\sigma}(t) + \Psi_1(t, a_1, \ldots, a_n), \ldots\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt = 0 \tag{23}$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, m_i)$$

[8]) Haben einige der Kerne $K_i(s, t)$ nur endlich viele Eigenwerte, so haben die entsprechenden Unbekannten $\psi_i(s)$ nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten $c_{i\varrho}$. Für solche Kerne gilt also der Satz 2.

führt, wie man durch Multiplikation mit $p_{i\varrho}(s)$ und Addition zu (22) unmittelbar erkennt, auf eine Lösung von (4). Zu verschiedenen Wertesystemen $a_{i\varrho}$ gehören verschiedene Lösungen ψ_i von (4). Umgekehrt gehört zu jedem Lösungssystem ψ_i von (4) genau ein Lösungssystem von (22) und (23), da die $a_{i\varrho}$ die ersten Fourier-Koeffizienten der ψ_i sind und die Funktionen Ψ_i erhalten werden durch

$$\Psi_i(s) = \psi_i(s) - \sum_{\varrho=1}^{m_i} a_{i\varrho}\, p_{i\varrho}(s).$$

Da das Gleichungssystem (22) nur eine Lösung besitzt, gehören zu verschiedenen Systemen ψ_i auch verschiedene Systeme $a_{i\varrho}$.

Unter den Voraussetzungen (5a) und (5b) ist das Gleichungssystem (4) eindeutig lösbar. Unser Existenzbeweis verlangte jedoch die Auswahl einer konvergenten Teilfolge aus der Folge der Näherungslösungen. Eine solche Auswahl ist jedoch nicht nötig, vielmehr strebt die Folge der Näherungslösungen als ganze gegen das Lösungssystem $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Eine leichte Rechnung, die ebenso geführt wird, wie im Falle einer Gleichung mit einer Unbekannten (s. Hammerstein, loc. cit. 1, S. 153) zeigt nämlich, daß es zwei von s und N unabhängige Konstante M_1 und M_2 gibt, so daß der Unterschied zwischen der eindeutig bestimmten Lösung von (4) und der Näherung abgeschätzt wird durch

$$\sum_{i=1}^{n} |\psi_i(s) - \psi_i^{(N)}(s)| \leqq M_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \right)^2 \right\}^{1/2} + \frac{M_2}{\lambda_{N+1}}.$$

Dabei ist $\lambda_N = \operatorname{Min}(\lambda_{1N}, \lambda_{2N}, \ldots, \lambda_{nN})$ gesetzt. Insbesondere ergibt sich daraus, daß die $\psi_i^{(N)}(s)$ gleichmäßig für alle s in B gegen die $\psi_i(s)$ konvergieren.

§ 2.

Funktionen, die nicht stärker wachsen als lineare.

Satz 3. In dem Gleichungssystem

$$\psi_i(s) + \int_B K_i(s,t)\, f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

seien die $K_i(s,t)$ brauchbar unstetige Kerne und die stetigen Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ mögen den Bedingungen

$$|f_i(s, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + k_{i1}|u_1| + k_{i2}|u_2| + \ldots + k_{in}|u_n| \tag{24a}$$

genügen, wobei die k_{i1} von $s, u_1, \ldots, u_n$ unabhängige positive Zahlen sind, für die

$$(k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2)(M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2) < 1 \tag{24b}$$

ist. (Dabei ist

$$M_i^2 = \int_B \int_B K_i(s,t)^2\, ds\, dt$$

gesetzt.) Dann gibt es n in B stetige Funktionen $\psi_i(s)$, die die Gleichungen (4) identisch in s erfüllen.

Beweis: Für die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Kerne $K_i(s,t)$ seien die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung folgert man aus der Voraussetzung (24a), daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $a_1 = a_1(\varepsilon)$ gibt, so daß für s in B und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$f_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq a_1 + (k_{i1}^2 + \ldots + k_{in}^2 + \varepsilon)(u_1^2 + \ldots + u_n^2)$$

wird. Man wähle ε so klein, daß

$$k_i^2 = k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2 + \varepsilon < \frac{1}{M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2}$$

ausfällt, dann ist für jedes System von reellen Zahlen $d_{i\varrho}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $\varrho = 1, 2, \ldots, N)$, die den Ungleichungen $|d_{i\varrho}| \leqq d$ genügen,

$$(25)\quad \int_B \Big[f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma}\frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{n\sigma}\frac{p_{n\sigma}}{\lambda_{n\sigma}}\Big)\Big]^2 dt \leqq a_1 \int_B dt + k_i^2 \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{N}\Big(\frac{d_{\nu\sigma}}{\lambda_{\nu\sigma}}\Big)^2$$

$$\leqq a_2 + d^2 k_i^2 (M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2).$$

Somit wird nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\Big| \int f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma}\frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt \Big| \leqq \Big\{ \int_B f_i^2\, dt \Big\}^{1/2}$$

$$\leqq d\, k_i \sqrt{M_1^2 + \ldots + M_n^2}\Big(1 + \frac{a_2}{d^2 k_i^2 (M_1^2 + \ldots + M_n^2)}\Big)^{1/2}.$$

Wegen $k_i^2 (M_1^2 + \ldots + M_n^2) < 1$ kann man also d unabhängig von i und N so groß wählen, daß die linke Seite der letzten Ungleichung kleiner als d ausfällt. Somit sind die in den $d_{i\varrho}$ stetigen $n \cdot N$ Funktionen

$$(26)\qquad D_{i\varrho} = d_{i\varrho} + \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma}\frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt$$

positiv für $\quad d_{i\varrho} = d, \quad |d_{k\sigma}| \leqq d \qquad (k, \sigma \neq i, \varrho),$

negativ für $\quad d_{i\varrho} = -d, \quad |d_{k\sigma}| \leqq d \qquad (k, \sigma \neq i, \varrho).$

Daraus folgt, z. B. nach dem Brouwerschen Verschiebungssatze[9]), daß das Gleichungssystem $D_{i\varrho} = 0$ mindestens ein reelles Lösungssystem $d_{i\varrho}$ besitzt. Setzt man $d_{i\varrho} = \lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)}$ in (26) ein, so erkennt man, daß das

[9]) Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. Math. Annalen 70, S. 161—165.

Gleichungssystem $D_{i\varrho} = 0$ identisch wird mit dem approximierenden System (6). Dieses besitzt also auch unter der Voraussetzung (24) für jede natürliche Zahl N eine Lösung. Die Besselsche Ungleichung und Abschätzung (25) liefern:

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho}^{(N)})^2 = \sum_{\varrho=1}^{N} d_{i\varrho}^2 \leqq \int_B f_i\Big(t,\ \sum_{\sigma=1}^{N} c_{1\sigma}^{(N)} p_{1\sigma}(t),\ \ldots\Big)^2 dt \leqq a_2 + d^2.$$

Es sind also alle Voraussetzungen des Lemmas in § 1 erfüllt, woraus die Richtigkeit des behaupteten Satzes folgt.

Daß die Voraussetzung (24) nicht genügt, um die Eindeutigkeit der Lösung zu beweisen, ist klar. Selbst wenn alle Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ in sämtlichen Variabeln beschränkt sind, ist das System (4) im allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Das sieht man am leichtesten folgendermaßen ein: Sei $n = 1$, $g(s, u)$ eine beschränkte Funktion, $g(s, 0) = 0$ und λ eine beliebige reelle Konstante. Dann hat die Gleichung

$$\psi(s) + \lambda \int_B K(s, t)\, g(t, \psi(t))\, dt = 0$$

gewiß die Lösung $\psi(s) \equiv 0$. Im Abschnitt II wird aber bewiesen werden, daß diese Gleichung für mindestens einen reellen Parameterwert λ_0 eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, wenn der Kern gewisse Voraussetzungen erfüllt. Wählt man also die beschränkte Funktion $f(s, u) = \lambda_0 g(s, u)$, so ist die Gleichung

$$\psi(s) + \int_B K(s, t)\, f(t, \psi(t))\, dt = 0$$

gewiß nicht eindeutig lösbar.

Ist die Voraussetzung (24a) erfüllt, (24b) aber verletzt, so kann man ebenso verfahren wie im Beweise zu Satz 2. Es gibt Indizes $m_1, m_2, \ldots, m_n$, so daß

$$k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2 < \frac{1}{\sum_{\varrho=m_1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{1\varrho}^2} + \ldots + \sum_{\varrho=m_n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n\varrho}^2}}$$

wird. Ebenso wie in § 1 wird dann bewiesen, daß alle Lösungen ψ_i des Systems (4) dadurch gewonnen werden, daß man zu jeder Lösung Ψ_i von (22) die Lösungen $a_{i\varrho}$ des endlichen transzendenten Gleichungssystems (23) bestimmt.

§ 3.

Anwendung auf die nichtlineare Randwertaufgabe.

Satz 4. Das beschränkte Gebiet B der x, y-Ebene und die auf seinem Rande definierte stetige Funktion $f(s)$ seien so beschaffen, daß

für sie die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie eindeutig lösbar ist. $G(x, y; \xi, \eta)$ sei die zu B gehörige Greensche Funktion, $F(x, y, u, u_1, u_2)$ eine für x, y in B und alle reellen Werte von u, u_1, u_2 stetige Funktion.

Dann hat die nichtlineare Differentialgleichung

$$\Delta u = F(x, y, u, u'_x, u'_y) \tag{27}$$

eine Lösung, die auf dem Rande von B die Werte $f(s)$ annimmt, wenn eine der beiden folgenden Voraussetzungen über F erfüllt ist:

Für x, y, in B und für alle reellen Werte der u, u_1, u_2 ist

α)

$$|F(x, y, u, u_1, u_2)| \leqq a + k|u| + k_1|u_1| + k_2|u_2| \tag{28a}$$

und

$$(k^2 + k_1^2 + k_2^2)(M^2 + M_1^2 + M_2^2) < 1 \tag{28b}$$

oder β)

$$[F(x, y, u, u_1, u_2) - F(x, y, v, v_1, v_2)]^2 \leqq k^2[(u-v)^2 + (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2] \tag{29a}$$

und

$$k^2(M^2 + M_1^2 + M_2^2) < 1. \tag{29b}$$

(Dabei ist

$$M^2 = \iint_B \iint_B G\ (x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

$$M_1^2 = \iint_B \iint_B G'_x(x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

$$M_2^2 = \iint_B \iint_B G'_y(x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta$$

gesetzt.) Im Falle β) hat die Aufgabe eine und nur eine Lösung.

Ist Voraussetzung (28a) oder (29a) erfüllt, (28b) bzw. (29b) dagegen nicht, so ist die Anzahl der Lösungen im Falle α) nicht kleiner, im Falle β) genau gleich der Anzahl der Lösungen eines endlichen transzendenten Gleichungssystems.

Beweis: Ist $f(x, y)$ eine in B stetige Funktion, so läßt sich die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta v &= f(x, y) && \text{in } B \\ v &= 0 && \text{auf dem Rande von } B \end{aligned} \tag{30}$$

in der Form

$$v(x, y) = -\iint_B G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{31}$$

schreiben und es ist nach bekannten Formeln

$$(31)\qquad \begin{aligned} v'_x(x, y) &= -\iint_B G'_x(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ v'_y(x, y) &= -\iint_B G'_y(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgen aus den Gleichungen (31) die Gleichungen (30). Ist $u_0(x, y)$ die Potentialfunktion, die auf dem Rande von B die Werte $f(s)$ annimmt, so ist die Randwertaufgabe (27) äquivalent mit dem System von nichtlinearen Integralgleichungen für die gesuchten Funktionen $u(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$:

$$(32)\qquad \begin{aligned} u(x, y) &+ \iint_B G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta;\ u(\xi, \eta) + u_0(\xi, \eta),\ u_1 + u'_{0x}, \\ &\qquad u_2 + u'_{0y})\, d\xi\, d\eta = 0, \\ u_1(x, y) &+ \iint_B G'_x F\, d\xi\, d\eta = 0, \\ u_2(x, y) &+ \iint_B G'_y F\, d\xi\, d\eta = 0; \end{aligned}$$

denn $U(x, y) = u(x, y) + u_0(x, y)$ mit den Ableitungen $U'_x = u_1(x, y) + u'_{0x}(x, y)$, $U'_y = u_2 + u'_{0y}$ befriedigt die Gleichung (27) und nimmt am Rande die Werte $f(s)$ an. Nach Satz 3 und Zusatz zu Satz 1 ist das System (32) lösbar, wenn die Bedingungen (28) oder (29) erfüllt sind, in letzterem Falle eindeutig lösbar. Das endliche transzendente Gleichungssystem, das die Entscheidung über die Lösungsanzahl liefert, wenn (28b) oder (29b) nicht erfüllt ist, ist nach den Ausführungen im Beweis zu Satz 2 leicht abzuleiten.

Für einseitig beschränkte Funktionen F können die Voraussetzungen (28) noch verallgemeinert werden. Wir beschränken uns dabei auf die Randbedingungen $f(s) = 0$ am ganzen Rande, auf die die allgemeine erste Randwertaufgabe zurückgeführt werden kann, dadurch, daß man von der gesuchten Funktion die Potentialfunktion subtrahiert, die am Rande die vorgeschriebenen Randwerte annimmt. Mit Hilfe des Satzes 4 beweist man dann den

Zusatz zu Satz 4: Die Gleichung (27) hat eine am Rande verschwindende reelle Lösung, wenn eine der folgenden vier Voraussetzungen erfüllt ist:

Für x, y in B und alle reellen Werte von u_1, u_2 ist:

$\alpha)$ $\quad 0 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) \leqq a_1 - ku + k_1|u_1| + k_2|u_2|$ für $u \leqq 0$;

$\beta)$ $\quad 0 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) \geqq -a_1 - ku - k_1|u_1| - k_2|u_2|$, $u \geqq 0$;

$$\gamma)\begin{cases} -a_2 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) & ,, \quad u \geqq 0, \\ -a_2 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) \leqq a_1 - k u + k_1 |u_1| + k_2 |u_2| & ,, \quad u \leqq 0; \end{cases}$$

$$\delta)\begin{cases} a_2 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) \geqq -a_1 - k u - k_1 |u_1| - k_2 |u_2| & ,, \quad u \geqq 0, \\ a_2 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) & ,, \quad u \leqq 0. \end{cases}$$

a_1, a_2 sind dabei beliebige positive Konstanten; die positiven Konstanten k, k_1, k_2 genügen (28b).

Beweis: Der Beweis wird unter den Voraussetzungen $\alpha)$ und $\gamma)$ geführt, für $\beta)$ und $\delta)$ verläuft er ebenso. Zum Beweise der ersten Behauptung setze man:

$$\bar{F}(x, y, u, u_1, u_2) = \begin{cases} F(x, y, u, u_1, u_2) & \text{für } u \leqq 0, \\ F(x, y, 0, u_1, u_2) & \text{für } u \geqq 0. \end{cases}$$

Dann genügt $\bar{F}$ den Voraussetzungen des Satzes 4, und es ist durchweg $\bar{F} \geqq 0$; somit gibt es eine Lösung von

$$\Delta \bar{u} = \bar{F}(x, y, \bar{u}, \bar{u}'_x, \bar{u}'_y),$$

die auf dem Rande von B verschwindet. Aus $\bar{F} \geqq 0$ folgt, wie bekannt ist, $\bar{u}(x, y) \leqq 0$ für x, y in B. Da für $u \leqq 0$ $\bar{F} = F$ ist, löst $\bar{u}(x, y)$ auch die ursprüngliche Aufgabe.

Zum Beweise der zweiten Behauptung setze man

$$\bar{F}(x, y, u, u_1, u_2) = F(x, y, u + u_0(x, y), u_1 + u'_{0x}(x, y), u_2 + u'_{0y}(x, y)) + a_2.$$

Für jede stetige Funktion $u_0(x, y) \leqq 0$ ist $\bar{F}$ eine Funktion, die der Voraussetzung $\alpha)$ mit anderen Konstanten genügt. Die Gleichung

$$\Delta \bar{u} = \bar{F}(x, y, \bar{u}, \bar{u}'_x, \bar{u}'_y)$$

hat also eine auf dem Rande von B verschwindende Lösung $\bar{u}(x, y)$. Ist nun $u_0(x, y)$ so gewählt, daß

$$\Delta u_0 = a_2 \quad \text{in } B$$
$$u_0 = 0 \quad \text{am Rande von } B,$$

so löst $u(x, y) = \bar{u}(x, y) - u_0(x, y)$ die ursprüngliche Aufgabe.

Dieser Zusatz beweist, daß z. B. die erste Randwertaufgabe für die Gleichung

$$\Delta u = p(x, y, u, u'_x, u'_y)\, e^u$$

eine Lösung besitzt, wenn die für $u \leqq 0$ positive Funktion $p(x, y, u, u_1, u_2)$ in u, u_1, u_2 weniger wächst als eine lineare Funktion.

Der Satz 4 mit seinem Zusatz ist in seiner Gültigkeit natürlich nicht auf die zweidimensionale Randwertaufgabe beschränkt, sondern gilt allgemein für die n-dimensionale erste Randwertaufgabe[10]).

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Voraussetzung (24) in Satz 3 durch analoge Bedingungen wie im Zusatz zu Satz 4 ersetzt werden kann, wenn die Kerne $K_i(s, t)$, oder einige unter ihnen in B durchweg von einerlei Vorzeichen sind.

§ 4.

Allgemeine Funktionalgleichungen.

Die bisher abgeleiteten Existenz- und Eindeutigkeitssätze gelten nicht nur für die behandelten Integral- und Differentialgleichungen, sondern auch für allgemeinere Funktionalgleichungen.

Σ bezeichne das Feld der in dem beschränkten Gebiet B definierten Funktionen $\varphi(s)$, die mit ihren stetigen Ableitungen bis zur n-ten Ordnung unter der absoluten Schranke $N > 0$ liegen. Ist dann

$$\psi(s) = S(s;\ \varphi)$$

eine für s in B und φ in Σ definierte eindeutige Funktionaltransformation, die stetig ist von der n-ten Ordnung[11]) und Σ in einen kompakten Teil Σ' von sich überführt (d. h. jede beschränkte Folge aus Σ' enthält eine nebst ihren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung konvergente Teilfolge), so hat die Gleichung

$$\psi(s) = S(s;\ \psi) \tag{33}$$

mindestens eine Lösung $\psi(s)$ in Σ.

---

[10]) Vgl. A. Hammerstein, Die erste Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges., XXX. Jahrg. — Der Existenzsatz, der dort für die eindimensionale Randwertaufgabe $y'' = f(x, y, y')$, $y(0) = y(\pi) = 0$ bewiesen wird, fordert die Beschränktheit von $f(x, y, y')$ in y', während das nach unserem Satz 4 nicht erforderlich ist. Für Funktionen mit beschränkten Ableitungen wird dort nur die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen, während unser Satz zugleich die Existenz beweist.

[11]) D. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so daß für

$$\operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} (|\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1' - \varphi_2'| + \ldots + |\varphi_1^{(n)} - \varphi_2^{(n)}|) < \delta$$

die Differenz

$$|S(s;\ \varphi_1) - S(s;\ \varphi_2)| < \varepsilon$$

wird für alle s in B. Das Symbol $\varphi^{(i)}$ steht an Stelle aller Ableitungen i-ter Ordnung.

Dieser Fixpunktsatz rührt in dieser Fassung von Caccioppoli her und läßt sich leicht mit Hilfe des analogen für n-dimensionale Räume gültigen Brouwerschen Fixpunktsatzes beweisen[12]).

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die bisher abgeleiteten Existenz- und Eindeutigkeitssätze weitgehend verallgemeinern:

Satz 5: Sei $\psi(s) = S(s; \varphi)$ eine für s in B und φ in Σ definierte eindeutige Funktionaltransformation, die stetig ist in dem Sinne, daß, wenn $\varphi_i(s)$ eine Folge ist, die gleichmäßig in B gegen $\varphi(s)$ konvergiert, die Funktionen $\psi_i(s) = S(s; \varphi_i)$ mit ihren Ableitungen $\psi_i^{(1)}(s), \ldots, \psi_i^{(n)}(s)$ gleichmäßig gegen $\psi(s) = S(s; \varphi)$, bzw. $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(n)}(s)$ konvergieren. Ferner seien für s in B

$$|\psi^{(\nu)}(s)| \leqq A + M \cdot \operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} |\varphi(s)| \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

und die $\psi, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)}$ gleichgradig stetig für gleichmäßig beschränkte φ. Dann hat die Funktionalgleichung

$$u(s) = S[s; F(s, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})] \tag{35}$$

eine in Σ gelegene Lösung $u(s)$, wenn die Funktion $F(s, u, u_1, \ldots, u_n)$ für s in B und alle reellen Werte der $u, u_1, \ldots, u_n$ stetig ist und

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + k|u| + k_1|u_1| + \ldots + k_n|u_n| \tag{36a}$$

ist, wobei die positiven Konstanten $M, k, k_1, \ldots, k_n$ der Bedingung

$$(k + k_1 + \ldots + k_n) M = q < 1 \tag{36b}$$

genügen[13]).

Beweis: Die Transformation

$$\psi(s) = S^*(s; \varphi) = S[s, F(s, \varphi, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})]$$

ist stetig in dem Sinne, daß, wenn $\varphi_i(s), \varphi_i^{(1)}(s), \ldots, \varphi_i^{(n)}(s)$ gleichmäßig in B gegen $\varphi(s), \varphi^{(1)}(s), \ldots, \varphi^{(n)}(s)$ konvergieren, die Funktionen

$$\psi_i(s) = S^*(s; \varphi_i)$$

---

[12]) Caccioppoli, Un teorema generale sull' existenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale. Rend. Acc. Lincei (6) vol. 11, S. 794 u. f. und Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali. Ebenda vol. 13, S. 498 u. f.

[13]) Vgl. Caccioppoli, l. c. Dort wird dieser Satz bewiesen, jedoch nur für Funktionen, die *schwächer* wachsen als lineare, für die also

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{F(s, u, u_1, \ldots, u_n)}{\omega} = 0,$$

wo $\omega = \sqrt{u^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2}$ ist.

gleichmäßig mit ihren Ableitungen $\psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(n)}$ gegen $\psi(s) = S^*(s; \varphi)$ bzw. $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(n)}(s)$ konvergieren. Ferner ist für

$$|\varphi(s)| \leqq N, |\varphi^{(1)}| \leqq N, \ldots, |\varphi^{(n)}| \leqq N$$

nach (34) und (36)

$$|\psi^{(\nu)}(s)| \leqq A + M \operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} |F(s, \varphi, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})|$$

$$\leqq A + M[a + N(k + k_1 + \ldots + k_n)] \leqq A_1 + qN \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Für genügend große N ist also $|\psi| < N$, $|\psi^{(1)}| < N, \ldots, |\psi^{(n)}| < N$. Außerdem ist jede Folge $\psi_i, \psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(n)}$ gleichgradig stetig nach Voraussetzung, also wegen der gleichmäßigen Beschränktheit kompakt. Die Transformation S^* erfüllt somit die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes, es gibt also eine in Σ gelegene Lösung der Gleichung

$$u(s) = S^*(s; u) = S(s; F(s, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})).$$

Ist insbesondere $S(s; \varphi) = A(s) + T(s; \varphi)$, wo $T(s; \varphi)$ homogen linear in φ ist, so gelingt es auch, den Eindeutigkeitssatz zu übertragen. Dieser Fall ist der für die Anwendungen allein wichtige.

Satz 6. Ist das in Satz 5 definierte Funktional

$$S(s; \varphi) = A(s) + T(s; \varphi),$$

wo $A(s)$ von φ unabhängig ist und $T(s; \varphi)$ homogen linear in φ ist, so hat die Gleichung

$$u(s) = S[s; F(s, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})] \tag{35}$$

genau eine Lösung in Σ, wenn $F(s, u, u_1, \ldots, u_n)$ die Lipschitzbedingungen

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n) - F(s, v, v_1, \ldots, v_n)| \leqq k|u - v| + k_1|u_1 - v_1| + \ldots + k_n|u_n - v_n| \tag{37a}$$

erfüllt und die positiven Konstanten k_ν der Bedingung

$$(k + k_1 + \ldots + k_n) M = q < 1 \tag{37b}$$

genügen.

Beweis: Aus der Voraussetzung (37a) ergibt sich sofort, daß

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + k|u| + k_1|u_1| + \ldots + k_n|u_n|$$

ist mit der Konstanten $a = \operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} |F(s, 0, 0, \ldots, 0)|$. Wegen (37b) genügt also F den Voraussetzungen des Satzes 5, die Gleichung (35) hat also mindestens eine Lösung $u_1(s)$ in Σ. Sei $u_2(s)$ eine weitere Lösung in Σ, dann ist

$$\begin{aligned} u_2(s) - u_1(s) &= T[s; F(s, u_2, u_2^{(1)}, \ldots, u_2^{(n)})] \\ &\quad - T[s; F(s, u_1, u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(n)})] \\ &= T[s; F(s, u_2, \ldots) - F(s, u_1, \ldots)]. \end{aligned}$$

Da nun $T(s;\varphi)$ der homogene Teil von $S(s;\varphi)$ ist, folgt aus (34) $|T(s;\varphi)| \leqq M \cdot \underset{s \text{ in } B}{\text{Max}} |\varphi(s)|$, somit wird nach (37)

$$|u_2^{(\nu)}(s) - u_1^{(\nu)}(s)| \leqq M \cdot \underset{s \text{ in } B}{\text{Max}} |F(s, u_2, \ldots) - F(s, u_1, \ldots)|$$

(38)
$$\leqq M \cdot \underset{s \text{ in } B}{\text{Max}} (k|u_2 - u_1| + k_1|u_2^{(1)} - u_1^{(1)}| + \ldots + k_n|u_2^{(n)} - u_1^{(n)}|)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Sei $\underset{s \text{ in } B}{\text{Max}} |u_2^{(\nu)}(s) - u_1^{(\nu)}(s)| = \varrho^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ gesetzt. Die größte der $n+1$ Zahlen $\varrho^{(0)}, \varrho^{(1)}, \ldots, \varrho^{(n)}$ sei ϱ, dann ist nach (38) und (37b)

$$\varrho \leqq M\varrho(k + k_1 + \ldots + k_n) = q\varrho.$$

Das ist wegen $q < 1$ nur möglich, wenn $\varrho = 0$, also $u_2(s) - u_1(s) \equiv 0$ ist.

Als Anwendung sei das folgende Beispiel genannt: Die allgemeine nichtlineare Integralgleichung

(39)
$$\psi(s) + \int_B (F\, s, t, \psi(t))\, dt = 0$$

hat eine Lösung, wenn die stetige Funktion $F(s, t, u)$ den Bedingungen

$$|F(s, t, u)| \leqq a + k|u|, \qquad k < \frac{1}{\int_B dt}$$

für alle s, t in B und alle reellen Werte von u genügt. Erfüllt $F(s, t, u)$ die Lipschitzbedingung

$$|F(s, t, u) - F(s, t, v) \leqq k|u - v|, \qquad k < \frac{1}{\int_B dt},$$

so hat Gleichung (39) genau eine Lösung.

II. Mehrdeutige Probleme.

§ 5.

Existenz einer nicht identisch verschwindenden Lösung (Eigenwertproblem).

Satz 7. $K(s, t)$ sei ein stetiger symmetrischer positiv definiter Kern, $g(s, u)$ eine stetige Funktion, die für s in B und irgendein Intervall I der u, das den Nullpunkt enthält, erklärt ist, und es sei $g(s, 0) = 0$ für alle s in B. Dann hat die nichtlineare Integralgleichung

(1)
$$\lambda\psi(s) - \int_B K(s, t)\, g(t, \psi(t))\, dt = 0$$

neben der trivialen Lösung $\psi \equiv 0$ für mindestens einen reellen λ-Wert eine reelle nicht identisch verschwindende Lösung[14]).

Beweis: $\varphi_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ bezeichne das zum Kern $K(s,t)$ gehörige vollständige System der Eigenfunktionen, λ_ν den zu $\varphi_\nu(s)$ gehörigen Eigenwert. M^2 sei die obere Schranke für den Kern $K(s,t)$ in B und c eine positive Konstante derart, daß das Intervall $|u| \leqq c \cdot M$ in I enthalten ist; ferner sei

$$G(s,u) = \int_0^u g(s,v)\,dv \tag{2}$$

gesetzt. Zum Beweise betrachten wir auch hier wieder das endliche approximierende Gleichungssystem. Die stetige Funktion

$$H^{(n)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_B G\left(t, \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \varphi_\nu(t)\right) dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist auf der Oberfläche des Hyperellipsoids $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu y_\nu^2 = c^2$ erklärt; denn es ist auf ihr

$$|\psi_n(s)| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \varphi_\nu(s)\right| \leqq \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu y_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)^2}{\lambda_\nu}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq cM. \tag{3}$$

$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ sei eine Stelle auf dem Ellipsoid, an der H sein absolutes Minimum d annimmt, für $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ möge das absolute Maximum D angenommen werden. Dann gibt es reelle Konstanten $\lambda^{(n)}, \Lambda^{(n)}$, so daß die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu^{(n)}}\left[\lambda^{(n)} \sum_{\varrho=1}^{n} \lambda_\varrho x_\varrho^{(n)2} - 2H^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})\right] = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen, also

$$\begin{aligned} \lambda^{(n)} \lambda_\nu x_\nu^{(n)} - \int_B g\left(t, \sum_{\varrho=1}^{n} x_\varrho^{(n)} \varphi_\varrho(t)\right) \varphi_\nu(t)\,dt = 0, \\ \Lambda^{(n)} \lambda_\nu X_\nu^{(n)} - \int_B g\left(t, \sum_{\varrho=1}^{n} X_\varrho^{(n)} \varphi_\varrho(t)\right) \varphi_\nu(t)\,dt = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Hat der Kern nur die endlich vielen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so sind in $\psi^{(n)}(s) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s)$ und $\Psi^{(n)}(s) = \sum_{\nu=1}^{(n)} X_\nu^{(n)} \varphi_\nu(s)$ bereits Lösungen von (1)

[14]) Vgl. L. Lichtenstein, l. c., S. 152 u. f.

gefunden, die nicht identisch verschwinden, da $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu^{(n)2} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu X_\nu^{(n)2} = c^2$ ist. Sie gehören zu den Parameterwerten $\lambda^{(n)}$ bzw. $\Lambda^{(n)}$ und wegen (3) ist

$$|\psi^{(n)}(s)| \leqq c\,M, \qquad |\Psi^{(n)}(s)| \leqq c\,M. \tag{5}$$

Für die Zahlen $\lambda^{(n)}$ und $\Lambda^{(n)}$ erhält man aus (4) durch Multiplikation mit $x_\nu^{(n)}$ bzw. $X_\nu^{(n)}$ und Summation über ν die Darstellung

$$\begin{aligned} \lambda^{(n)} &= \frac{1}{c^2} \int_B \psi^{(n)}(s)\, g\big(s, \psi^{(n)}(s)\big)\, ds, \\ \Lambda^{(n)} &= \frac{1}{c^2} \int_B \Psi^{(n)}(s)\, g\big(s, \Psi^{(n)}(s)\big)\, ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Hat der Kern unendlich viele Eigenwerte, so kann man folgendermaßen schließen: Die Folge der Funktionen $\psi^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist nach (5) gleichmäßig beschränkt. Aus der mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung gewonnenen Abschätzung

$$\begin{aligned} |\psi^{(n)}(s_2) - \psi^{(n)}(s_1)| &\leqq \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu^{(n)2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\varphi_\nu(s_1) - \varphi_\nu(s_2))^2}{\lambda_\nu} \right\}^{1/2} \\ &\leqq c\,\{K(s_1, s_1) - 2K(s_1, s_2) + K(s_2, s_2)\}^{1/2} \end{aligned}$$

folgt wegen der Stetigkeit des Kernes $K(s, t)$ die gleichgradige Stetigkeit der Folge $\psi^{(n)}(s)$. Es gibt also eine Teilfolge $\psi^{(n_1)}, \psi^{(n_2)}, \ldots$, die gleichmäßig in B gegen eine stetige Grenzfunktion $\psi(s)$ konvergiert. Aus (6) folgt sodann, daß die Zahlen $\lambda^{(n_1)}, \lambda^{(n_2)}, \ldots$ einen Grenzwert haben

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{m \to \infty} \lambda^{(n_m)} = \frac{1}{c^2} \int_B \psi(s)\, g\big(s, \psi(s)\big)\, ds, \\ \Lambda &= \lim_{m \to \infty} \Lambda^{(n_m)} = \frac{1}{c^2} \int_B \Psi(s)\, g\big(s, \Psi(s)\big)\, ds. \end{aligned} \tag{7}$$

In der gleichen Weise wie auf S. 51 ergibt sich, daß der Rest

$$R_m(s) = \lambda^{(n_m)} \psi^{(n_m)}(s) - \int_B K(s, t)\, g\big(t, \psi^{(n_m)}(t)\big)\, dt$$

gleichmäßig in s gegen Null konvergiert, also das Bestehen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda\,\psi(s) - \int_B K(s, t)\, g\big(t, \psi(t)\, dt = 0, \\ \Lambda\,\Psi(s) - \int_B K(s, t)\, g\big(t, \Psi(t)\big)\, dt = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Um den Beweis zu vervollständigen ist jetzt noch zu zeigen, daß mindestens eine der beiden Lösungen $\psi(s)$ und $\Psi(s)$ nicht identisch verschwindet.

Wegen (5) liegen die Zahlen

$$(9) \quad d^{(n)} = \int_B G(s, \psi^{(n)}(s))\, ds, \qquad D^{(n)} = \int_B G(s, \Psi^{(n)}(s)\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

in einem endlichen Intervall. d sei die untere Grenze der $d^{(n)}$, D die obere Grenze der $D^{(n)}$. Da

$$(10) \qquad D \geqq \ldots \geqq D^{(2)} \geqq D^{(1)} \geqq d^{(1)} \geqq d^{(2)} \geqq \ldots \geqq d$$

ist, ergibt sich

$$(11) \quad d = \lim_{n \to \infty} d^{(n)} = \int_B G((s, \psi(s))\, ds, \qquad D = \lim_{n \to \infty} D^{(n)} = \int_B G(s, \Psi(s))\, ds.$$

Verschwinden nun ψ und Ψ identisch, so folgt aus (11), da $G(s, 0) = 0$ ist, $d = D = 0$ und aus (10) $d^{(n)} = D^{(n)} = 0$ für alle n. Dann ergibt sich also jede Funktion $\psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu \varphi_\nu(s)$ mit $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu y_\nu^2 = c^2$ als Lösung von (1). Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

§ 6.

Eine Verallgemeinerung.

In diesem Paragraphen soll für den Satz 7 ein Beweis erbracht werden, der es vermeidet auf endliche Systeme zurückzugreifen. Zugleich wird damit gezeigt, daß der Satz 7 auch für allgemeinere Funktionalgleichungen seine Gültigkeit behält.

Σ sei ein linearer Raum mit den Elementen φ, in dem ein zu dem in der Vektorrechnung analoges inneres Produkt (φ_1, φ_2)[15]) und damit eine Entfernung $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sqrt{(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)}$ definiert ist[16]). Σ sei in dieser Metrik vollständig[17]). Eine Rechenvorschrift, die gewissen Ele-

---

[15]) D. h. jedem Elementenpaar φ_1, φ_2 von Σ ist eine reelle Zahl (φ_1, φ_2) mit folgenden Eigenschaften zugeordnet: 1. $(a\,\varphi_1, \varphi_2) = a\,(\varphi_1, \varphi_2)$ für jede reelle Zahl a; 2. $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$ für jedes Element ψ von Σ; 3. $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1)$; 4. $(\varphi, \varphi) \geqq 0$ und nur für $\varphi = 0$ ist es $= 0$. Wie leicht nachzurechnen ist, gilt die „Schwarzsche Ungleichung" $(\varphi_1, \varphi_2)^2 \leqq (\varphi_1, \varphi_1) \cdot (\varphi_2, \varphi_2)$. Das innere Produkt ist eine stetige Funktion seiner beiden Komponenten.

[16]) Die Entfernung kann auch anders definiert sein, doch muß diese Definition so gewählt sein, daß das innere Produkt eine stetige Funktion seiner beiden Komponenten wird.

[17]) D. h. das Cauchysche Konvergenzprinzip gilt in Σ. Die Definitionen „vollständiger linearer Raum", „inneres Produkt" und „Hermitescher Operator" sind in dieser Form der Arbeit von J. v. Neumann: Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Annalen **102** (s. S. 49 u. f., besonders S. 64) entnommen.

menten φ von Σ reelle Zahlen zuordnet, soll „Funktion" heißen; „Operator" dagegen soll eine Rechenvorschrift heißen, wenn sie Elementen φ von Σ wieder Elemente von Σ zuordnet. Ein in Σ definierter Operator $\Gamma\varphi$ soll „Gradient der Funktion $G(\varphi)$" genannt werden, wenn für irgend zwei verschiedene Elemente φ_1, φ_2 aus Σ

$$G(\varphi_2) - G(\varphi_1) = (\Gamma\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1) + R(\varphi_1, \varphi_2)\,\|\varphi_2 - \varphi_1\| \tag{13}$$

ist, wobei $R(\varphi_1, \varphi_2)$ eine stetige Funktion darstellt, für die

$$\lim_{\varphi_2 \to \varphi_1} R(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

ist. H sei ein in Σ definierter von Null verschiedener linearer beschränkter Hermitescher Operator[18]), der „vollstetig" ist, d. h. jede beschränkte Teilmenge von Σ in eine kompakte Menge überführt. Σ' sei die abgeschlossene Hülle der Menge der $H\varphi$ mit φ aus Σ. $H^2\varphi$ bezeichne den iterierten Operator $H(H\varphi)$. Die „Kugel" K_c, die durch $(\varphi, \varphi) = c^2$ definiert ist, wird durch H auf ein in Σ' liegendes „Ellipsoid', abgebildet, dessen abgeschlossene Hülle mit K_c' bezeichnet sei. Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Satz 8. Ist der in K_c' definierte und stetige Operator $\Gamma\varphi$ der Gradient der Funktion $G(\varphi)$, so hat die Gleichung

$$\lambda\psi - H^2\Gamma\psi = 0 \tag{14}$$

mindestens zwei verschiedene Lösungen in K_c', die zu reellen λ-Werten gehören. Die Funktion

$$J(\varphi) = G(H\varphi) \tag{15}$$

nimmt auf K_c ein absolutes Maximum oder Minimum an, wenn $H^2\Gamma\varphi = 0$ nicht mehr als eine Lösung auf K_c' hat.

Beweis: Da H ein beschränkter Operator und G eine stetige Funktion ist, hat $J(\varphi)$ auf K_c endliche Grenzen. d sei die untere, D die obere Grenze, φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bezeichne eine Minimal-, Φ_n eine Maximalfolge von Vergleichselementen, d. h. es sei

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} J(\varphi_n) = d, \qquad (\varphi_n, \varphi_n) = c^2, \\ &\lim_{n \to \infty} J(\Phi_n) = D, \qquad (\Phi_n, \Phi_n) = c^2. \end{aligned} \tag{16}$$

---

[18]) D. h.: 1. Es gibt ein φ in Σ, so daß $H\varphi \neq 0$, 2. $H(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 H\varphi_1 + a_2 H\varphi_2$, 3. $(H\varphi, H\varphi) \leqq h(\varphi, \varphi)$, 4. $(H\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, H\varphi_2)$. Aus der Beschränktheit folgt die Stetigkeit von H und umgekehrt; s. J. v. Neumann l. c., S. 73.

Da H vollstetig und K_c' abgeschlossen ist, gibt es eine Indexreihe $n_1 < n_2 < \ldots$, so daß die Folge $\psi_{n_m} = H\varphi_{n_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gegen ein Element ψ auf K_c' konvergiert. (Die folgenden Aussagen bleiben richtig, wenn man die φ, ψ, d durch die entsprechenden Φ, Ψ, D ersetzt.) Diese Indexreihe soll wieder mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet werden. Wegen (16) und der Stetigkeit der Funktion $G(\varphi)$ ist nach Definition (15)

$$d = \lim_{n \to \infty} J(\varphi_n) = \lim_{n \to \infty} G(\psi_n) = G(\psi). \tag{17}$$

Man betrachte nun folgende lineare Variation

$$\varphi_n(\varepsilon) = (1 + \delta_n)\varphi_n + \varepsilon\overline{\varphi}, \qquad \psi_n(\varepsilon) = H\varphi_n(\varepsilon) = (1 + \delta_n)\psi_n + \varepsilon H\overline{\varphi}. \tag{18}$$

Dabei sei ε eine beliebige reelle Konstante, $\overline{\varphi}$ ein bestimmtes Element aus Σ und die Konstante δ_n so gewählt, daß $\varphi_n(\varepsilon)$ zulässiges Konkurrenzelement wird. Das ist für alle genügend kleinen ε möglich, denn die Bedingung $(\varphi_n(\varepsilon), \varphi_n(\varepsilon)) = c^2$ ergibt für δ_n die quadratische Gleichung

$$(1 + \delta_n)c^2 + 2(1 + \delta_n)\varepsilon(\varphi_n, \overline{\varphi}) + \varepsilon^2(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) = c^2.$$

Diese Gleichung hat für genügend kleine ε reelle Wurzeln, deren eine

$$\delta_n = -\frac{\varepsilon}{c^2}(\varphi_n, \overline{\varphi}) + 0_n(\varepsilon^2) \tag{19}$$

ist, wobei

$$|0_n(\varepsilon^2)| \leqq 0 \cdot \varepsilon^2 \tag{20}$$

ist mit einer Konstanten 0, die nicht von n und ε abhängt.

Nach Voraussetzung ist Γ der Gradient von G, also ist wegen (13)

$$G(\psi_n(\varepsilon)) - G(\psi_n) = (\Gamma\psi_n, \psi_n(\varepsilon) - \psi_n) + R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon))\,\|\psi_n(\varepsilon) - \psi_n\|, \tag{21}$$

wobei $\lim_{\varepsilon \to 0} R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon)) = 0$ ist, da $\psi_n(\varepsilon)$ gegen ψ_n strebt, wenn ε gegen Null geht. Aus (18) und (19) ergibt sich

$$(\Gamma\psi_n, \psi_n(\varepsilon) - \psi_n) = \varepsilon[-\lambda_n(\varphi_n, \overline{\varphi}) + (\Gamma\psi_n, H\overline{\varphi})] + 0_n(\varepsilon^2)(\Gamma\psi_n, \psi_n). \tag{22}$$

Dabei ist

$$\lambda_n = \frac{1}{c^2}(\psi_n, \Gamma\psi_n) \tag{23}$$

gesetzt. Ist $\overline{\varphi} = H\overline{\varphi}$ gewählt, so wird

$$\begin{aligned} -\lambda_n(\varphi_n, \overline{\varphi}) + (\Gamma\psi_n, H\overline{\varphi}) &= -\lambda_n(\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}) + (H^2\Gamma\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}) \\ &= (-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}). \end{aligned} \tag{24}$$

Die Folge $-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiert gegen

$$M\psi = -\lambda\psi + H^2\Gamma\psi, \tag{25}$$

wobei nach (23)

$$\lambda = \frac{1}{c^2}(\psi, \Gamma\psi) \tag{26}$$

ist. Es ist leicht zu sehen, daß $M\psi = 0$ sein muß. Nach (15), (21), (22) und (24) ist nämlich

$$\begin{aligned} J(\varphi_n(\varepsilon)) - J(\varphi_n) &= G(\psi_n(\varepsilon)) - G(\psi_n) \\ &= \varepsilon(-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n, \overline{\varphi}) + 0_n(\varepsilon^2)(\Gamma\psi_n, \psi_n) \\ &\quad + R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon))\|\psi_n(\varepsilon) - \psi_n\|. \end{aligned} \tag{27}$$

Ist nun $M\psi \neq 0$, so wähle man von Anfang an $\overline{\varphi} = M\psi$. Da $-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n$ gegen $M\psi$ konvergiert, gibt es eine Zahl N, so daß für $n > N$

$$(-\lambda_n\psi_n + H^2\Gamma\psi_n, \overline{\varphi}) > \frac{2}{3}(M\psi, M\psi) \tag{28}$$

wird, und man kann die positive Zahl ε_1 so klein wählen, daß für $0 > \varepsilon > -\varepsilon_1$

$$|R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon)) \cdot \|\psi_n(\varepsilon) - \psi_n\| + 0_n(\varepsilon^2)(\Gamma\psi_n, \psi_n)| < \frac{-\varepsilon}{3}(M\psi, M\psi) \tag{29}$$

ausfällt. Dann erhält man für die so gewählten Konkurrenzelemente nach (27), (28) und (29)

$$J(\varphi_n(\varepsilon)) - J(\varphi_n) < \frac{\varepsilon}{3}(M\psi, M\psi).$$

Das ist aber wegen $\varepsilon < 0$ unmöglich, da nach (16) $J(\varphi_n)$ gegen die untere Grenze d strebt.

Da die gleichen Überlegungen für Ψ gelten, erhält man als Resultat die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda\psi - H^2\Gamma\psi &= 0, \\ \Lambda\Psi - H^2\Gamma\Psi &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

wobei

$$\lambda = \frac{1}{c^2}(\psi, \Gamma\psi), \qquad \Lambda = \frac{1}{c^2}(\Psi, \Gamma\Psi) \tag{31}$$

ist. Es ist noch zu zeigen, daß ψ von Ψ verschieden ist. Ist $\psi = \Psi$, so ist nach (16) $d = D$, also $J(\varphi)$ auf K_c konstant, es genügt also jedes Element von K_c' der Gleichung (14). Da $H \neq 0$ ist, enthält K_c' ein von 0 verschiedenes Element ψ, somit auch zwei verschiedene Elemente, da mit ψ auch $\Psi = -\psi$ zu K_c' gehört. Damit ist der erste Teil des Satzes 8 bewiesen.

Um den zweiten Teil zu beweisen, bemerkt man, daß λ und Λ nicht beide zugleich 0 sein können, denn das hätte nach (30) zur Folge, daß $H^2\Gamma\psi = 0$ mehr als eine Lösung auf K_c' hat. Es sei also $\lambda \neq 0$. Setze $\varphi_0 = \frac{1}{\lambda}H\Gamma\psi$, dann ist nach (30) und (31)

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{1}{\lambda^2}(H\Gamma\psi, H\Gamma\psi) = \frac{1}{\lambda^2}(H^2\Gamma\psi, \Gamma\psi) = \frac{1}{\lambda}(\psi, \Gamma\psi) = c^2$$

und nach (15), (17) und (30)

$$J(\varphi_0) = G(H\varphi_0) = G\left(\frac{1}{\lambda} H^2 \Gamma\psi\right) = G(\psi) = d.$$

An der Stelle φ_0 auf K_c nimmt also $J(\varphi)$ sein Minimum an. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes 8 bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß die Beziehung (31) zwischen der Lösung der Gleichung (14) und ihrem zugehörigen Parameterwert nicht nur für die speziellen Lösungen ψ und Ψ gilt, sondern für jede Lösung der Gleichung (14), die nicht zugleich Lösung von $H^2\Gamma\psi = 0$ ist. Sei nämlich ψ_0 irgendeine Lösung von (14) und $H^2\Gamma\psi_0 \neq 0$. Dann ist der zugehörige Parameterwert $\lambda_0 \neq 0$ und $\psi_0 \neq 0$, also gibt es nach (14) ein Element φ_0, so daß

$$\psi_0 = H\varphi_0 \tag{32}$$

ist. (Man braucht ja nur $\varphi_0 = \frac{1}{\lambda_0} H\Gamma\psi_0$ zu wählen.) φ_0 kann nicht $= 0$ sein, da dies nach (32) $\psi_0 = 0$ zur Folge hätte. Da nach (14)

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{1}{\lambda_0^2}(H\Gamma\psi_0, H\Gamma\psi_0) = \frac{1}{\lambda_0^2}(H^2\Gamma\psi_0, \Gamma\psi_0) = \frac{1}{\lambda_0}(\psi_0, \Gamma\psi_0)$$

ist, erhält man somit

$$\lambda_0 = \frac{(\psi_0, \Gamma\psi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}. \tag{33}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß es Lösungen gibt, die zu dem Parameterwert $\lambda = -1$ gehören, d. h. Lösungen der Gleichung

$$\psi + H^2\Gamma\psi = 0.$$

Da H ein beschränkter Operator ist, gibt es eine positive Konstante h, so daß für alle φ aus Σ

$$(H\varphi, H\varphi) \leqq \frac{1}{h}(\varphi, \varphi) \tag{34}$$

ist. (Der beste Wert für h ist der kleinste Eigenwert des Operators H^2, siehe weiter unten!) Mit dieser Bezeichnung gilt der

Satz 9. Ist der in Σ' definierte und stetige Operator $\Gamma\varphi$ der Gradient der Funktion $G(\varphi)$ und ist

$$G(\varphi) \geqq -\frac{k}{2}(\varphi, \varphi) - C, \tag{35}$$

wo k und C positive Konstanten sind und $k < h$ ist, so hat die Gleichung

$$\psi + H^2\Gamma\psi = 0 \tag{36}$$

eine Lösung in Σ'.

Beweis: Ein ähnliches Verfahren wie beim Beweise des Satzes 8 führt auch hier zum Ziele. Die Funktion

$$J(\varphi) = (\varphi, \varphi) + 2G(H\varphi) \tag{37}$$

ist wegen (34) und (35) nach unten beschränkt:

$$J(\varphi) \geqq (\varphi, \varphi) - k(H\varphi, H\varphi) - 2C \geqq \left(1 - \frac{k}{h}\right)(\varphi, \varphi) - 2C \geqq -2C. \tag{38}$$

$J(\varphi)$ hat also eine endliche untere Grenze d. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sei eine Minimalfolge, d. h. $\lim_{n \to \infty} J(\varphi_n) = d$. Man kann die φ_ν so gewählt denken, daß $J(\varphi_\nu) \leqq d + 1$ ist für $\nu = 1, 2, \ldots$. Dann ist nach (38)

$$(\varphi_\nu, \varphi_\nu) \leqq \frac{2C + d + 1}{1 - \frac{k}{h}} = C_1, \tag{39}$$

wo C_1 eine von ν unabhängige Konstante ist. Da H vollstetig ist, gibt es eine Indexreihe $n_1 < n_2 < \ldots$, so daß die Folge $\psi_{n_m} = H\varphi_{n_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gegen ein Element ψ von Σ' konvergiert. Diese Indexreihe soll wieder mit 1, 2, 3, ... bezeichnet werden.

Man betrachte nun die lineare Variation

$$\varphi_n(\varepsilon) = \varphi_n + \varepsilon\overline{\varphi}, \qquad \psi_n(\varepsilon) = H\varphi_n(\varepsilon) = \psi_n + \varepsilon H\overline{\varphi}.$$

Dann ist nach (37) und (13)

$$\begin{aligned} J(\varphi_n(\varepsilon)) - J(\varphi_n) &= 2\varepsilon(\varphi_n, \overline{\varphi}) + 2G(\psi_n(\varepsilon)) - 2G(\psi_n) + \varepsilon^2(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \\ &= 2\varepsilon[(\varphi_n, \overline{\varphi}) + (\Gamma\psi_n, H\overline{\varphi})] + 2\varepsilon R(\psi_n, \psi_n(\varepsilon))\|H\overline{\varphi}\| \\ &\quad + \varepsilon^2(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}). \end{aligned}$$

Wählt man $\overline{\varphi} = H\overline{\overline{\varphi}}$, so wird

$$(\varphi_n, \overline{\varphi}) + (\Gamma\psi_n, H\overline{\varphi}) = (\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}) + (H^2\Gamma\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}) = (\psi_n + H^2\psi_n, \overline{\overline{\varphi}}).$$

Da die Folge $\psi_n + H^2\Gamma\psi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gegen $\psi + H^2\Gamma\psi$ konvergiert, folgt daraus genau ebenso wie im Beweise zu Satz 8, daß

$$\psi + H^2\Gamma\psi = 0$$

sein muß.

Zusatz: Genügt der Operator $\Gamma\varphi$ der „Lipschitzbedingung"

$$(\Gamma\varphi_2 - \Gamma\varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1) \geqq -k(\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1) \qquad (k < h) \tag{40}$$

für irgendzwei Elemente φ_1 und φ_2 aus Σ', so hat die Gleichung (36) nicht mehr als eine Lösung.

Beweis: Die Gleichung (36) habe zwei Lösungen ψ_1 und ψ_2. Dann genügt die Differenz $\overline{\psi} = \psi_2 - \psi_1$ der Gleichung

$$\overline{\psi} + H^2(\Gamma(\overline{\psi} + \psi_1) - \Gamma\psi_1) = 0. \tag{41}$$

Setzt man $\overline{\varphi} = -H(\Gamma(\overline{\psi} + \psi_1) - \Gamma\psi_1)$, so ist $\overline{\psi} = H\overline{\varphi}$ und

$$(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) = (\overline{\varphi}, -H(\Gamma(\overline{\psi} + \psi_1) - \Gamma\psi_1)) = (-\overline{\psi}, \Gamma(\overline{\psi} + \psi_1) - \Gamma\psi_1),$$

also wegen (40) und (34)

$$(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) \leqq k(\overline{\psi}, \overline{\psi}) = k(H\overline{\varphi}, H\overline{\varphi}) \leqq \frac{k}{h}(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}).$$

Da $\frac{k}{h} < 1$ ist, ist das nur möglich, wenn $(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}) = 0$, also $\overline{\varphi} = 0$ und ebenso $\overline{\psi} = \psi_2 - \psi_1 = 0$ ist.

§ 7.

Einige Spezialfälle und Ergänzungen.

1. $\Gamma\varphi \equiv \varphi$, also der Operator Γ sei die Identität. Aus der identischen Gleichung

$$\tfrac{1}{2}[(\varphi_2, \varphi_2) - (\varphi_1, \varphi_1)] = (\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_1) + \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_2 - \varphi_1)$$

folgt nach Definition (13), daß $\Gamma\varphi \equiv \varphi$ der Gradient von $G(\varphi) \equiv \frac{1}{2}(\varphi, \varphi)$ ist. Der Satz 8 besagt dann, daß die homogene lineare Gleichung

$$\lambda\psi - H^2\psi = 0 \tag{42}$$

mindestens zwei verschiedene Lösungen besitzt, also insbesondere eine von Null verschiedene Lösung ψ_0, die zu einem von Null verschiedenen Parameterwert λ_0 gehört. Jede solche Lösung heißt bekanntlich Eigenfunktion des Operators H^2 und der reziproke Wert des zugehörigen Parameters Eigenwert. Aus (42) folgt

$$\lambda = \frac{(H^2\psi, \psi)}{(\psi, \psi)} = \frac{(H\psi, H\psi)}{(\psi, \psi)}.$$

Sämtliche Eigenwerte sind also positiv.

Ist ψ_0 eine Eigenfunktion von H^2, $\frac{1}{\lambda_0}$ der zugehörige Eigenwert, so ist $\varphi_0 = \sqrt{\lambda_0}\,\psi_0 + H\psi_0$ entweder gleich Null oder es ist $\sqrt{\lambda_0}\,\varphi_0 - H\varphi_0 = \lambda_0\psi_0 - H^2\psi_0 = 0$, also ist $\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$ oder $-\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$ Eigenwert von H. Auch die übrigen Sätze der Theorie der linearen Integralgleichungen mit symmetrischem Kern lassen sich auf die einfachste Weise sinngemäß übertragen, insbesondere die Sätze, daß H endlich oder abzählbar viele Eigenwerte besitzt, daß zu jedem Eigenwert endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen existieren, daß der Entwicklungssatz für quellenmäßig darstellbare Funktionen, d. h. für Elemente $\psi = H\varphi$ gilt, usw.

2. Σ sei die Gesamtheit der reellen quadratisch integrierbaren Funktionen, die im Bereich B definiert sind, und das innere Produkt sei erklärt durch $(\varphi_1, \varphi_2) = \int_B \varphi_1(s)\,\varphi_2(s)\,ds$. $K(s,t)$ sei wie in § 5 erklärt: stetig, positiv definit und symmetrisch, $\varphi_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ das vollständige System seiner Eigenfunktionen, λ_ν die zugehörigen Eigenwerte. Durch

$$\psi = H\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_\nu)}{\sqrt{\lambda_\nu}}\,\varphi_\nu$$

wird ein Hermitescher Operator definiert, der allen in § 6 genannten Bedingungen genügt. Er ist linear und beschränkt, da $|\psi(s)| \leqq M\sqrt{(\varphi,\varphi)}$ ist (s. § 5, (3)). Er ist auch vollstetig, da das Bild jeder beschränkten Teilmenge von Σ eine Menge gleichmäßig beschränkter gleichgradig stetiger Funktionen des Bereiches B ist, wie man leicht nachprüft. Sind $g(s,u)$ und $G(s,u) = \int_0^u g(s,v)\,dv$ die in Satz 7 genannten Funktionen, so ist der in K_c' definierte Operator $\overset{*}{\Gamma}\psi = g(s, \psi(s))$ der Gradient der Funktion $\overset{*}{G}(\psi) = \int_B G(s, \psi(s))\,ds$, wie auch sofort einzusehen ist.

Da nun $H^2\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_\nu)}{\lambda_\nu}\,\varphi_\nu = \int_B K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$ ist, schließt man aus Satz 8, daß es mindestens einen reellen λ-Wert gibt, für den die Gleichung

$$\lambda\psi(s) - \int_B K(s,t)\,g(t, \psi(t))\,dt = 0 \tag{43}$$

eine nicht identisch verschwindende stetige Lösung besitzt. Damit ist gezeigt, daß Satz 7 ein Spezialfall von Satz 8 ist. Für λ ergibt sich aus (31)

$$\lambda = \frac{1}{c^2} \int_B \psi(s)\,g(s, \psi(s))\,ds. \tag{44}$$

3. Das zum Beweise verwandte Konstruktionsverfahren liefert eine eindimensionale Schar von nicht identisch verschwindenden Lösungen der Gleichung (43), deren zugehörige Parameterwerte in (44) gegeben sind; denn die gefundenen Lösungen hängen noch von der Wahl der Normierungskonstanten c ab, die in einem gewissen Intervall, entsprechend dem Definitionsbereich von $g(s,u)$ willkürlich wählbar ist. Insbesondere hat die Gleichung (43) stets nicht identisch verschwindende Lösungen, deren absoluter Betrag in B eine willkürlich gegebene positive Zahl nicht

übersteigt. Diese Lösungen gehen im allgemeinen nicht sämtlich aus einer Lösung durch Multiplikation mit verschiedenen Konstanten hervor, wie das bei den homogenen linearen Integralgleichungen der Fall ist.

Es kann auch vorkommen, daß nur für gewisse diskrete c-Werte neben ψ auch $c \cdot \psi$ Lösung von (43) ist, wie das Beispiel

$$\lambda \psi(s) - \int_B K(s,t)\, \psi(t) \sin\left(\log \psi^2(t)\right) dt = 0 \quad (\sin \log 0 = 0)$$

zeigt. Nach Satz 7 hat diese Gleichung eine nicht identisch verschwindende Lösung $\psi_0(s)$. Dann ist aber auch $e^{k\pi}\psi_0(s)$ für jede ganze Zahl k eine Lösung und alle diese Lösungen gehören zu demselben Parameterwert λ_0. Auch $e^{\frac{2k+1}{2}\pi}\psi_0(s)$ ist für jede ganze Zahl k eine solche Lösung, diese gehören aber alle zum Parameterwert $-\lambda_0$.

4. Ebenso wie sich der Satz 7 als Spezialfall des Satzes 8 ergab, erhält man aus Satz 9 das Resultat, daß die Hammersteinsche Gleichung

$$\psi(s) + \int_B K(s,t)\, f(t, \varphi(t))\, dt = 0 \tag{45}$$

eine stetige Lösung hat, wenn die stetige Funktion $f(s,u)$ für s in B und alle reellen Werte von u erklärt ist und für jede in B stetige Funktion $\varphi(s)$

$$\int_B F(s, \varphi(s))\, ds \geqq -\frac{k}{2}\int_B \varphi^2(s)\, ds - C$$

$$\left(F(s,u) = \int_0^u f(s,v)\, dv;\ k < \lambda_1\right) \tag{46}$$

ist[19]). Man braucht, um dies einzusehen, nur wieder Σ mit der Menge der in B quadratisch integrierbaren Funktionen $\varphi(s)$, das innere Produkt (φ_1, φ_2) mit $\int_B \varphi_1(s)\, \varphi_2(s)\, ds$, den Operator $\psi = H\varphi$ mit $\psi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_\nu)}{\sqrt{\lambda_\nu}} \varphi_\nu(s)$, die Funktion $G(\varphi)$ mit $\int_B F(s, \varphi(s))\, ds$ und

[19]) Es genügt, daß diese Voraussetzung für alle quellenmäßige Funktionen $\varphi'(s) = \int_B K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$, wo $\varphi(s)$ eine quadratisch integrierbare Funktion ist, erfüllt ist; denn diese Menge von Funktionen entspricht genau dem Bereich Σ', der in der Voraussetzung (35) genannt ist. (46) ist eine Folge von $F(s,u) \geqq -\frac{k}{2}u^2 - C$, so daß der Hammersteinsche Existenzsatz (s. l. c. 1, S. 120) sich als Spezialfall unseres Satzes 8 ergibt.

ihren Gradienten $\Gamma\varphi$ mit $f(s, \varphi(s))$ identifizieren. Dann erkennt man, daß die Gleichung (36) in die Gleichung (45) und die Voraussetzung (35) in die Voraussetzung (46) übergeht.

Aus dem Zusatz über die Eindeutigkeit ergibt sich, daß die Gleichung (45) eine und nur eine Lösung hat, wenn die Funktion $f(s, u)$ eine stetige Ableitung besitzt, die der Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial u}(s, u) \geqq -k \tag{47}$$

für alle s in B und alle reellen Werte der u genügt[20]). Denn aus dieser Voraussetzung folgt sowohl die Richtigkeit von (46) wie auch die von (40).

Ist $\frac{\partial f}{\partial u}$ nach unten beschränkt, Voraussetzung (47) aber nicht erfüllt, so ist die Anzahl der Lösungen von (45) gleich der Anzahl der Lösungssysteme eines endlichen Gleichungssystems, das man in der gleichen Weise wie im Beweise zu Satz 2 erhält.

---

[20]) Der Hammersteinsche Eindeutigkeitssatz (s. l. c. 1, S. 126) verlangt die Beschränktheit der Ableitung nach beiden Seiten, berücksichtigt also nicht die Definitheit des Kernes. Auch die Bedingung der Monotonie der Funktion $f(s, u)$, d. h. $\frac{\partial f}{\partial u} \geqq 0$ verlangt mehr als die Bedingung (47).

(Eingegangen am 11. August 1933.)

Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. I.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

§ 1.

Eine für die Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen wichtige Klasse von Bereichen bilden die „Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche", die dadurch charakterisiert sind, daß auf ihrer (dreidimensionalen) Berandung eine ausgezeichnete (zweidimensionale) Fläche liegt, die in jener Theorie funktionentheoretisch eine ähnliche Rolle spielt wie in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen der Rand ebener Bereiche. Bis jetzt sind in der Literatur zwei Typen von solchen „ausgezeichneten Randflächen", nämlich die Maximumfläche und ein Spezialfall von ihr, die Bestimmungsfläche, betrachtet worden.

Die Maximumfläche ist eine Fläche, welche die Eigenschaft hat, daß *auf ihr* jede im (abgeschlossenen) Bereiche reguläre Funktion $f(z_1, z_2)$ der beiden komplexen Veränderlichen z_1, z_2 das Maximum ihres Betrages annimmt[1]). Nach Aufstellung des Begriffes Maximumfläche liegt es

[1]) Diese Definition ist insofern etwas unvollkommen als jede Fläche, die die kleinste Mannigfaltigkeit der angegebenen Art enthält, im Sinne dieser Definition eine Maximumfläche ist. Die im folgenden angegebenen Maximumflächen sind im allgemeinen „kleinste Maximumflächen". Bei gewissen Problemen ist es vorteilhaft, auch andere Klassen von Maximumflächen heranzuziehen. Aus Raumrücksichten gehen wir auf diesen Fragenkomplex hier nicht näher ein.

Die Einführung der Maximumflächen erlaubt eine wichtige Anwendung, nämlich eine Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemma: Ist $\varphi(z_1, z_2)$ eine in dem Bereiche $\mathfrak{M}^4$ mit der Maximumfläche $\mathfrak{F}^3$ reguläre und irgendwo verschwindende Funktion, ist ferner sowohl die Funktion $f(z_1, z_2)$ wie $\frac{f(z_1, z_2)}{\varphi(z_1, z_2)}$ in $\mathfrak{M}^4$ regulär, so folgt, daß in $\mathfrak{M}^4$:

$$|f(z_1, z_2)| \leqq \frac{M}{m} |\varphi(z_1, z_2)|$$

ist, wobei M das Maximum von $|f|$, m das Minimum von $|\varphi|$ auf $\mathfrak{F}^3$ bedeutet. Bei einem beliebigen Bereiche $\mathfrak{B}^4$ (wo das Betragsmaximum an einer beliebigen Stelle des Randes $\mathfrak{b}^3$ angenommen werden kann) mußte in der entsprechenden

nunmehr nahe, nach der Möglichkeit einer Integraldarstellung der $f(z_1, z_2)$ durch ihre Werte auf der Maximumfläche zu fragen.

In den einfachsten Fällen wurde eine solche Darstellung in einigen früheren Arbeiten[2]) gegeben. Die vorliegende Arbeit bezweckt nun, die dort gegebene Darstellung auf eine weitere Klasse von Bereichen zu übertragen, welche von *endlich vielen analytischen Hyperflächen berandet* sind.

Unter einer analytischen Hyperfläche versteht man bekanntlich die Gesamtheit der Punkte $\{z_1, z_2\}$, deren Koordinaten eine Gleichung

$$p(z_1, z_2, \lambda) = 0$$

befriedigen, wobei p eine stetige Funktion des reellen Parameters λ und der komplexen Veränderlichen z_1, z_2 bedeutet, die für jeden festen Wert λ eine analytische Funktion von z_1, z_2 ist[3]).

Im folgenden sollen die Zeichen: $+$, $\mathfrak{S}$ (Vereinigungsmenge), $\cdot$ (Durchschnitt), $\times$ (topologisches Produkt von Bereichen), $-$ (Differenzmenge) in üblicher Weise angewandt werden[4]). So soll die Vereinigungsmenge einer Schar von einem Parameter α abhängigen Mengen $\mathfrak{C}^n(\alpha)$[5]), wenn α eine Menge $\mathfrak{R}^m$ durchläuft, durch $\mathfrak{S}_{\alpha \subset \mathfrak{R}^m} \mathfrak{C}^n(\alpha)$ bezeichnet werden.

Ist $\mathfrak{R}^n$ eine Punktmenge des $z_1 z_2$-Raumes, so soll die Menge der z_2-Koordinaten von $\mathfrak{R}^n$ („Projektion von $\mathfrak{R}^n$ auf die z_2-Ebene") mit $\mathsf{P}_2(\mathfrak{R}^n)$ bezeichnet werden.

Formel das Minimum von $|\varphi|$ auf der ganzen Randhyperfläche $\mathfrak{b}^3$ genommen werden. Während aber im allgemeinen m (das Minimum von $|\varphi|$ auf $\mathfrak{F}^2$) einen positiven Wert hat, muß das Minimum von $|\varphi|$ auf $\mathfrak{b}^3$ (nach einem bekannten Hartogsschen Satz) gleich Null sein, da φ im Innern von $\mathfrak{B}^4$ verschwindet.

[2]) „Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Annalen **102** (1929), S. 430–446, insbesondere § 2, Formel (6) und die Fußnote [19]); „Über den Wertevorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Zeitschr. **36** (1932), S. 171–183, insbesondere § 1 und „Über die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche", Jahresber. D. Math. Ver. **42** (1933). S. 238–252, insbesondere § 4.

Zu dem gleichen Problemenkreis gehört die (vorläufige) Mitteilung von André Weil: „Sur les séries de polynomes de deux variables complexes". Compt. rend. **194** (1932), S. 1304—1305.

[3]) Wir werden bei den folgenden Betrachtnngen von vornherein annehmen, daß die Flächen in der Form $z_1 = h(z_2, \lambda)$ oder $z_2 = h(z_1, \lambda)$ gegeben sind. Auf die Frage der Reduktion der allgemeinen Gleichung auf diese Gestalt und insbesondere auf die Frage nach den dabei auftretenden Ausnahmestellen gehen wir hier nicht näher ein.

[4]) Wegen der Regeln beim Operieren mit diesen Symbolen vgl. z. B. F. Hausdorff, Mengenlehre, II. Aufl. (1928), § 1.

[5]) Die oberen Indizes geben die Dimension der Mannigfaltigkeit an.

Der Rand einer Mannigfaltigkeit wird im allgemeinen durch die gleichen Buchstaben bezeichnet, so z. B. bedeutet $\mathfrak{m}^3$ den Rand von $\mathfrak{M}^4$, $\mathfrak{i}^1(\lambda)$ die Randkurve von $\mathfrak{I}^2(\lambda)$ usw. Zuweilen wird der Rand von $\mathfrak{L}^n$ auch durch $\boldsymbol{R}(\mathfrak{L}^n)$ bezeichnet. Ein Strich über einer offenen Mannigfaltigkeit weist darauf hin, daß sie samt ihrem Rand zu nehmen ist, so z. B. ist $\overline{\mathfrak{M}}^4 = \mathfrak{M}^4 + \mathfrak{m}^3$. Der Schnitt einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{C}^n$ mit der Ebene $z_k = \text{const}$ wird durch $\mathfrak{C}^n \cdot (z_k = \text{const})$ bezeichnet. Schließlich sei bemerkt, daß die Aussage „eine Funktion f sei in einem Bereiche $\mathfrak{L}^n$", $n < 4$, „regulär" stets so zu verstehen ist, daß ein $\mathfrak{L}^n$ im Innern enthaltender vierdimensionaler Bereich existiert, in dem f regulär ist.

Der einfachste Bereich mit einer Berandung, die aus analytischen Hyperflächen besteht, ist der Bizylinder $\mathfrak{E}^4$, der von den Hyperflächen

$\bar{\mathfrak{i}}_0^3$: $\quad |z_1| \leqq 1, \quad z_2 = e^{i\lambda_0}, \quad 0 \leqq \lambda_0 \leqq 2\pi,$

und

$\bar{\mathfrak{i}}_1^3$: $\quad z_1 = e^{i\lambda}, \quad |z_2| \leqq 1, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 2\pi,$

begrenzt ist.

Die Cauchysche Integralformel kann in diesem Falle folgendermaßen gewonnen werden: Sei $\{t_1, t_2\} \subset \mathfrak{E}^4$ fest, und $f(z_1, z_2)$ in $\overline{\mathfrak{E}}^4$ regulär. $\bar{\mathfrak{i}}_1^3 \cdot (z_2 = t_2)$, die Berandung von $\mathfrak{E}^4 \cdot (z_2 = t_2)$, ist der Kreis $|z_1| = 1$, und es gilt zunächst

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z_1, t_2)\, dz_1}{z_1 - t_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi} \frac{f(e^{i\lambda}, t_2)\, i e^{i\lambda} d\lambda}{e^{i\lambda} - t_1}.$$

Nun setzt sich $\bar{\mathfrak{i}}_1^3$ „lamellar" aus analytischen Flächen zusammen:

$$\bar{\mathfrak{i}}_1^3 = \sum_0^{2\pi} \bar{\mathfrak{I}}^2(e^{i\lambda}),$$

wobei $\bar{\mathfrak{I}}_1^2(\lambda)$ den Kreis $|z_2| \leqq 1$, $z_1 = e^{i\lambda} = \text{const}$ bedeutet. Bei festem λ ist $f(e^{i\lambda}, z_2)$ eine in diesem letzten Kreise reguläre Funktion. Es ist also für jedes λ:

$$f(e^{i\lambda}, t_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{i}_1^1(\lambda)} \frac{f(e^{i\lambda}, z_2)\, dz_2}{z_2 - t_2},$$

wobei $\mathfrak{i}_1^1(\lambda)$ den Rand des Gebietes $\bar{\mathfrak{I}}_1^2(\lambda)$, d. h. die Kreisperipherie $|z_2| = 1$ bedeutet. Aus den beiden Formeln erhält man

$$f(t_1, t_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{e^{i\lambda} - t_1} \int_{\mathfrak{i}_1^1(\lambda)} \frac{f(e^{i\lambda}, z_2)\, i e^{i\lambda} dz_2}{z_2 - t_2}.$$

In der vorliegenden Arbeit wird das soeben geschilderte Verfahren für solche (ganz im Endlichen gelegene) Bereiche $\mathfrak{M}^4$ durchgeführt, die von einer Deckelhyperfläche $\bar{\mathfrak{i}}_0^3 = \sum_{\lambda_0=0}^{2\pi} \bar{\mathfrak{I}}_0^3(\lambda_0)$ und von endlich vielen weiteren analytischen Hyperflächen $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$, $k = 1, 2, \ldots, n$ berandet werden. $\bar{\mathfrak{I}}_0^3(\lambda_0)$ bedeutet dabei einen zweidimensionalen Bereich in der Ebene $z_2 = e^{i\lambda_0}$, während $\bar{\mathfrak{i}}_k^3 = \sum_{\lambda=0}^{2\pi} \bar{\mathfrak{I}}_k^3(\lambda)$ ist, wo $\bar{\mathfrak{I}}_k^3(\lambda)$ eine analytische Fläche sein soll, die einen Teilbereich des Einheitskreises als Projektion auf die z_2-Ebene hat.

Um bequemer die Voraussetzungen über die Struktur der Bereiche zu formulieren, ist es zweckmäßig, die $\bar{\mathfrak{I}}_k^3(\lambda)$ stetig so zu Flächen $\bar{\mathfrak{H}}_k^3(\lambda)$ zu ergänzen, daß die Projektion jedes $\bar{\mathfrak{H}}_k^3(\lambda)$ auf die z_2-Ebene der gesamte Einheitskreis ist und jede Ergänzungsfläche

$$\mathfrak{A}_k^3(\lambda) = \bar{\mathfrak{H}}_k^3(\lambda) - \bar{\mathfrak{I}}_k^{(3)}(\lambda)$$

außerhalb von $\mathfrak{M}^4$ liegt. $\mathfrak{A}_k^3(\lambda)$ brauchen aber dabei keine analytischen Flächen zu sein.

Setzt man $\bar{\mathfrak{h}}_k^3 = \sum_{\lambda=0}^{2\pi} \bar{\mathfrak{H}}_k^3(\lambda)$, so wird der $z_1 z_2$-Raum durch das System der $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$ in eine Anzahl zusammenhängender Teile zerlegt, und $\mathfrak{M}^4$ erscheint als eine „Zelle dieser Zerlegung".

§ 2.

Sei $h(z_2, \lambda)$ eine im Bereiche $\bar{\mathfrak{C}}^2 \times \bar{\mathfrak{f}}^1$ [wo $\bar{\mathfrak{C}}^2$ den Kreis: $|z_2| \leqq 1$, $\bar{\mathfrak{f}}^1$ die Strecke: $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$ bedeutet] stetige, nach λ stetig differenzierbare[6]) komplexe Funktion der komplexen Veränderlichen z_2[7]) und des reellen Parameters λ. Ferner soll für jedes feste λ die Funktion $h(z_2, \lambda)$ in $\bar{\mathfrak{C}}^2$ eindeutig sein. Für jedes feste z_2 sei sie umkehrbar eindeutig für $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$, höchstens mit Ausnahme von $\lambda = 0$ und $\lambda = 2\pi$, wo ihre Werte übereinstimmen dürfen.

$$|h'(z_2, \lambda)| \equiv \left|\frac{dh(z_2, \lambda)}{d\lambda}\right|$$

sei überall von Null verschieden und beschränkt

$$[0 < a \leqq |h'(z_2, \lambda)| \leqq A].$$

---

[6]) Man könnte zulassen, daß $h(z_2, \lambda)$ für jedes z_2 endlich viele Ausnahmen besitzt, wo die rechts- und linksseitigen Ableitungen beschränkt, aber voneinander verschieden sind. Diese Punkte muß man dann als Ausnahmepunkte betrachten. Wir schließen der Kürze halber diese Schwierigkeit aus.

[7]) Die Forderung, daß h in einem Teile von $\bar{\mathfrak{C}}^2$ analytisch in z_2 ist, wird erst nachträglich ausgesprochen.

Im Falle, wenn

$$h(z_2, 0) = h(z_2, 2\pi) \tag{2,1}$$

ist, soll ebenfalls

$$h'(z_2, 0) = h'(z_2, 2\pi)$$

gelten.

Durchläuft $\{z_2, \lambda\}$ alle Punkte von $\mathfrak{C}^2 \times \Gamma^1$ bzw. $\mathfrak{C}^2 \times \bar{\Gamma}^1$ im Falle, wenn (2, 1) gilt, so bildet die Gesamtheit der dadurch erzeugten Punkte $\{z_1 = h(z_2, \lambda), z_2\}$ eine Hyperfläche, die mit $\mathfrak{h}^3$ bezeichnet sei. Sie setzt sich „lamellar" aus den Flächen

$$\mathfrak{h}^3 = \sum_{\lambda \subset \Gamma^1} \mathfrak{H}^2(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{h}^3 = \sum_{\lambda \subset \bar{\Gamma}^1} \mathfrak{H}^2(\lambda) \tag{2,2}$$

zusammen, wobei $\mathfrak{H}^2(\lambda)$ die Gesamtheit der Punkte $\{z_1 = h(z_2, \lambda), z_2\}$ ($|z_2| \leqq 1$, $\lambda = \text{const}$, reell) bedeutet.

Eine solche Hyperfläche $\mathfrak{h}^3$ besitzt eine wichtige Eigenschaft. *Jedem Punkt* $\{t_1, t_2\}$, $t_k = u_k + i v_k$, *von* $\mathfrak{h}^3$ *kann man einen Bereich* $\mathfrak{Z}^4$, *der den Punkt* $\{t_1, t_2\}$ *im Innern enthält, zuordnen, so daß* $\mathfrak{Z}^4$ *durch den in* $\mathfrak{Z}^4$ *liegenden Teil von* $\mathfrak{h}^3$ *in zwei zusammenhängende Teile zerlegt wird.*

Beweis. Schreibt man $z_1 = h(z_2, \lambda)$ in der Form $x_1 = R_1(x_2, y_2, \lambda)$, $y_1 = R_2(x_2, y_2, \lambda)$, so wird (den über h gemachten Voraussetzungen gemäß) mindestens eine der Funktionen $\frac{dR_1}{d\lambda}$ und $\frac{dR_2}{d\lambda}$ in einer Umgebung des Punktes $\{t_1, t_2\}$ nicht verschwinden. Nehmen wir an, daß etwa $\frac{dR_2}{d\lambda} \neq 0$ ist; man kann dann $\lambda = H_1(y_1, x_2, y_2)$ [$H_1(v_1, u_2, v_2) = \lambda^0$] schreiben, wobei H_1 in einer genügend kleinen Umgebung von $\{v_1, u_2, v_2\}$ eine eindeutige und stetige Funktion von y_1, x_2, y_2 ist und $\mathfrak{H}^2(\lambda^0)$ diejenige Lamelle ist, auf der $\{t_1, t_2\}$ liegt. Ersetzt man nun in $x_1 - R_1(x_2, y_2, \lambda) = 0$, λ durch H_1, so gelangen wir zu einer Funktion

$$G(x_1, y_1, x_2, y_2) \equiv x_1 - H(y_1, x_2, y_2),$$
$$H(y_1, x_2, y_2) \equiv R_1[x_2, y_2, H_1(y_1, x_2, y_2)],$$

wobei H in einer genügend kleinen Umgebung $\mathfrak{K}^4$ von $\{v_1, u_2, v_2\}$ ebenfalls stetig und eindeutig ist. *In* $\mathfrak{K}^4$ *verschwindet* G *überall auf* $\mathfrak{h}^3$ *und nur auf* $\mathfrak{h}^3$ [8]).

Wir konstruieren nun einen ganz im Innern von $\mathfrak{K}^4$ liegenden Zylinder $\bar{\mathfrak{Z}}^4$:

$$|x_1 - u_1| \leqq \delta, \quad (y_1 - v_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 + (y_2 - v_2)^2 \leqq \varepsilon.$$

Wählt man dabei zum (festen) δ ein so kleines ε, daß

$$|H(y_1, x_2, y_2) - H(v_1, u_2, v_2)| \leqq \frac{\delta}{2}$$

---

[8]) Der Beweis dieser Behauptung folgt leicht aus der Tatsache, daß sowohl $y_1 - R_2(x_2, y_2, \lambda)$ wie $\lambda = H_1(y_1, x_2, y_2)$ bei festem x_2, y_2 eindeutig umkehrbar ist.

ausfällt, wenn

$$(y_1 - v_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 + (y_2 - v_2)^2 \leqq \varepsilon$$

ist, so werden die Vorzeichen von G in den beiden Deckkugeln $\mathfrak{d}_p^3$, $p = 1, 2$, die in den Hyperebenen $x_1 = u_1 - \delta$ bzw. $x_1 = u_1 + \delta$ liegen, verschieden. $\mathfrak{Z}^4$ wird durch $G = 0$ in zwei Teile zerlegt, nämlich in Punkte, wo $G < 0$, und wo $G > 0$ ist, und wir wollen zeigen, daß diese Teilbereiche von $\mathfrak{Z}^4$ zusammenhängend sind. Sei nun etwa in $\mathfrak{d}_1^3$: $G < 0$, in $\mathfrak{d}_2^3$: $G > 0$. Da $H(y_1, x_2, y_2)$ eindeutig ist, wird somit jede Gerade:

$$u_1 - \delta \leqq x_1 \leqq u_1 + \delta, \qquad y_1, x_2, y_2 \text{ const}$$
$$[(y_1 - v_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 + (y_2 - v_2)^2 \leqq \varepsilon]$$

in zwei zusammenhängende Teile:

$$u_1 - \delta \leqq x_1 < H(y_1, x_2, y_2) \quad \text{und} \quad H(y_1, x_2, y_2) < x_1 \leqq u_1 + \delta$$

zerlegt, wobei im ersten Teile $G < 0$, im zweiten Teile $G > 0$ ist. Zwei beliebige Punkte $\{z_1^{(p)}, z_2^{(p)}\}$, $p = 1, 2$, des Bereiches $G < 0$ kann man durch einen ganz in diesem Teilbereich von $\mathfrak{Z}^4$ liegenden Kurvenzug verbinden, indem man durch die beiden Punkte die Strecken

$$u_1 - \delta \leqq x_1 \leqq x_1^{(p)} < H(y_1, x_2, y_2), \; y_1 = y_1^{(p)}, \; z_2 = z_2^{(p)}$$

legt, und die Punkte $\{u_1 - \delta, y_1^{(p)}, x_2^{(p)}, y_2^{(p)}\}$ durch einen in $\mathfrak{d}_1^3$ liegenden Kurvenzug verbindet. Analoges gilt für den Bereich $G > 0$.

§ 3.

Mit $\mathfrak{h}_0^3$ bezeichnen wir die Hyperfläche

(3, 1) $\mathfrak{h}_0^3$: $\qquad z_2 = e^{i\lambda}, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 2\pi; \qquad z_1$ beliebig.

$\mathfrak{h}_0^3$ ist im Sinne der im § 1 gegebenen Definition eine analytische Hyperfläche und läßt sich in der Form

$$\mathfrak{h}_0^3 = \sum_{\lambda=0}^{2\pi} \mathfrak{E}^2(e^{i\lambda})$$

darstellen, wo $\mathfrak{E}^2(e^{i\lambda})$ die Ebene $z_2 = e^{i\lambda}$, z_1 beliebig, bedeutet.

Es seien nebst $\mathfrak{h}_0^3$ endlich viele weitere Hyperflächen $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$, $k = 1, 2, \ldots, n$, der durch (2, 2) dargestellten Art gegeben, die alle einander nur längs (*zweidimensionaler*) Flächen schneiden mögen. Wir nehmen an, daß das System der $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, dergestalt den (vierdimensionalen) Raum zerlegt, daß mindestens ein zusammenhängendes Raumstück („Zelle der Zerlegung") vorhanden ist, dessen Berandung aus lauter $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$-Stücken, die

wir mit $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ bezeichnen, besteht, und das ganz im Endlichen liegt. Sein Inneres bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}^4$ und nehmen an, daß

$$\mathsf{P}_2[\mathfrak{M}^4] = \mathfrak{C}^2, \quad \mathsf{P}_2[\overline{\mathfrak{M}}^4] = \overline{\mathfrak{C}}^2$$

ist[9]). Über die Berandung $\mathfrak{m}^3$ von $\mathfrak{M}^4$ setzen wir voraus, daß in der Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{m}^3$ äußere Punkte von $\mathfrak{M}^4$ liegen[10]). $\mathfrak{M}^4$ hat mit keiner Fläche $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, Punkte gemein. Für $\mathfrak{m}^3$ gilt nach den eben gemachten Festsetzungen

$$\mathfrak{m}^3 = \sum_{k=0}^{n} \bar{\mathfrak{i}}_k^3. \tag{3, 2}$$

$\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ ist als Durchschnitt von zwei abgeschlossenen Mengen $\overline{\mathfrak{M}}^4$ und $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$ wieder abgeschlossen.

Wir unterscheiden auf $\mathfrak{m}^3$ drei Arten von Punkten:

I. J-Punkte, das sind Punkte, die zu einer einzigen $\bar{\mathfrak{i}}^3$-Hyperfläche gehören.

II. $K^{(2)}$-Punkte, das sind Punkte, die der (zweidimensionalen) Schnittfläche zweier $\bar{\mathfrak{i}}^3$ gehören, insofern sie nicht zu der unter III. definierten K_1-Klasse gehören.

III. $K^{(1)}$-Punkte, das sind Punkte, die in dem (im allgemeinen eindimensionalen) Durchschnitt dreier oder mehr $\bar{\mathfrak{i}}^3$ liegen.

Die $K^{(1)}$- und $K^{(2)}$-Punkte zusammen werden kurz als K-Punkte bezeichnet[11]).

---

[9]) Führt man an Stelle von $\bar{\mathfrak{h}}_0^3$ die Hyperfläche $\sum_{t \subset \mathfrak{b}^1} \mathfrak{E}^2(t)$, wo $\mathfrak{b}^1 = R[\mathfrak{B}^2]$ ist, so erhält man entsprechend $\mathsf{P}_2[\mathfrak{M}^4] = \mathfrak{B}^2$. Ist $\mathfrak{b}^1$ eine einfache Jordankurve, so kann man durch eine Transformation von der Form $Z_1 = z_1$, $Z_2 = \varphi(z_2)$ den allgemeinen Fall auf den hier betrachteten Spezialfall zurückführen.

[10]) Es würde keine wesentliche Erschwerung bedeuten, bei der Berandung von $\mathfrak{m}^3$ auch eine endliche Anzahl von „Schlitzhyperflächen" zuzulassen, die dann als Randstücke doppelt zu zählen sind.

[11]) Diese Einteilung ist auch von dem Standpunkte der Theorie der Funktionen zweier komplexer Veränderlichen wesentlich. Vgl. dazu auch die Arbeit: „Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande I", Crelles Journ. **169** (1933), S. 1—42 und den Teil II, der ebenda erscheint. Die J-Punkte sind im allgemeinen die dort eingeführten Limespunkte zweiter, die K-Punkte Limespunkte vierter Ordnung.

Im Zusammenhang damit liegt es nahe, die an einer anderen Stelle [Crelles Journ. **162** (1930), S. 258] gegebene Definition der bikonvexen Punkte etwas zu erweitern, indem man als einen bikonvexen Randpunkt einen solchen Punkt Q versteht, zu dem mindestens zwei im Gebiete reguläre und nicht verschwindende Funktionen f und g gibt, die in Q den Wert 0 haben, wobei die Flächen $f(z_1, z_2) = 0$ und $g(z_1, z_2) = 0$ in Q einen von Null verschiedenen Winkel miteinander bilden. Sind die $h_k(z_2, \lambda)$ in $\overline{\mathfrak{C}}^2$ regulär, so ist jeder K-Punkt bikonvex.

Mit A sollen schließlich die Punkte der Hyperflächen $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$ bezeichnet werden, die nicht zu $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ gehören. Sie liegen außerhalb von $\overline{\mathfrak{M}}^4$ und spielen in unseren Betrachtungen eine völlig nebensächliche Rolle.

Entsprechend (3, 1) kann man $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ in der Form

$$\bar{\mathfrak{i}}_k^3 = \sum_{\lambda \subset \bar{\mathfrak{l}}^1} \bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda) \tag{3,3}$$

darstellen, wobei $\bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)$ der Durchschnitt von $\bar{\mathfrak{H}}_k^2(\lambda)$ und $\overline{\mathfrak{M}}^4$, wenn $k \neq 0$, bzw. von $\mathfrak{E}^2(\lambda)$ und $\overline{\mathfrak{M}}^4$, wenn $k = 0$ ist, bedeutet.

Die Projektion $\mathsf{P}_2[\bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)]$ von $\bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)$, $k > 0$ auf die z_2-Ebene bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda)$. Wegen der Eindeutigkeit von $h_k(z_2, \lambda)$, $\lambda = \text{const}$, $k \neq 0$, ist $\bar{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda)$ schlicht und die Zuordnung $\{z_1, z_2\} \to \{z_2\}$ der Punkte von $\bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)$ zu $\bar{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda)$, ist *umkehrbar eindeutig*.

Sei nun $\mathfrak{b}_k^1(\lambda)$ die Randmenge von $\bar{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda)$ und $\mathfrak{i}_k^1(\lambda)$ bedeute die Gesamtheit der Originalpunkte von $\mathfrak{b}_k^1(\lambda)$ auf $\bar{\mathfrak{H}}_k^2(\lambda)$, (so daß $\mathsf{P}_2[\mathfrak{i}_k^1(\lambda)] = \mathfrak{b}_k^1(\lambda)$ ist). Schließlich sei $\mathfrak{i}_0^1(\lambda)$ die Randmenge von $\bar{\mathfrak{I}}_0^2(\lambda)$.

Wir wollen nun zeigen, daß $\mathfrak{i}_k^1(\lambda)$ *nur aus K-Punkten besteht.*

Zu diesem Zwecke zeigen wir, daß *die Projektion eines J-Punktes von* $\bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)$, $k \neq 0$, *ein innerer Punkt von* $\bar{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda)$ *ist, und jeder J-Punkt von* $\bar{\mathfrak{I}}_0^2(\lambda)$ *im Innern von* $\bar{\mathfrak{I}}_0^2(\lambda)$ *liegt.*

Für jeden J-Punkt eines $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$, $k \neq 0$ gilt $|z_2| < 1$[12]; seine Projektion liegt also im Innern des Einheitskreises.

Da die $\bar{\mathfrak{h}}_s^3$ abgeschlossen sind, können wir um den betreffenden J-Punkt $\{t_1 = h_k(t_2, \lambda), t_2\}$ von $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$ eine Hyperkugel $\mathfrak{K}^4$ vom Radius $r > 0$ legen, so daß in $\mathfrak{K}^4$ keine Punkte von $\bar{\mathfrak{h}}_s^3$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n$, $s \neq k$, liegen. Da $h_k(t_2, \lambda)$ stetig ist, existiert zu $\frac{r}{2}$ eine positive Konstante $\varepsilon < \frac{r}{2}$, so daß $|h_k(t_2^*, \lambda) - h_k(t_2, \lambda)| \leqq \frac{r}{2}$ ist, sobald $|t_2^* - t_2| \leqq \varepsilon$ wird. Jeder Punkt $\{t_1^* = h_k(t_2^*, \lambda), t_2^*\}$ von $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$ könnte dann nur entweder ein J- oder A-Punkt sein; denn er liegt in der Hyperkugel $\mathfrak{K}^4$. Letzteres ist aber unmöglich; denn konstruiert man den zu dem Punkte $\{t_1, t_2\}$ zugehörigen Zylinder $\mathfrak{Z}^4$, der so klein ist, daß er in $\mathfrak{K}^4$ liegt (vgl. S. 80), und die Funktion

$$G = x_1 - H(y_1, x_2, y_2),$$

so gibt es in jeder Umgebung von $\{t_1, t_2\}$ mindestens einen inneren Punkt $\{Z_1, Z_2\}$ von $\mathfrak{M}^4$, wo etwa $G > 0$ ist. Jeder Punkt $\{t_1^*, t_2^*\}$ von $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$, der in $\mathfrak{Z}^4$ liegt, muß ein J-Punkt sein; denn in jeder Umgebung von $\{t_1^*, t_2^*\}$ gibt es Punkte, wo $G > 0$ ist, und nach dem Ergebnis auf S. 81

[12]) Jeder Punkt von $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$, $k > 0$ mit $|z_2| = 1$ liegt in $\bar{\mathfrak{h}}_k^3 \cdot \mathfrak{h}_0^3$.

kann man sie durch einen Kurvenzug in $\mathfrak{Z}^4 \subset \mathfrak{R}^4$, der weder $\bar{\mathfrak{h}}_k^3$ noch ein anderes $\bar{\mathfrak{h}}_s^3$ durchdringt, mit $\{Z_1, Z_2\}$ verbinden.

Im Falle, wenn der betreffende J-Punkt in $\mathfrak{h}_0^3$ liegt, legt man um ihn eine genügend kleine Hyperkugel $\mathfrak{K}^4$, die keine weitere $\bar{\mathfrak{h}}_s^3$, $s \neq 0$, enthält. $\mathfrak{K}^4$ wird in zwei zusammenhängende Teile zerlegt, nämlich wo $|z_2| < 1$ und wo $|z_2| > 1$ gilt. Man schließt daraus analog wie früher, daß die Umgebung des betreffenden J-Punktes *in* $\mathfrak{I}_0^2(\lambda)$ aus lauter J-Punkten besteht.

Das Original eines inneren Punktes von $\bar{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda)$ kann dagegen ein K-Punkt sein. Wir werden solche K-Punkte als K_k^*-Punkte bezeichnen[13]).

Da nun jeder Punkt von $\mathfrak{i}_k^1(\lambda)$ ein K-Punkt ist, muß er gleichzeitig noch einem $\bar{\mathfrak{i}}_s^3$, $s = 0, 1, \ldots, n$, $s \neq k$ angehören.

Es gilt deshalb

$$\mathfrak{i}_k^1(\lambda) = \sum_{s=0}^{n} \bar{\mathfrak{i}}_{ks}^1(\lambda), \tag{3,4}$$

wo $\bar{\mathfrak{i}}_{ks}^1(\lambda) = \bar{\mathfrak{i}}_s^3 \cdot \mathfrak{i}_k^1(\lambda)$ bedeutet. Wir setzen schließlich:

$$\mathfrak{I}_k^2(\lambda) = \bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda) - \mathfrak{i}_k^1(\lambda)$$

und

$$\mathfrak{j}_k^3 = \sum_{\lambda \subset \Gamma^1} \mathfrak{I}_k^2(\lambda).$$

$\mathfrak{j}_k^3$ bildet die Gesamtheit aller J- und K_k^*-Punkte von $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$.

Im folgenden benötigen wir noch die Mengen

$$\bar{\mathfrak{G}}_{ks}^2 = \sum_{\lambda \subset \Gamma^1} \bar{\mathfrak{i}}_{ks}^1(\lambda), \qquad \mathfrak{G}_k^2 = \sum_{s=0}^{n} \bar{\mathfrak{G}}_{ks}^2. \tag{3,5}$$

Wir werden solche zusammenhängende Raumstücke $\mathfrak{M}^4$ betrachten, deren $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) analytische Hyperflächen sind, d. h. solche, die sich „lamellar" aus *analytischen Flächen* zusammensetzen lassen. Wir können dann annehmen, daß die in (3, 3) auftretenden $\bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)$ analytische Flächen sind, d. h. daß jede der am Anfang des § 2 angegebenen Funktionen $h_k(z_2, \lambda)$ für jedes feste λ die früher angegebenen Eigenschaften besitzt und *außerdem in dem Bereiche* $\bar{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda) = \mathsf{P}_2[\bar{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)]$ *eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen* z_2 *ist.*

Die analytischen Hyperflächen besitzen eine vom Standpunkte der Theorie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher wichtige Eigenschaft:

Eine in $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ *reguläre Funktion* $f(z_1, z_2)$ *nimmt ihr Betragsmaximum stets auf* $\mathfrak{G}_k^2$ *an.*

---

[13]) Ein Punkt, der in $\bar{\mathfrak{i}}_k^3 \cdot \bar{\mathfrak{i}}_s^3$ liegt und in $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ ein K_k^*-Punkt ist, braucht für $\bar{\mathfrak{i}}_s^3$ kein K_s^*-Punkt zu sein.

Beweis. $f(z_1, z_2)$ erreiche ihr Betragsmaximum hinsichtlich $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ etwa in $\overline{\mathfrak{I}}_k^3(\lambda^0)$ [vgl. (3, 3)]. Sei $k \neq 0$. Nach den am Anfang des Paragraphen gemachten Festsetzungen gilt aber in $\overline{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda^0)$:

$$f(z_1, z_2) = f[h_k(z_2, \lambda^0), z_2] = F(z_2),$$

wo $F(z_2)$ eine in $\overline{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda^0) = \mathsf{P}_2[\overline{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda^0)]$ reguläre Funktion von z_2 ist, und daher ihr Betragsmaximum in einem Randpunkte $\{t_2\}$ von $\overline{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda^0)$ annimmt, dessen Originalbild $\{t_1 = h_k(t_2, \lambda^0), t_2\} \subset \mathfrak{G}_k^2$ ist.

Erreicht $f(z_1, z_2)$ ihr Betragsmaximum in $\overline{\mathfrak{I}}_0^2(\lambda^0)$, so muß es in einem Punkte von $\mathfrak{i}_0^1(\lambda^0)$ angenommen werden, da $f(z_1, e^{i\lambda_0})$ in $\overline{\mathfrak{I}}_0^2(\lambda^0)$ regulär ist. Da $\mathfrak{i}_0^1(\lambda^0)$ aus lauter K-Punkten besteht (die mindestens noch einer Hyperfläche $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$, $k \neq 0$, angehören), so sind wir auf den bereits erledigten Fall zurückgeführt. Es folgt somit:

Die auf $\mathfrak{m}^3$ *liegende Menge*

$$\mathfrak{F}^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{G}_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \mathfrak{G}_{ks}^2 \tag{3, 6}$$

ist eine Maximummannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}^4$: denn ist $f(z_1, z_2)$ in $\overline{\mathfrak{M}}^4$ regulär, so nimmt es sein Betragsmaximum am Rande $\mathfrak{m}^3$, also nach (3, 2) in irgendeiner Hyperfläche $\bar{\mathfrak{i}}_k^3$ und somit auf dem Bestandteil $\mathfrak{G}_k^2$ von $\mathfrak{F}^2$ an.

Um uns nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, machen wir noch weitere Voraussetzungen über die Flächen $\overline{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)$ und über die Schnitte $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$, nämlich:

1. Jedes $\overline{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda)$ besteht aus endlich vielen (höchstens r) zusammenhängenden Komponenten. Jede dieser Komponenten ist

entweder ein isolierter Punkt,

oder ein Bereich, der von endlich vielen (höchstens l) einfach geschlossenen Kurven begrenzt ist, deren jede — mit Ausnahme von höchstens endlich vielen (etwa m) Ecken mit nicht verschwindenden Winkeln — überall eine Tangente besitzt.

Dabei sollen r, l, m von λ unabhängig sein[14]).

Bevor die Voraussetzungen über die $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ formuliert werden, soll eine Bemerkung über die Randpunkte[15]) von $\mathfrak{M}^4$ und $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ gemacht werden. *Ist* $\{t_1\}$ *ein Randpunkt von* $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$, *so ist der Punkt* $\{t_1, t_2\}$ *offenbar ein Randpunkt von* $\mathfrak{M}^4$. Umgekehrt kann man nur behaupten, *daß jeder Randpunkt von* $\mathfrak{M}^4$, *der ein J-Punkt ist, ein*

---

[14]) Die Voraussetzung **1** hat zur Folge, daß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}^2$ eine Fläche wird.

[15]) Unter einem Randpunkt der Menge soll jeder Punkt verstanden werden, der weder innerer noch äußerer Punkt der Menge ist.

Randpunkt von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ *ist, in dessen Umgebung äußere Punkte von* $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ *liegen*[16]).

Beweis. Zu jedem J-Punkte haben wir einen Bereich $\mathfrak{Z}^4$ und eine Funktion $G \equiv x_1 - H(y_1, x_2, y_2)$ (vgl. S. 80) konstruiert, wobei in $\mathfrak{Z}^4$ das Gebiet, wo $G > 0$ ist, zum Innern von $\mathfrak{M}^4$ gehören möge. Die Kurve $x_1 - H(y_1, u_2, v_2)$ $[t_2 = u_2 + i v_2]$ zerlegt den in $\mathfrak{Z}^4$ liegenden Teil der Ebene $z_2 = t_2$ in zwei zusammenhängende Teile, nämlich, wo $G > 0$ bzw. $G < 0$ ist. Da nach den auf der S. 82 gemachten Voraussetzungen in der Umgebung von $\{t_1, t_2\}$ sowohl äußere wie auch innere Punkte von $\mathfrak{M}^4$ liegen, ist in $\mathfrak{Z}^4$ durch $G < 0$ das Äußere von $\mathfrak{M}^4$ gegeben.

Daher gehören in $\mathfrak{Z}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ die Punkte, wo $G > 0$ bzw. $G < 0$ zu dem Inneren bzw. zu dem Äußeren von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ und in jeder Umgebung von $\{t_1\}$ (das auf der Kurve $G = 0$ liegt) gibt es in der Ebene $z_2 = t_2$ beide Arten von Punkten.

Wir setzen ferner voraus:

2 a. $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$, $|t_2| < 1$ ist nicht leer und besteht höchstens aus endlich vielen Komponenten, deren Zusammenhangszahlen ebenfalls endlich sind. Die Berandung $\boldsymbol{R}[\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)]$ soll aufgebaut sein aus endlich vielen (offenen) J-Bogen, d. h. solchen Kurvenstücken, die aus J-Punkten zusammengesetzt sind, aus endlich vielen (abgeschlossenen) K-Bogen und endlich vielen K-Punkten. Dabei soll ein K-Bogen (eventuell mit Ausnahme seiner Endpunkte) nur *zwei* Hyperflächen $\mathfrak{i}^3$ angehören. Nach dem Vorstehenden gehören die J-Bogen zu dem Außenrand[17]) von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$, während die K-Bogen zum Teil auch Schlitze sein können. Es ist

$$\boldsymbol{R}[\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)] \subset \boldsymbol{R}[\overline{\mathfrak{M}}^4 \cdot (z_2 = t_2)],$$

dagegen kann $\boldsymbol{R}[\overline{\mathfrak{M}}^4 \cdot (z_2 = t_2)]$ weitere K-Punkte enthalten.

$$\boldsymbol{R}[\overline{\mathfrak{M}}^4 \cdot (z_2 = t_2)] - \boldsymbol{R}[\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)]$$

soll aus endlich vielen K-Bogen und aus endlich vielen K-Punkten bestehen.

Die zu dem Außenrand von $\boldsymbol{R}[\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)]$ gehörigen K-Bogen werden als *K-Bogen erster Art*, die in $\boldsymbol{R}[\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)]$ als Schlitze auftretenden oder zu $\{\boldsymbol{R}[\overline{\mathfrak{M}}^4 \cdot (z_2 = t_2)] - \boldsymbol{R}[\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)]\}$ gehörigen als *K-Bogen zweiter Art* bezeichnet.

---

[16]) Dagegen können K-Punkte existieren, die keine Randpunkte von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ sind.

[17]) Als Außenrand bezeichnen wir die Menge der Randpunkte, in deren Umgebung auch äußere Punkte auftreten.

Die übrigen Bestandteile von $\boldsymbol{R}[\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)]$ bezeichnen wir kurz als Schlitzpunkte oder Schlitzbogen.

Die gleichen Voraussetzungen wie für $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ sollen für das Innere von $\mathfrak{m}^3 \cdot (z_2 = t_2)$, $|t_2| = 1$ gelten, jedoch sollen der Einfachheit halber keine Schlitzbogen zugelassen werden. Ebenso soll die Randmenge von $\mathfrak{m}^3 \cdot (z_2 = t_2)$, $|t_2| = 1$ aus endlich vielen K-Bogen erster und zweiter Art und höchstens endlich vielen isolierten Punkten bestehen.

2 b. In jedem Schnitt $\overline{\mathfrak{M}}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ kommen höchstens endlich viele $K^{(1)}$- und K^*-Punkte vor. [Bezüglich der Definition von K^* siehe S. 84.]

2 c. Ein J-Bogen, der in der Ebene $z_2 = t_2$ liegt, ist durch

$$z_1 = h_k(t_2, \lambda), \qquad \lambda^1 < \lambda < \lambda^2,$$

ein K-Bogen durch

$$z_1 = h_k(t_2, \lambda_k) = h_s(t_2, \lambda_s), \qquad \lambda_k^1 \leqq \lambda_k \leqq \lambda_k^2, \quad \lambda_s^1 \leqq \lambda_s \leqq \lambda_s^2,$$

gegeben. Wir nehmen nun an, daß bei den J-Bogen und bei den K-Bogen der ersten Art den wachsenden λ (bzw. λ_k und λ_s) derjenige Umlaufssinn entspricht, bei dem das Innere [d. i. $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$] zur Linken liegt, während bei den K-Bogen zweiter Art den wachsenden λ_k und λ_s der entgegengesetzte Umlaufssinn entsprechen soll.

§ 4.

Zur Vereinheitlichung des nachfolgenden Beweises benutzen wir das „Integral“ $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{p}_1(\lambda)} \frac{g(z_1, z_2)\, dz_2}{z_2 - t_2}$ [18]) mit $t_2 \subset \mathsf{P}_2[\mathfrak{p}^1(\lambda)]$. Dabei soll jeder Punkte $\{z_1, z_2\}$ auf $\mathfrak{p}^1(\lambda)$ liegen, und wir setzen voraus, daß $\mathsf{P}_2[\mathfrak{p}^1(\lambda)]$ bis auf endlich viele Eckpunkte mit nicht verschwindenden Winkeln überall eine Tangente besitzt. Wir definieren es [im Anschluß an Plemelj [19])] als

$$\lim_{t_2^{(n)} \to t_2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{p}^1(\lambda)} \frac{g(z_1, z_2)(z_2 - t_2)\, dz_2}{(z_2 - t_2)^2 - (t_2^{(n)} - t_2)^2}; \tag{4, 1}$$

---

[18]) Unter $\int\limits_{\mathfrak{p}^1} l(z_1, z_2)\, dz_2$, wo $\mathfrak{p}^1$ eine Kurve auf $\overline{\mathfrak{H}}^2$ bedeutet, wird natürlich das Integral $\int\limits_{\mathsf{P}_2[\mathfrak{p}^1]} l[h(z_2, \lambda), z_2]\, dz_2$ verstanden.

[19]) J. Plemelj, Ein Ergänzungssatz zu Cauchyscher Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatshefte f. Math. u. Phys. 19 (1908), S. 205—210. Es bietet keine Schwierigkeit, die Betrachtung von Plemelj, die sich auf die überall differenzierbaren Kurven beziehen, auf den hier auftretenden Fall des Vorhandenseins endlich vieler Ecken zu übertragen.

wo die $\{t_2^{(n)}\}$ eine Punktfolge bedeuten, die auf der inneren Normalen bzw. Winkelhalbierenden von $\mathsf{P}_2[\mathfrak{p}^1(\lambda)]$ im Punkte t_2 liegt. Ist ferner $\mathfrak{p}^0$ ein isolierter Punkt, so setzen wir fest, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{p}^0}\frac{g(z_1,z_2)\,dz_2}{z_2-t_2} \tag{4, 2}$$

den Wert $\frac{1}{2}g(z_1, z_2)$ oder Null hat, je nachdem, ob $t_2 = z_2$ oder $t_2 \neq z_2$ ist.

Es gilt dann der verallgemeinerte

Cauchysche Satz. *Es sei* $\{t_1, t_2\} \subset \mathfrak{H}_k^2(\lambda)$, $k \neq 0$ *(d. h.* $t_1 = h_k(t_2, \lambda)$*) oder* $|t_2| > 1$ *und dann* t_1 *beliebig; ferner sei* $\mathfrak{i}^1(\lambda)$ *eine auf* $\mathfrak{H}_k^2(\lambda)$ *liegende Mannigfaltigkeit, deren Projektion der Rand eines Bereiches von der in* **1** *beschriebenen Art ist. Es gilt dann für jedes in* $\overline{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda)$ *reguläre* $g(z_1, z_2)$*:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{i}^1(\lambda)}\frac{g(z_1,z_2)\,dz_2}{z_2-t_2} &= g(t_1,t_2), \quad \text{wenn } \{t_1,t_2\}\subset\mathfrak{I}_k^2(\lambda) \text{ ist,}\\ &= \tfrac{1}{2}g(t_1,t_2), \quad \text{„ } \{t_1,t_2\}\subset\mathfrak{i}_k^1(\lambda) \text{ „}\\ &= 0, \quad \text{„ } \{t_1,t_2\}\subset\mathfrak{A}_k^2(\lambda) \text{ „}\\ &\qquad \text{oder } |t_2|>1 \text{ „.}\end{aligned} \tag{4, 3}$$

Beweis. Ersetzt man z_1 durch $h_k(z_2, \lambda)$ [vgl. dazu den Anfang des § 3], so geht (4, 3) in ein Linienintegral längs der Kurve $\mathfrak{b}_k(\lambda) = \mathsf{P}_2[\mathfrak{i}_k^1(\lambda)]$ über, in dessen Innern $\mathfrak{B}_k^2(\lambda)$ der Integrandenfaktor $g[h_k(z_2, \lambda), z_2]$ regulär ist. Nach dem Cauchyschen Residuensatz nebst den in (4, 1) und (4, 2) ausgesprochenen Festsetzungen ist dieses Integral gleich $g[h_k(t_2, \lambda), t_2]$, $\frac{1}{2}g[h_k(t_2, \lambda), t_2]$ oder 0, je nachdem, ob t_2 im Innern, auf dem Rande oder außerhalb von $\mathfrak{B}_k^2(\lambda)$ liegt, wodurch (4, 3) bewiesen ist.

§ 5.

Zur Abkürzung werden wir im folgenden setzen:

$$N_k(t_1,t_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\overline{\mathfrak{i}^1}}\frac{d\lambda}{h_k(t_2,\lambda)-t_1}\,i[h_k(t_2,\lambda),t_2],$$

$$i[h_k(t_2,\lambda),t_2] \equiv \int_{\mathfrak{i}_k^1(\lambda)}\frac{f(z_1,z_2)\,h_k'(z_2,\lambda)\,dz_2}{z_2-t_2}, \qquad h_k'(z_2,\lambda) \equiv \frac{dh_k(z_2,\lambda)}{d\lambda}. \tag{5, 1}$$

Satz. *Ist* $f(z_1, z_2)$ *eine in* $\overline{\mathfrak{M}}^4$ *reguläre Funktion der beiden komplexen Veränderlichen* z_1, z_2*, so ist*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} N_k(t_1,t_2) &= f(t_1,t_2), \text{ wenn } \{t_1,t_2\}\subset\mathfrak{M}^4 \text{ ist,}\\ &= 0, \quad \text{„ } \{t_1,t_2\}\not\subset\overline{\mathfrak{M}}^4 \text{ „.}\end{aligned} \tag{5, 2}$$

Beweis. Nach der Voraussetzung 1 dürfen wir zur Auswertung von $\mathfrak{i}[h_k(t_2,\lambda), t_2]$ den verallgemeinerten Cauchyschen Satz heranziehen. Es ist $\mathfrak{i}[h_k(t_2,\lambda), t_2]$

in jedem J- oder K_k^*-Punkte

gleich $f[h_k(t_2,\lambda), t_2]\, h_k'(t_2,\lambda)$,

in jedem K-Punkte (K_k^*-Punkte ausgenommen)

gleich $\frac{1}{2} f[h_k(t_2,\lambda), t_2]\, h_k'(t_2,\lambda)$,

in jedem A-Punkte

gleich 0.

Es ist somit für $|t_2| < 1$

$$(5,3)\qquad N_k(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int \frac{f[h_k(t_2,\lambda), t_2]\, h_k'(t_2,\lambda)\, d\lambda}{h_k(t_2,\lambda) - t_1} + \frac{1}{2}\int \frac{f[h_k(t_2,\lambda), t_2]\, h_k'(t_2,\lambda)\, d\lambda}{h_k(t_2,\lambda) - t_1}\right],$$

wobei das erste Integral über alle J-Bogen und K_k^*-Punkte von $\bar{\mathfrak{i}}_k^3 \cdot (z_2 = t_2)$, das zweite Integral über alle K-Punkte (K_k^*-Punkte ausgenommen) von $\bar{\mathfrak{i}}_k^3 \cdot (z_2 = t_2)$ zu erstrecken ist. Nun ist der Integrand beschränkt, wir können also endlich viele Punkte stets vernachlässigen, brauchen also nach 2 b das erste Integral nur über alle J-Bogen, das zweite über alle K-Bogen zu erstrecken.

$\mathfrak{m}^3 \cdot (z_2 = t_2)$ besteht aus Bogen und Punkten von der Form $z_1 = h_k(t_2,\lambda)$. Bezeichnet man mit Z_1 den laufenden Punkt auf einem J- oder K-Bogen, so kann man (5, 3) auch in der Form

$$(5,4)\qquad N_k(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int \frac{f(Z_1,t_2)\, dZ_1}{Z_1 - t_1} + \frac{1}{2}\int \frac{f(Z_1,t_2)\, dZ_1}{Z_1 - t_1}\right]$$

schreiben, wobei die Integration, wie oben angegeben, über J- und K-Bogen von $\bar{\mathfrak{i}}_k^3 \cdot (z_2 = t_2)$ zu erstrecken ist. Jeder J-Bogen liegt auf einer einzigen Hyperfläche $\mathfrak{i}_k^3$, jeder K-Bogen liegt auf zwei, mit Ausnahme der $K^{(1)}$-Punkte, die höchstens zu n Hyperflächen gehören.

Dementsprechend wird in $\sum_{k=1}^{n} N_k(t_1,t_2)$ längs jeden J-Bogens *einmal*, längs jeden K-Bogens *zweimal* integriert [da er in zwei verschiedenen $N(t_1,t_2)$ auftritt].

Nach 2 c werden bei den K-Bogen erster Art die beiden Integrale addiert, während sie sich bei den K-Bogen zweiter Art gerade aufheben[20]),

---

[20]) Infolge der von uns gemachten Voraussetzungen [Eindeutigkeit von f im (abgeschlossenen) $\overline{\mathfrak{M}}^4$] nimmt f auf beiden Ufern des Schlitzes die gleichen Werte an. Es würde keine Schwierigkeit bedeuten, zuzulassen, daß die Randwerte auf beiden Ufern verschieden sind. Das Integral würde dann nicht über den Außenrand, sondern auch über die beiden Ufer des Schlitzes zu erstrecken sein.

also bei $\sum_{k=1}^{n} N_k(t_1, t_2)$ einfach weggelassen werden können. Ebenso dürfen die $K^{(1)}$-Punkte, da sie nach **2 b** in endlicher Zahl vorkommen und f beschränkt ist, unberücksichtigt bleiben. In der Summe $\sum_{k=1}^{n} N_k(t_1, t_2)$ treten also nur die über den Außenrand von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$, der aus J-Bogen und K-Bogen erster Art besteht, erstreckten Integrale tatsächlich auf.

Der Außenrand[21]) von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ besteht (abgesehen eventuell von endlich vielen $K^{(1)}$-Punkten) aus abgeschlossenen J- und K-Bogen erster Art.

Nach **2 c** ist dabei der den wachsenden λ entsprechende Umlaufssinn derjenige, bei dem das Innere zur Linken liegt.

Es ist deshalb

$$\sum_{k=1}^{n} N_k(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A R [\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)]} \frac{f(Z_1, t_2)\, dZ_1}{Z_1 - t_1} \tag{5,5}$$

Ist nun $\{t_1, t_2\} \subset \mathfrak{M}^4$, so ist $t_1 \subset \mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ und, da $f(z_1, t_2)$ in $\overline{\mathfrak{M}^4} \cdot (z_2 = t_2)$ regulär ist, ist (5, 5) gleich $f(t_1, t_2)$; ist $\{t_1, t_2\} \not\subset \overline{\mathfrak{M}^4}$, so ist $t_1 \not\subset \{R[\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)] + \mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)\}$ und (5, 5) gleich 0, womit für $|t_1| < 1$ der Satz bewiesen ist.

Ist $|t_2| > 1$, so sind alle $N_k(t_1, t_2)$ nach (4, 3) gleich Null, so daß man auch in diesem Falle zu dem in (5, 2) angegebenen Ergebnis gelangt.

Ist schließlich $|t_2| = 1$, $t_1 \not\subset \mathfrak{m}^3 \cdot (z_2 = t_2)$, so folgern wir analog wie im ersten Falle, daß

$$\sum_{k=1}^{n} N_k(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi i} \int_{A R [\mathfrak{m}^3 \cdot (z_2 = t_2)]} \frac{f(Z_1, t_2)\, dZ_1}{Z_1 - t_1} \tag{5,6}$$

ist, und da t_1 ein äußerer Punkt von $\mathfrak{m}^3 \cdot (z_2 = t_2)$ ist, ist (5, 6) gleich Null, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

§ 6.

Wir gehen nun dazu über, die in (5, 2) auftretenden zweifachen Integrale durch Doppelintegrale zu ersetzen.

Wir betrachten dabei der Einfachheit halber nur den Fall: $\{t_1, t_2\} \subset \mathfrak{M}^4$ und machen die zusätzlichen Annahmen:

3. Die $h_k(z_2, \lambda)$ sind für jedes feste λ in $|z_2| \leqq 1$ regulär.

---

[21]) Der Außenrand von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ in der Ebene $z_2 = t_2$ wird mit $A R [\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)]$ bezeichnet.

Ferner setzen wir über $\mathfrak{F}^2$ voraus:

4a. die Projektion von $\mathfrak{F}^2$ auf die z_2-Ebene läßt ein (abgeschlossenes Teilgebiet $\overline{\mathfrak{T}}^2$ von $|z_1| < 1$ frei;

4b. die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{G}^2_{ks}$ wo (neben der Definitionsgleichung $z_1 = h_k(z_2, \lambda_k) = h_s(z_2, \lambda_s)$ gleichzeitig)

$$\frac{d\,h_k(z_2, \lambda_k)}{d\,z_2} = \frac{d\,h_s(z_2, \lambda_s)}{d\,z_2} \tag{6,1}$$

gilt, ist auf jedem $\mathfrak{i}^1_{ks}(\lambda)$ endlich.

Wir werden solche Punkte, wo (6, 1) gilt, als P_{ks}-Punkte bezeichnen.

4c. Jeder K-Punkt von $\overline{\mathfrak{i}}^3_k \cdot \overline{\mathfrak{i}}^3_s$, $s \neq k$, der für $\overline{\mathfrak{i}}^3_k$ ein K^*_k-Punkt ist, ist auch für $\overline{\mathfrak{i}}^3_s$ ein K^*_s-Punkt. (Wegen der Definition der K^*-Punkte vgl. S. 84.)

Aus **4a** folgt, daß ein (abgeschlossenes) Teilgebiet $\overline{\mathfrak{T}}^4 \subset \mathfrak{M}^4$ gibt, so daß die Projektionen $\mathsf{P}_2(\overline{\mathfrak{T}}^4)$ und $\mathsf{P}_2(\mathfrak{F}^2)$ von $\overline{\mathfrak{T}}^4$ und $\mathfrak{F}^2$ auf die z_2-Ebene punktfremd sind.

Aus **4c** ergibt sich dagegen, daß

$$\mathfrak{G}^2_{ks} = \overline{\mathfrak{i}}^3_k \cdot \overline{\mathfrak{i}}^3_s - \sum K^*_k = \overline{\mathfrak{i}}^3_k \cdot \overline{\mathfrak{i}}^3_s - \sum K^*_s = \mathfrak{G}^2_{sk} \tag{6,2}$$

ist.

Mit $\mathfrak{G}^{\dagger 2}_{ks}$ bezeichnen wir diejenige Mannigfaltigkeit, die aus $\mathfrak{G}^2_{ks}$ durch Wegnehmen aller P_{ks}-Punkte entsteht. Man kann sie nach (3, 5) in der Form $\mathfrak{G}^{\dagger 2}_{ks} = \sum_{\lambda_k \subset \Gamma} \mathfrak{i}^{\dagger 1}_{ks}(\lambda_k) = \sum_{\lambda_s \subset \Gamma} \mathfrak{i}^{\dagger 1}_{sk}(\lambda_s)$ darstellen, wobei $\mathfrak{i}^{\dagger 1}_{ks}(\lambda_k)$ aus $\overline{\mathfrak{i}}^1_{ks}(\lambda_k)$ durch Wegnehmen der auf $\overline{\mathfrak{i}}^1_{ks}(\lambda_k)$ liegenden P_{ks}-Punkte entsteht.

Den im § 2 gemachten Voraussetzungen gemäß ist $h'_k(z_2, \lambda_k)$ in $\overline{\mathfrak{C}}^2 : |z_2| \leqq 1$ (gleichmäßig in λ_k) beschränkt und ebenso $f(z_1, z_2)$ in $\overline{\mathfrak{M}}^4$. Da $\{t_1, t_2\}$ ein fester Punkt von $\mathfrak{M}^4$ ist, so nimmt $h_k(t_2, \lambda_k)$ nur Werte an, die auf der Kurve $\overline{\mathfrak{h}}^3_k \cdot (z_2 = t_2)$, d. h. am Rande oder außerhalb von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$ liegen, andererseits ist $t_1 \subset \mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = t_2)$, und also ist $\frac{1}{h_k(t_2, \lambda_k) - t_1}$ ebenfalls (in λ_k gleichmäßig) beschränkt. Der Integrand in $N_k(t_1, t_2)$ [vgl. (5, 1)] kann also nur dann unendlich werden, wenn Punkte von $\mathfrak{G}^2_k$ auftreten, deren z_2-Koordinate den Wert t_2 hat. (Es gibt stets solche $\{t_1, t_2\} \subset \mathfrak{M}^4$, für die dies tatsächlich eintritt, falls es auf $\mathfrak{F}^2$ Punkte gibt, für die $|z_2| < 1$ ist.) Nach **4a** kann dies für $\{t_1, t_2\} \subset \overline{\mathfrak{T}}^4$ nicht eintreten, und da $\overline{\mathfrak{T}}^4$ abgeschlossen ist, ist der Integrand von $N_k(t_1, t_2)$ für alle $\{t_1, t_2\} \subset \overline{\mathfrak{T}}^4$ gleichmäßig beschränkt. Bei den weiteren Betrachtungen wird zunächst stets $\{t_1, t_2\} \subset \overline{\mathfrak{T}}^4$ vorausgesetzt.

Entsprechend (3, 4) gilt die Zerlegung[22])

$$(6,3)\qquad N_k(t_1,t_2)=\sum_{s=1}^{n}N_{ks}(t_1,t_2),$$

$$N_{ks}(t_1,t_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\bar{\mathfrak{i}}^1}\frac{d\lambda}{h_k(t_2,\lambda)-t_1}\int_{\bar{\mathfrak{i}}^1_{ks}(\lambda)}\frac{f(z_1,z_2)\,h_k'(z_2,\lambda)\,dz_2}{z_2-t_2},$$

woraus

$$(6,4)\qquad \sum_{k=1}^{n}N_k(t_1,t_2)=\sum_{k=1}^{n}N_{k0}(t_1,t_2)+\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}M_{ks}(t_1,t_2),$$

$$M_{ks}(t_1,t_2)=N_{ks}(t_1,t_2)+N_{sk}(t_1,t_2)$$

folgt. Nach § 3 gilt für jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{G}}^2_{ks}$, $k\neq s$, $k>0$, $s>0$

$$(6,5)\quad p_k(z_1,z_2;\lambda_k)\equiv z_1-h_k(z_2,\lambda_k)=0,\quad p_s(z_1,z_2,\lambda_s)\equiv z_1-h_s(z_2,\lambda_s)=0,$$

wobei in jedem Punkt von $\mathfrak{G}^{\dagger 2}_{ks}$

$$\frac{\partial(p_k,p_s)}{\partial(z_1,z_2)}=\frac{d[h_k(z_2,\lambda_k)-h_s(z_2,\lambda_s)]}{dz_2}\neq 0$$

ist. Daher kann — unter Anwendung des Satzes über implizite Funktionen und des Heine-Borelschen Theorems — jede Fläche $\mathfrak{G}^{\dagger 2}_{ks}$ durch abzählbar viele Flächenstücke $\mathfrak{R}^2_m$ überdeckt werden, so daß in jedem $\mathfrak{R}^2_m$ für z_1 und z_2 die Parameterdarstellung

$$(6,6)\qquad z_1=\psi(\lambda_k,\lambda_s),\quad z_2=\varphi(\lambda_k,\lambda_s)$$

gilt, wo ψ und φ in dem $\mathfrak{R}^2_m$ entsprechenden Urgebiete $\mathfrak{U}^2_m$ der $\lambda_k\,\lambda_s$-Ebene eindeutige und stetig differenzierbare Funktionen von λ_k und λ_s sind. Der Bereich $\sum_{m=1}^{\infty}\mathfrak{U}^2_m$ ist eine (eventuell ganz oder zum Teil mehrfach überdeckte) Überlagerungsfläche des Quadrates $0\leqq\lambda_k\leqq 2\pi$, $0\leqq\lambda_s\leqq 2\pi$, die aber keine Verzweigungspunkte im Innern enthält. Wir setzen

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mathfrak{U}^2_m=\mathfrak{B}^2_{ks}=\sum_{\lambda_k\subset\bar{\mathfrak{i}}^1}\mathfrak{u}^1_{ks}(\lambda_k)=\sum_{\lambda_s\subset\bar{\mathfrak{i}}^1}\mathfrak{u}^1_{sk}(\lambda_s),$$

wobei $\mathfrak{u}^1_{ks}(\lambda_k)$ [bzw. $\mathfrak{u}^1_{sk}(\lambda_s)$] eine eventuell ganz oder zum Teil mehrfach überdeckte Überlagerungsmenge der Strecke $0\leqq\lambda_s\leqq 2\pi$ [bzw. $0\leqq\lambda_k\leqq 2\pi$] bedeutet. Führt man an Stelle von z_1, z_2 die neuen Veränderlichen λ_k und λ_s ein, so schreibt sich die bei *festem* z_2 genommene Ableitung $h_k'(z_2,\lambda)$ für jeden Punkt $\{z_1,z_2\}\subset\mathfrak{G}^{\dagger 2}_{ks}$

$$(6,7)\qquad h_k'(z_2,\lambda_k)\equiv\frac{dh_k(z_2,\lambda_k)}{d\lambda_k}=\frac{\partial h_k(\varphi,\lambda_k)}{\partial\lambda_k},$$

$$h_s'(z_2,\lambda_s)\equiv\frac{dh_s(z_2,\lambda_s)}{d\lambda_s}=\frac{\partial h_s(\varphi,\lambda_s)}{\partial\lambda_s}.$$

[22]) Wegen der Beschränktheit von $f(z_1,z_2)$ spielen die (endlich vielen) Punkte $\mathfrak{i}^3_k\cdot\bar{\mathfrak{i}}^3_s\cdot\mathfrak{i}^3_p$ für die Integration keine Rolle.

Da ferner die Integration in dem zweiten in $N_{ks}(t_1, t_2)$ auftretenden Integral längs der Kurve $\mathfrak{P}_2[i^1_{ks}(\lambda_k)]$, $\lambda_k = const$, erfolgt, ist in $N_{ks}(t_1, t_2)$:

$d z_2 = \frac{d\,\varphi(\lambda_k, \lambda_s)}{d\,\lambda_s} d\,\lambda_s$ und ebenso in $N_{sk}(t_1, t_2)$: $d z_2 = \frac{d\,\varphi(\lambda_k, \lambda_s)}{d\,\lambda_k} d\,\lambda_k$.

Zwischen diesen Größen *gilt die* für das Folgende wichtige *Identität*

$$\frac{\partial h_s(\varphi, \lambda_s)}{\partial \lambda_s} \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda_k} + \frac{\partial \lambda_s(\varphi, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda_s} = 0. \tag{6, 8}$$

Beweis. Definitionsgemäß ist in jedem Punkte $\{z_1, z_2\} \subset \mathfrak{G}^{\dagger 2}_{ks}$

$$h_k[\varphi(\lambda_k, \lambda_s), \lambda_k] - h_s[\varphi(\lambda_k, \lambda_s), \lambda_s] \equiv 0, \tag{6, 9}$$

woraus

$$\frac{\partial [h_k(\varphi_1, \lambda_k) - h_s(\varphi, \lambda_s)]}{\partial \varphi} \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda_s} = \frac{\partial h_s(\varphi, \lambda_s)}{d\,\lambda_s},$$

$$\frac{\partial [h_k(\varphi, \lambda_k) - h_s(\varphi, \lambda_s)]}{\partial \varphi} \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda_k} = -\frac{\partial h_k(\varphi, \lambda_k)}{\partial \lambda_k}$$

folgt. Multipliziert man die erste Gleichung mit $\frac{d\varphi}{d\,\lambda_k}$, die zweite mit $\frac{d\,\varphi}{d\,\lambda_s}$, so erhält man durch Subtraktion die Identität (6, 8). In $M_{ks}(t_1, t_2)$ [vgl. (6, 4)] kann — da, infolge der Voraussetzung $\{t_1, t_2\} \subset \overline{\mathfrak{T}}^4$, der Integrand gleichmäßig beschränkt ist — $i^1_{ks}(\lambda_k)$ durch $i^{\dagger 1}_{ks}(\lambda_k)$ ersetzt werden, da sich nach 4 b diese beiden Kurvenstücke nur um endlich viele Punkte unterscheiden. Führt man dann λ_k und λ_s als neue Integrationsveränderliche ein, so tritt in (6, 4) an Stelle von $M_{ks}(t_1, t_2)$

$$M^{\dagger}_{ks}(t_1, t_2) \equiv -\frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{\overline{\Gamma}^1} \frac{d\,\lambda_k}{h_k(t_2, \lambda_k) - t_1} \int_{\mathfrak{u}^1_{ks}(\lambda_k)} \frac{f(\psi, \varphi) \frac{\partial h_k(\varphi, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda_s} d\,\lambda_s}{\varphi - t_2}\right. \tag{6, 10}$$

$$\left. + \int_{\overline{\Gamma}^1} \frac{d\,\lambda_s}{h_s(t_2, \lambda_s) - t_1} \int_{\mathfrak{u}^1_{sk}(\lambda_s)} \frac{f(\psi, \varphi) \frac{\partial h_s(\varphi, \lambda_s)}{\partial \lambda_s} \frac{d\,\varphi}{d\,\lambda_k} d\,\lambda_k}{\varphi - t_2}\right]$$

auf. Infolge der Beschränktheit des Integranden dürfen wir das zweifache Integral durch ein Doppelintegral ersetzen und erhalten

$$M^{\dagger}_{ks}(t_1, t_2) = D_{ks}(t_1, t_2), \tag{6, 11}$$

wo

$$D_{ks}(t_1, t_2) \equiv -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathfrak{B}^2_{ks}} \frac{f(\psi, \varphi) B_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s) d\,\lambda_k d\,\lambda_s}{[h_k(t_2, \lambda_k) - t_1][h_s(t_2, \lambda_s) - t_1]}$$

und

$$B_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s) \equiv \frac{Z_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s)}{\varphi - t_2}$$
$$\equiv \frac{h_s(t_2, \lambda_s) - \frac{\partial h_k(\varphi, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} \frac{d\varphi}{d\lambda_s} + h_k(t_2, \lambda_k) \frac{\partial h_s(\varphi, \lambda_s)}{\partial \lambda_s} \frac{d\varphi}{d\lambda_k}}{\varphi - t_2}$$

bedeutet.

Wir wollen nunmehr zeigen, daß $\boldsymbol{D}_{ks}(t_1, t_2)$ *nicht nur in* $\mathfrak{T}^4$, *sondern in* $\mathfrak{M}^4$ *regulär ist.* Nach dem Vorhergesagten ist in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{M}^4$ gelegenen Teilbereich von $\mathfrak{M}^4$ sowohl $\frac{1}{h_k(t_2, \lambda_k) - t_1}$ wie $\frac{1}{h_s(t_2, \lambda_s) - t_1}$ (gleichmäßig in λ) beschränkt. Es genügt, deshalb zu zeigen, daß $B_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ in $\overline{\mathfrak{C}}^2: |t_2| \leqq 1$ regulär ist. Wir halten für einen Augenblick λ_k und λ_s fest. Nach **3** ist $B_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ bis höchstens auf einen Pol erster Ordnung in $t_2 = \varphi(\lambda_k, \lambda_s)$ in $\overline{\mathfrak{C}}^2$ regulär. $Z_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ hat aber, wie gezeigt werden soll, in $t_2 = \varphi$ eine Nullstelle, die infolge der Regularität von $Z_{ks}(t_2, \lambda_k, \lambda_s)$ in der Umgebung von $t_2 = \varphi$ mindestens von erster Ordnung ist. Nach (6, 9) gilt nämlich

$$Z_{ks}(\varphi, \lambda_k, \lambda_s) = h_k(\varphi, \lambda_k) \left[\frac{\partial h_s(\varphi, \lambda_s)}{\partial \lambda_s} \frac{d\varphi}{d\lambda_k} + \frac{\partial h_k(\varphi, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} \frac{d\varphi}{d\lambda_s} \right],$$

was nach (6, 8) verschwindet.

Jedes $\boldsymbol{D}_{ks}(t_1, t_2)$ ist somit eine in $\mathfrak{M}^4$ reguläre Funktion.

Die in $\mathfrak{T}^4$ gültige *Darstellung*

$$(6, 12) \qquad f(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{D}_{k0}(t_1, t_2) + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{D}_{ks}(t_1, t_2)$$

gilt somit in $\mathfrak{M}^4$.

(Eingegangen am 16. August 1933.)

Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$.

Von

Arnold Scholz in Freiburg i. Br.

Die Frage, für welche $D > 0$ die Nicht-Pellsche Gleichung

$$t^2 - Du^2 = -4 \tag{1}$$

lösbar ist, ist schon viel behandelt worden. Sie ist für die Theorie der quadratischen Formen sehr wichtig: Dann und nur dann, wenn (1) lösbar ist, stellt jede quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ zugleich mit einer Zahl m die Zahl $-m$ dar, insbesondere die Hauptform die Zahl -1. Für die Theorie der quadratischen Zahlkörper hat die Gleichung (1) folgende Bedeutung: Ist D selbst die Diskriminante des quadratischen Zahlkörpers $K = \mathsf{P}(\sqrt{D})$, also $D = q^2 d$ mit $d \equiv 0,1 \bmod 4$, eine sogenannte Fundamentaldiskriminante, so hat im Falle der Lösbarkeit von (1) die Fundamentaleinheit $\varepsilon = \frac{1}{2}(t_0 + u_0\sqrt{D})$ die Norm -1, die Klassenzahl von K bleibt dieselbe, wenn man als Hauptideale statt aller (α) nur die mit $N(\alpha) > 0$ ansieht, und der maximale unverzweigte relativ Abelsche Körper $\tilde{K}$ über K ist noch reell. Ist (1) unlösbar, so ist $N(\varepsilon) = +1$, die Klassenzahl von K verdoppelt sich bei der Einschränkung $N(\alpha) > 0$ (anders ausgedrückt: die Klassenzahl der quadratischen Formen von D ist die doppelte absolute Klassenzahl von K), und K ist imaginär.

Es ist bekannt, daß (1) unlösbar ist, wenn D einen Faktor der Form $4n - 1$ enthält. Beschränken wir uns in der Folge auf den in erster Linie interessierenden Fall einer Fundamentaldiskriminante D, so bleibt der Fall zu untersuchen, daß D ein Produkt von verschiedenen Primzahlen der Form $4n + 1$ ist oder das achtfache einer solchen Zahl[1]). Hier weiß man vor allem, daß (1) lösbar ist, wenn D Primzahl ist, ferner

[1]) T. Nagell nennt diese Zahlen A-Zahlen und teilt sie in seiner Note „Über die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$“ (Arkiv för Mat. **23** B/6, 1932) in B- und C-Zahlen ein. Die B-Zahlen sind die Diskriminanten, für die die Nicht-Pellsche Gleichung lösbar ist, die C-Zahlen die, für die sie unlösbar ist. Die Note enthält Abschätzungen über die Häufigkeit der B- und C-Zahlen und eine Anzahltabelle bis $D = 10000$. Bis dahin machen die C-Zahlen erst $18\,\%$ aller A-Zahlen aus; ihr Prozentsatz dürfte sich aber mit wachsendem D erheblich steigern. Zu beachten ist, daß in der Nagellschen Fassung D quadratfrei ist, für den geraden Fall also nur durch 2 statt 8 teilbar.

Eine Lösbarkeitstabelle für $D = pq < 10000$ findet sich bei Frhr. v. Thielmann: Zur Pellschen Gleichung, Math. Annalen **95**, 635—640 (1926).

durch Dirichlet (Ges. Werke Bd. I, S. 219—236): wenn D ein Produkt zweier Primzahlen ist, die gegenseitige quadratische oder wenigstens gegenseitige biquadratische Nichtreste sind, entsprechend für $D = 8p$ (p Primzahl), wenn $p \equiv 5$ (8) oder wenigstens $p \equiv 9$ (16) und 2 biquadratischer Nichtrest für p. Außerdem in gewissen Fällen, wo D ein Produkt von drei Primzahlen ist.

Man wird jetzt fragen: Lassen sich auch weitere Fälle der Unlösbarkeit von (1) durch Potenzrestbedingungen für die Primfaktoren von D charakterisieren? Läßt sich auf diese Weise etwa vollständig die Frage der Lösbarkeit beantworten?

Das letzte ist nicht der Fall; wir werden hingegen eine vollständige Scheidung der Fälle erhalten, in denen man aus dem gegenseitigen Potenzrestverhalten der Primfaktoren von D auf Lösbarkeit oder Unlösbarkeit schließen kann, und in denen Potenzreste keine Entscheidung liefern. Dabei wird sich herausstellen, daß immer nur biquadratische Reste maßgebend sind. Als *neues Ergebnis* erhalten wir vor allem die *Unlösbarkeit von* (1) *für* $D = pq$, *wenn* q *biquadratischer Rest von* p *ist, aber* p *nicht von* q. Das entsprechende Resultat für $D = p_1 p_2 \dots p_n$ (vgl. 2, B, C), das ich gleichzeitig mit L. Rédei[2]) erhalten habe, läßt vermuten, daß bei wachsender Faktorenzahl von D die Lösbarkeit etwas seltener wird. Ferner stellt sich heraus, daß Dirichlet alle Fälle $D = pq$ und $D = pqr$ gefunden hat, in denen biquadratische Reste Lösbarkeit liefern.

Meine Schlußweisen sind nicht mehr wie bei Dirichlet und Rédei elementar, sondern ich ziehe den schon oben genannten zur Klasseneinteilung der quadratischen Formen gehörigen unverzweigten Klassenkörper $\tilde{K}$ und seine normalen Unterkörper zur Betrachtung heran. Einen vollständigen Überblick über die gestellte Frage, insbesondere was ihre Entscheidbarkeit durch Potenzrestcharaktere betrifft, scheint mir nämlich erst die klassenkörpertheoretische Methode zu geben. Immerhin werde ich öfters die Theorie der quadratischen Formen zur Vereinfachung von Schlüssen heranziehen. Wir betrachten zuerst den Fall

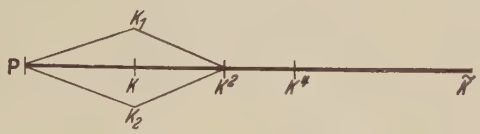
1. $D = p_1 p_2$.

Wie schon in der Einleitung gesagt, ist die Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$ dann und nur dann lösbar, wenn der unverzweigte Klassenkörper $\tilde{K}$ von $K = \mathsf{P}(\sqrt{D})$ reell ist, also mit dem absoluten Klassenkörper

[2]) L. Rédei: Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper. Diese Abhandlung wird in den Ungarischen Akad.-Ber. und deutsch im Journ. f. Math. erscheinen. Hier wird durch Adjunktion des Körpers $\mathsf{P}(i)$ ein rein arithmetischer Beweis gewonnen.

zusammenfällt. Um einfache Kriterien dafür zu erhalten, vergleichen wir K mit seinen „Stammkörpern“ $K_1 = \mathsf{P}(\sqrt{p_1})$ und $K_2 = \mathsf{P}(\sqrt{p_2})$, deren Produkt $K^3 = K_1 K_2$ ein Teilklassenkörper von $\tilde{K}/K$ ist. Übrigens genügt es, wenn wir als $\tilde{K}$ den vollständigen 2-Klassenkörper betrachten, d. h. vom eigentlichen Klassenkörper nur den Bestandteil von Zweierpotenzgrad; denn auf dessen Realität kommt es schließlich an. Wir werden nun folgende fünf Sätze beweisen, die uns dann den gewünschten Aufschluß über $\tilde{K}$ geben.

1. Der volle unverzweigte Klassenkörper von $K_1 K_2$ stimmt mit dem von K überein und ist zyklisch über K. Wir erhalten also folgenden Lageplan:



2. Ist $\tilde{K}$ umfangreicher als K^2, so ist der in $\tilde{K}$ enthaltene, über K^2 relativ-quadratische Klassenkörper K^4 noch ein relativ-Abelscher Körper über K_1 und K_2, und zwar ist K^4 der maximale Teilklassenkörper von K, der diese Eigenschaft besitzt.

3. Einen Körper K^4 gibt es dann und nur dann, wenn p_1 und p_2 zueinander quadratische Reste sind. In diesem Falle ist K^4 reell, wenn die Grundeinheit ε_1 von K_1 quadratischer Rest für p_2 ist, sonst imaginär.

4. ε_1 ist dann und nur dann quadratischer Rest für p_2, wenn p_1 und p_2 gegenseitige biquadratische Reste oder Nichtreste sind.

5. Dann und nur dann ist $\tilde{K}$ umfangreicher als K^4, also die Klassenzahl h der quadratischen Formen von D durch 8 teilbar, wenn p_1 und p_2 gegenseitige biquadratische Reste sind [Satz von Rédei[3])].

Haben wir diese fünf Behauptungen bewiesen, so folgt insbesondere aus 4. und 5.:

Ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = -1$, so ist $\tilde{K} = K^4$ reell, also (1) lösbar Dirichlet).

Ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = -\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4$, so ist $\tilde{K} = K^4$ imaginär, also (1) unlösbar.

Dagegen erhalten wir für $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = +1$ keine Entscheidung, da das (hier reelle) K^4 noch nicht den vollen Klassenkörper liefert.

Bemerkung. Wir rechnen hier und im folgenden immer mit dem unverzweigten 2-Klassenkörper (und seinen Teilkörpern). Dementsprechend sei schlechthin unter der Klassengruppe eines quadratischen Körpers

[3]) Inzwischen veröffentlicht in den Ungar. Akad.-Ber. 1933.

immer die Klasseneinteilung verstanden, deren Hauptklasse aus den Idealen $\mathfrak{h}$ besteht, von denen eine Potenz $\mathfrak{h}^{2m+1} = (\gamma)$ mit $N(\gamma) > 0$ wird. Zur Repräsentation dieser Klassen braucht man nur Ideale $\mathfrak{j}$ der Eigenschaft $\mathfrak{j}^{2^a} = (\alpha)$ heranzuziehen, was wir im folgenden stets tun werden, ohne es ausdrücklich zu bemerken; dann wird die Hauptklasse durch die (α) mit $N(\alpha) > 0$ repräsentiert. — Bei anderen Klasseneinteilungen wird immer hinzugefügt, daß es sich etwa um die „absolute" oder die „zu K^4 gehörige" handelt.

Beweis von 1. In der Galois-Gruppe von $K_1 K_2$ haben wir zwei Erzeugende S_1, S_2 der Ordnung 2, Trägheitssubstitutionen der Primteiler von p_1 und p_2. S_1 läßt in K_2 und S_2 in K_1 alles invariant. Beim Übergang zum Klassenkörper von $K_1 K_2$, der eine zweistufige Gruppe $\mathfrak{G}$ mit der obigen Vierergruppe als Faktorgruppe besitzt, darf man mit S_1, S_2 wieder Trägheitssubstitutionen je eines Primteilers von p_1 und p_2 bezeichnen. Nach dem Tschebotarjowschen Monodromiesatz erzeugen diese mit ihren Konjugierten schon $\mathfrak{G}$, da p_1 und p_2 wieder die einzigen sich verzweigenden Primzahlen sind, und haben auch in $\mathfrak{G}$ nur die Ordnung 2, da sich die p nicht weiter verzweigt haben. Daraus folgt aber, daß die maximale Abelsche Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ unsere Vierergruppe ist und der Kommutator $A = S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2$ bei Transformation mit S_1 oder S_2 in sein Inverses übergeht. Außerdem ist er das Quadrat von $S_1 S_2$, und somit ist nicht nur die Kommutatorgruppe, sondern schon die aus $S_1 S_2$ erzeugte, zum Körper K gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ zyklisch. Also ist der Klassenkörper von $K_1 K_2$ zyklischer Klassenkörper von K.

Beweis von 2. Der Körper K_1 gehört zu der aus S_2 und A erzeugten Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Da $S_2^{-1} A S_2 = A^{-1}$, werden S_2 und A gerade durch die Relation $A^2 = E$ vertauschbar, zu der der Körper K^4 gehört.

Beweis von 3. Es gibt noch einen Körper K^4, wenn die Klassenzahl von K oder die der quadratischen Formen von D durch 4 teilbar ist. Aus der Gaußschen Geschlechtertheorie, aus der wir auch schon das Teilergebnis von 1., daß die Klassengruppe von K selbst zyklisch ist, hätten herleiten können, folgt nun, daß gegenseitiger quadratischer Rest von p_1 und p_2 das Kriterium für ihre Darstellbarkeit im Hauptgeschlecht ist. Und dies ist mit der Teilbarkeit der Klassenzahl durch 4 gleichbedeutend, da p_1 und p_2 positiv und negativ beide in zweiseitigen Klassen, aber nicht beide in der Hauptklasse darstellbar sind. — Zur Untersuchung der Realität von K^4 verlegen wir jetzt unsere Betrachtungen nach K_1. Da $p_2^{1/2}$ Relativdifferente von K^2/K_1 und auch von K^4/K_1 ist, ist K^4/K_1 jedenfalls Klassenkörper mod p_2 mit Vierergruppe. Bei der zugehörigen Klasseneinteilung mod p_2 liegt also jedes Idealquadrat in der Hauptklasse.

Da ferner die absolute Klassenzahl von K_1 ungerade ist, kommt die Klasseneinteilung mod p_2 auf eine Einteilung der algebraischen Zahlen von K_1 nach ihren quadratischen Restcharakteren mod p_2 hinaus, eventuell unter Heranziehung des Vorzeichens der Norm (im imaginären Fall), wobei aber darauf zu achten ist, daß die Einheiten in die Hauptklasse fallen. So geschlossen, zeigt sich unmittelbar nur als notwendig, daß p_2 in K_1 zerfallen, also quadratischer Rest für p_1 sein muß, damit bei dieser Klasseneinteilung überhaupt eine Vierergruppe herauskommt und K^4 existiert. Ist diese Bedingung erfüllt, so kommt es jetzt darauf an, ob die Fundamentaleinheit ε_1 von K_1 quadratischer Rest für (beide Primteiler von) p_2 ist: Im positiven Falle lassen sich die Zahlen wirklich auch, als Hauptideale betrachtet, nach ihrem quadratischen Restcharakter mod $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2'$ ($\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2' = p_2$) einteilen, und das Vorzeichen von $N(\alpha)$ kann dann für die Hauptideale (α) keine schärfere Einteilung liefern, da ε_1 selbst negative Norm hat. Also gehört K^4 gerade zu dieser Einteilung und ist reell.

Ist jedoch ε_1 Nichtrest mod $\mathfrak{p}_2$ (und dann auch mod $\mathfrak{p}_2'$, weil $N(\varepsilon_1) = -1$ Rest ist), so kann nur mit Vorzeichenbedingung eine Vierergruppe herauskommen. Teilen wir jetzt die (α) nach ihren quadratischen Restcharakteren mod p_2 und dem Vorzeichen ihrer Norm ein und berücksichtigen, daß ε_1 sowohl eine negative Norm hat als auch Nichtrest für beide Faktoren von p_2 ist, so besteht jetzt die Hauptklasse aus denjenigen (α), für die alle diese drei Charaktere übereinstimmen, während für die anderen drei Klassen je einer sich abweichend verhält. Man kann die Klasseneinteilung auch so erklären: Multipliziert man die Zahl α so mit einer Einheit, daß ihre Norm positiv wird, so sind die Restcharaktere von α mod p_2 maßgebend für die Klasseneinteilung, und daher gehört zu dieser ein imaginärer Klassenkörper K^4. Es ist dann schon $K^4 = \tilde{K}$.

Beweis von 4^{I}. Wir schließen zuerst: aus $\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}_2}\right) = -1$ folgt $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = -\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4$, und nachher umgekehrt (4^{II}).

In der Hauptklasse der quadratischen Formen positiver Diskriminante D sind gerade vier Diskriminantenteiler darstellbar: entweder ± 1, D oder $+1$, $+P$, $-Q$, $-D$, wo $PQ = D$[4]). Haben wir $D = p_1 p_2$ und

[4]) Aus der Kompositionstheorie der quadratischen Formen folgt, daß von den 2^{n+1} positiven und negativen Teilern von $D = p_1 p_2 \dots p_n$ oder $D/4 = 2 p_2 \dots p_n$ in jeder zweiseitigen Klasse vier darstellbar sind. Für die Hauptklasse kann man dies als entsprechende Aussage in K, wie wir sie nachher gebrauchen, beweisen, wenn man beachtet, daß die in der Hauptklasse von D darstellbaren Zahlen mit den Normen ganzer Zahlen aus K zusammenfallen, deren $(S-1)$-te Potenzen *dann* Einheiten sind, wenn es sich, wie hier, um Diskriminantenteiler handelt. Einheiten $\eta = \alpha^{S-1}$ mit $N(\alpha) | D$, die zu verschiedenen $N(\alpha)$ führen, hat man hier vier, nämlich $\eta = \pm 1$, ε oder $\eta = \pm 1$, ε^2, je nachdem $N(\varepsilon) = +1$ oder $= -1$.

$N(\varepsilon) = +1$, so ist also außer 1 und $-D$ etwa $+p_1$ und $-p_2$ in der Hauptklasse darstellbar. Also sind die Primteiler von p_1 und p_2 in K zwar beides Zahlideale, aber nur $p_1^{1/2}$ hat positive Norm und zerfällt daher voll in $\tilde{K}$. Nach 3. ist aber $\tilde{K} = K^4$, wenn, wie wir angenommen haben, die Grundeinheit von K_1 nichtquadratischer Rest für p_2 ist. Betrachten wir nun wieder $\tilde{K} = K^4$ als Klassenkörper über K_1 und K_2, so liegen jetzt auch dort die Primteiler von p_1, aber nicht die von p_2, in der zu K^4 gehörigen Hauptklasse. Da K^4 imaginär, hat man nach 3., wenn man p_1 in K_1 und p_2 in K_2 betrachtet:

$$(K_1) \qquad \left(\frac{\sqrt{p_1}}{p_2}\right) N(\sqrt{p_1}) > 0.$$

$$(K_2) \qquad \left(\frac{\sqrt{p_2}}{p_1}\right) N(\sqrt{p_2}) < 0.$$

Da die Normen negativ sind, folgt

$$\left(\frac{\sqrt{p_1}}{p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = -1; \quad \left(\frac{\sqrt{p_2}}{p_1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = +1$$

oder rational:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = -1; \quad \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = +1.$$

Merkwürdig ist, daß gerade die positiv in der Hauptklasse darstellbare Zahl biquadratischer Nichtrest der anderen, die negativ darstellbare biquadratischer Rest der anderen ist.

Beweis von 4^{II} und 5. Sei $\left(\frac{\varepsilon_1}{p_2}\right) = +1$, also K^4 reell. Ist hier die Klassenzahl von D durch 8 teilbar, so sind $\pm p_1, p_2$ in einer Biquadratklasse darstellbar, weil beide zweiseitigen Klassen biquadratisch sind. Daher liegen ihre Primteiler in K_1 und K_2 in der Hauptklasse für K^4, d. h., da hier nach 3. keine Vorzeichenbedingungen maßgebend sind:

$$\left(\frac{\sqrt{p_1}}{p_2}\right) = \left(\frac{\sqrt{p_2}}{p_1}\right) = 1,$$

also

$$(2) \qquad \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = 1.$$

Ist dagegen die Klassenzahl nur 4, also $K = K^4$ reell, so sind $\pm 1, p_1 p_2$ in der Hauptklasse darstellbar, $\pm p_1, p_2$ aber bloß in der Quadratklasse, d. h. ihre Primteiler in K_1 und K_2 liegen nicht in der zu K^4 gehörigen Idealgruppe. Also lautet in (2) die rechte Seite: -1.

Das Resultat 4. kann man auch in einem etwas anderen Zusammenhang erhalten, indem man die Potenzrestbedingungen für p_2 bei festem p_1 durch den Idealzerfall von p_2 in gewissen durch p_1 bestimmten Körpern charakterisiert. Wir betrachten die Gesamtheit aller Primzahlen p_2 von der Form $4n + 1$, die quadratische Reste für das gegebene p_1

sind und fragen: Wann ist p_2 biquadratischer Rest von p_1? Wann ist p_1 biquadratischer Rest von p_2?

Körpertheoretisch heißt das: Wir betrachten die Gesamtheit der in $\mathsf{P}(i, \sqrt{p_1})$ voll zerfallenden p_2. Unter diesen sind die biquadratischen Reste für p_1 die in $\Gamma_1 = \mathsf{P}(i, \alpha_4)$ voll zerfallenden, wenn α_4 den Unterkörper vierten Grades des p_1-ten Kreisteilungskörpers erzeugt. Dagegen ist p_1 biquadratischer Rest für die p_2, die in $\Gamma_2 = \mathsf{P}(i, \sqrt[4]{p_1})$ voll zerfallen. Also gilt (2) dann und nur dann, wenn p_2 in $\mathsf{P}(i, \alpha_4, \sqrt[4]{p_1})$ voll zerfällt. Dies ist ein biquadratischer Körper über $\Gamma = \mathsf{P}(i, \sqrt{p_1})$, der Γ_1, Γ_2 und drittens $\Gamma_3 = \Gamma(\alpha_4 \sqrt[4]{p_1})$ als quadratische Teilkörper enthält. In Γ_3 zerfallen dann die p_3 voll, für die

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4$$

gilt. Nun kann man α_4 als Quadratwurzel einer Zahl aus Γ, sogar aus $\mathsf{P}(\sqrt{p_1})$ wählen; da $\mathsf{P}(\alpha_4)$ die Relativdiskriminante $p_1^{1/2}$ über $\mathsf{P}(\sqrt{p_1})$ hat, muß $\alpha_4^2 = \varepsilon_1^a \sqrt{p_1}$ ausfallen, wo a ungerade ist[5]), weil $\Gamma(\alpha_4) \neq \Gamma(\sqrt[4]{p_1})$. Also ist $\Gamma_3 = \Gamma(\sqrt{\varepsilon_1})$, und das ist das Resultat 4.

Für die vier Arten von Diskriminanten $D = p_1 p_2$, die durch das biquadratische Restverhalten ihrer Faktoren zueinander bestimmt sind, haben wir insgesamt folgendes erhalten:

A. $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$: $\quad h = 2$; $\qquad N(\varepsilon) = -1$.

B. $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = -1$:

$\left(\frac{\varepsilon_1}{p_2}\right) = +1$; $h = 4$; $\tilde{K} = K^4$ reell; $\qquad N(\varepsilon) = -1$.

C. $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = -\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4$:

$\left(\frac{\varepsilon_1}{p_2}\right) = -1$; $h = 4$; $\tilde{K} = K^4$ imaginär; $N(\varepsilon) = +1$.

D. $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = +1$:

$\left(\frac{\varepsilon_1}{p_2}\right) = +1$: $h \geqq 8$; $\tilde{K} \geqq \begin{matrix} K^4 & \text{reell,} \\ K^8 & \text{reell oder imaginär;} \end{matrix}$ $N(\varepsilon) = \mp 1$.

Das gleiche gilt auch für

$$D = 8p,$$

[5]) Vgl. F. Neiss: Relativ Abelsche Zahlkörper, Bln. Math. Ges. 1920, S. 84.

d. h. in der obigen Aufstellung darf man einen Faktor von D durch 8 ersetzen, wenn man als biquadratische Reste von 8 nur die Zahlen der Form $16n+1$ auffaßt. Dann ändert sich am Beweis nichts.

Der Fall C. der Unlösbarkeit von (1) bedeutet für $D = 8p$ einfach, daß -4 zwar quadratischer, aber kein achter Potenzrest von p ist; dann ist nämlich 2 biquadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p von der Form $16n+9$ oder $16n+1$ ist. -4 ist aber auch die einzige Zahl, die als achter Potenzrest für unser Problem noch eine Rolle spielt, weil die Zahlen $-4a^4$ die einzigen rationalen sind, deren vierte Wurzeln nur quadratische Irrationalitäten liefern.

Zum Abschluß des Falles $D = p_1 p_2$ sei noch angegeben, wie man aus den Fundamentaleinheiten ε_1, ε_2, ε von K_1, K_2, K die Einheitengruppe des Produktkörpers K^2 erhält. Das hängt hier gar nicht, wie bei der Komposition zyklischer Körper ungeraden Primzahlgrades, von der Idealklassengruppe ab, sondern nur davon, ob (1) lösbar ist.

Im Falle der Lösbarkeit, also für $N(\varepsilon) = -1$ ist

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \sqrt{\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

ein System von Fundamentaleinheiten in K^2, für $N(\varepsilon) = +1$ dagegen

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \sqrt{\varepsilon}.$$

Beweis. ε_1, ε_2, ε sind jedenfalls voneinander unabhängig, und das Quadrat jeder Einheit von K^2 läßt sich durch sie ausdrücken[6]). Es fragt sich also nur, welche der Einheiten

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \varepsilon\varepsilon_1, \quad \varepsilon\varepsilon_2, \quad \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$$

Quadrate sind. Es kommen nur solche in Betracht, deren Relativnormen nach K_1 und K_2 Quadrate sind. Nun ist

N	ε_1,	ε_2,	ε
K_1	ε_1^2,	-1,	± 1
K_2	-1,	ε_2^2,	± 1

Und daraus folgt, daß für $N(\varepsilon) = +1$ nur ε, für $N(\varepsilon) = -1$ nur $\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ Quadrat sein kann. Das ist nun auch der Fall:

Im Falle $N(\varepsilon) = +1$ folgt aus der Unlösbarkeit von (1) die Lösbarkeit von[7])

$$p_1 v^2 - p_2 w^2 = 4. \tag{3}$$

[6]) Vgl. G. Herglotz: Über einen Dirichletschen Satz, Math. Zeitschr. 12 (1920), 255—261.

[7]) Vgl. die obengenannte Dirichletsche Note und Satz V der unter [2]) genannten Note.

Wenn nämlich p_1 durch die Hauptform der Diskriminante D darstellbar ist, dann gibt es auch eine Darstellung

$$4p_1 = x^2 - Dy^2,$$

in der $x = p_1 v$ ausfällt, und daraus folgt (3). Jetzt ist

$$\tfrac{1}{2}(v\sqrt{p_1} + w\sqrt{p_2})$$

eine Einheit (Norm in K_1: $+1$, Norm in K_2: -1), deren Quadrat

$$\tfrac{1}{4}(p_1 v^2 + p_2 w^2) + \tfrac{1}{2} v w \sqrt{D}$$

eine Potenz ε^{2m+1} ist. Die Minimallösung v, w von (3) führt dann zu ε.

Im Falle $N(\varepsilon) = -1$ nehmen wir einmal an, ε, ε_1, ε_2 erzeugten mit -1 zusammen schon die Einheitengruppe von K^2; dann hätten alle Einheiten von K^2 die absolute Norm $+1$, und das hieße, daß K^2 einen imaginären unverzweigten Klassenkörper $\bar{K}$ besitzt, also (1) unlösbar wäre.

Ohne Verwendung der Klassenkörpertheorie können wir nach Satz 90 des Hilbertschen Zahlberichts, angewandt auf K^2 als relativ zyklischen Körper über K_1, so schließen: -1 und $\varepsilon\varepsilon_2$ sind zwei Einheiten in K^2 mit der Relativnorm $+1$ in K_1, sind daher $(S-1)$-te Potenzen ganzer Zahlen in K^2:

$$-1 = \sqrt{p_2}^{S-1}; \quad \varepsilon\varepsilon_2 = \alpha^{S-1} \tag{4}$$

(S erzeugende Substitution von K^2/K_1). (α) muß dabei ein gegenüber S invariantes Ideal sein. Nun haben aber alle invarianten Hauptideale in K^2 die Gestalt $(\alpha_1)\sqrt{p_2}^i$ mit α_1 aus K_1; denn die Primteiler von p_2 sind keine Hauptideale, weil sonst ihre Relativnormen in bezug auf K dort Hauptideale wären, im Widerspruch mit $N(\varepsilon) = -1$, und es ist auch jedes K_1-Ideal schon Hauptideal in K_1, wenn in K^2. Daher folgt aus (4), daß es eine Einheit η geben muß, deren $(S-1)$-te Potenz $\pm\varepsilon\varepsilon_2$ ausfällt. Das ergibt $\eta^2 = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$.

2. $D = p_1 p_2 \dots p_n$.

Wir hatten für $n = 2$ vier Arten biquadratischen Restverhaltens, das die Faktoren von D untereinander aufweisen, unterschieden, von denen die ersten beiden zur Lösbarkeit von (1) führten, die dritte zu Unlösbarkeit von (1), und die vierte beide Möglichkeiten zuließ. Für größeres n, wo man an sich viel mehr biquadratische Restfälle unterscheiden könnte, lassen sich diese unter Mitbetrachtung der Klassengruppe von D wieder in vier Hauptarten mit den entsprechenden Ergebnissen für die Lösbarkeit von (1) einteilen, und zwar so:

A. Es gibt unter den quadratischen Formenklassen von D keine Klasse der Ordnung 4. Das ist nach Rédei[8]) dann und nur dann der Fall, wenn D keine „Zerfällung zweiter Art" aufweist. Hier ist $N(\varepsilon) = -1$.

Dabei heißt $D = D_1 D_2$ eine Zerfällung 2. Art (Z. 2. A.), wenn D_1 quadratischer Rest aller Primfaktoren von D_2 und umgekehrt D_2 quadratischer Rest aller Faktoren von D_1 ist. Ist dabei $D_1 = \Pi p_\varrho$, $D_2 = \Pi q_\sigma$, so lassen sich für Z. 2. A. die biquadratischen Restsymbole definieren:

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \prod_\sigma \left(\frac{D_1}{q_\sigma}\right)_4; \quad \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = \prod_\varrho \left(\frac{D_2}{p_\varrho}\right)_4.$$

Für den Fall, daß eine Z. 2. A. existiert, unterscheiden wir die weiteren Arten:

B. Für alle Z. 2. A. $D = D_1 D_2$ gilt:

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1. \tag{5}$$

Etwas allgemeiner: Es existiert keine Formenklasse der Ordnung 8, und für jede Z. 2. A. stimmen die Restsymbole in (5) überein. Hier ist $N(\varepsilon) = -1$.

C. Es gibt eine Z. 2. A. mit $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = -\left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4$. Hier ist $N(\varepsilon) = +1$.

D. Es gibt eine Formenklasse der Ordnung 8, und für jede Z. 2. A. gilt (5) mit $+1$. Hier ist $N(\varepsilon) = \pm 1$.

Hierzu sei gleich bemerkt, daß die Positivität der beiden biquadratischen Restsymbole einer Z. 2. A. zwar notwendig für die Existenz einer Klasse der Ordnung 8 ist, hinreichend jedoch nur dann, wenn es nur eine Z. 2. A. von D gibt. Ob es eine Klasse der Ordnung 8 gibt, läßt sich überhaupt nicht vollständig durch das gegenseitige Potenzrestverhalten der Primfaktoren von D beschreiben, und daher wird die Frage der Lösbarkeit von (1) durch biquadratische Reste nur in den Fällen A. und C. entschieden und für B. nur, soweit biquadratische Charaktere schon für Nichtexistenz einer Klasse der Ordnung 8 entscheiden, nämlich in dem erstgenannten Hauptfall B., wo (5) gilt.

Von den Behauptungen über die Lösbarkeit von (1) in A., B., C. folgt die erste sofort: -1 ist als quadratischer Rest aller Primfaktoren von D in einer zweiseitigen Klasse des Hauptgeschlechts darstellbar. Wenn es aber keine Klasse der Ordnung 4 gibt, ist die Hauptklasse die einzige zweiseitige des Hauptgeschlechts.

Um die weiteren Aussagen zu beweisen, halten wir uns an eine feste Basis

$$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$$

[8]) Vgl. die Inhaltsangaben S. 681 und 707 des Math. Nat. Anz. d. Ung. Akad. 1931.

der Formenklassengruppe $\mathfrak{C}$ zur Diskriminante $D = p_1 p_2 \dots p_n$. Es seien wieder nur die Klassen betrachtet, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist, und $\tilde{K}$ sei der volle unverzweigte 2-Klassenkörper von $K = \mathsf{P}(\sqrt{D})$, der zu unserer Klasseneinteilung gehört. Zur Untergruppe

$$\mathfrak{C}_1 = \{C_1^2, C_2, \dots, C_{n-1}\}$$

gehört ein Körper $K^2 = \mathsf{P}(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2}) > \mathsf{P}(\sqrt{D})$ und damit eine Zerfällung $D = D_1 D_2$. Ebenso gehört zu jeder Untergruppe $\mathfrak{C}_\nu$, die aus $\mathfrak{C}_1$ durch Vertauschung der Indizes 1 und ν entsteht, eine Zerfällung $D = D_1^{(\nu)} D_2^{(\nu)}$. Diese $n-1$ verschiedenen Zerfällungen von D liefern $n-1$ unabhängige Erweiterungen $K_\nu^2 = K(\sqrt{D_1^{(\nu)}})$ von K, die zusammen gerade den Körper $\mathsf{P}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$ erzeugen. — Jetzt ordnen wir auch einem beliebigen in K enthaltenen relativ zyklischen Körper über K die Zerfällung $D = D_1' D_2'$ zu, die seinem quadratischen Teilkörper $K(\sqrt{D_1'})$ entspricht. Diese Zerfällung kann selbst unter den Basiszerfällungen $D = D_1^{(\nu)} D_2^{(\nu)}$ vorkommen, oder sie setzt sich aus diesen multiplikativ unter Weglassung von Quadraten zusammen.

Wir betrachten jetzt die zu den Basiszerfällungen gehörigen maximalen zyklischen Teilklassenkörper und fragen, wieweit sie durch ihre Zerfällung bestimmt sind. Zur Untergruppe

$$\mathfrak{K}_1 = \{C_2, \dots, C_{n-1}\}$$

gehört ein solcher maximaler zyklischer Teilklassenkörper K^h, dessen Relativgrad h gleich der Ordnung von C_1 ist. Er enthält den oben definierten Körper $K^2 = K(\sqrt{D_1})$. Jeder andere K^2 enthaltende zyklische Teilklassenkörper hat nun höchstens den Grad h: Ist $\mathfrak{C}^2$ das aus allen Quadraten in $\mathfrak{C}$ bestehende Hauptgeschlecht, so liegt die Untergruppe $\mathfrak{K}_1'$ irgend eines zur Zerfällung $D = D_1 D_2$ gehörigen zyklischen Klassenkörpers in $\{C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, \mathfrak{C}^2\}$. Jedenfalls liegt C_1 nicht in $\mathfrak{K}_1'$, und daher wird die zyklische Faktorgruppe $\mathfrak{C}/\mathfrak{K}_1'$ durch den Komplex $C_1 \mathfrak{K}_1'$ erzeugt, der höchstens die Ordnung h hat. *Für die $n-1$ Basiszerfällungen $D = D_1 D_2$ sind als die Ordnungen der C_ν Invarianten, und man erhält alle Invarianten der Abelschen Gruppe $\mathfrak{C}$, indem man zu den Basiszerfällungen von D gehörige maximal-zyklische Teilklassenkörper von K bestimmt.* Für die anderen Zerfällungen von D bestimmt sich dann der Maximalgrad zyklischer Teilklassenkörper als Minimum der Komponenten-Maximalgrade. Daraus folgt, daß die Anzahl der D-Zerfällungen, deren „Grad" (Invariante) durch eine gegebene Potenz von 2 teilbar ist, $= 2^e$ ist, einschließlich der identischen D-Zerfällung $D = 1 \cdot D$, wenn e die Anzahl der Basiszerfällungen gleicher Art ist. Wenn $e_2, e_4, e_8, \dots$ die Anzahl der Basiszerfällungen bedeutet, deren Grad durch 2, 4, 8, ... teilbar ist, so gilt

$$n - 1 = e_2 \geqq e_4 \geqq e_8 \geqq \dots .$$

e_4 ist nach einem Satz von Rédei, der das oben unter A. genannte Resultat enthält, die Anzahl der unabhängigen D-Zerfällungen zweiter Art; nämlich dann und nur dann ist der Grad der Zerfällung $D = D_1 D_2$ durch 4 teilbar, wenn sie von zweiter Art ist. Für diesen Satz, von dem ein klassenkörpertheoretischer Beweis bereits vorliegt[9]) und ein arithmetischer Beweis von Rédei demnächst in den Ungarischen Akademie-Berichten und im J. f. Math. erscheinen wird, will ich hier noch einen Beweis angeben, der sich auf das Verfahren des vorigen Kapitels stützt, K^4/K_1 statt K^4/K zu betrachten. Es werden dann auch die Behauptungen B. und C. entsprechend folgen.

Zunächst sei bemerkt, daß der volle unverzweigte Klassenkörper von $K^0 = \mathsf{P}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n})$ für $n > 2$ im allgemeinen umfangreicher ist als der von K. Der erste unserer fünf Sätze aus dem vorigen Kapitel gilt also hier schon nicht mehr[10]). Nun betrachten wir auch an sich nicht mehr den vollen Klassenkörper $\tilde{K}$ von K auf einmal, sondern seine zyklischen Bestandteile. Diese haben jedoch dieselbe Gruppenstruktur wie der Körper $\tilde{K}$ für $n = 2$. Ist insbesondere der Grad eines solchen zyklischen Teilklassenkörpers noch durch 4 teilbar, so ist sein Unterkörper vierten Grades K^4 noch Klassenkörper vom Typus $(2, 2)$ über $K_1 = \mathsf{P}(\sqrt{D_1})$ und $K_2 = \mathsf{P}(\sqrt{D_2})$, wenn $D = D_1 D_2$ die zugehörige Zerfällung ist.

Nun gilt es, unter allen Körpern vom Typus $(2, 2)$ über K_1, deren Führer D_2 ist, die herauszufinden, die als Körper K^4 in Betracht kommen. Bestimmt haben sie mit K^0 nur den Körper $K^2 = K_1(\sqrt{D_2})$ gemein, sind also zum absoluten Klassenkörper von K_1 teilerfremd und können auch keinen quadratischen Klassenkörper enthalten, dessen Führer ein echter rationaler Teiler von D_2 ist. Sondern D_2 ist die Norm der Führer $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ der andern beiden in K^4 enthaltenen quadratischen Körper über K_1: Diese beiden Körper sind vor allem zueinander absolut konjugiert, weil K^4 die Diedergruppe der Ordnung 8 zur Galoisgruppe hat; es läßt sich

---

[9]) L. Rédei und H. Reichardt: Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers, J. f. Math. 170 (1933), S. 69—74.

[10]) Genau ist das Verhältnis von $\tilde{K}$ zu $\tilde{K}^0$ folgendes: Sind $S_1, S_2, \ldots, S_n$ die erzeugenden Trägheitssubstitutionen von K^0, so wird die Gruppe von $\tilde{K}^0/K^0$ aus den Kommutatoren $A_{\varkappa\lambda}$ je zweier $S_\varkappa, S_\lambda$ und ihren Konjugierten erzeugt. Für diese gelten die Relationen

$$A_{\varkappa\lambda}^{S_\varkappa + 1} = A_{\varkappa\lambda}^{S_\lambda + 1} = E; \qquad A_{\lambda\mu}^{S_\varkappa - 1} A_{\mu\varkappa}^{S_\lambda - 1} A_{\varkappa\lambda}^{S_\mu - 1} = E,$$

weitere je nach der Gestalt von K^0. Von $\tilde{K}^0$ gelangt man nun zu $\tilde{K}$ durch Hinzufügung der Relationen

$$A_{\varkappa\lambda}^{S_\mu + 1} = E \ (\mu = 1, \ldots, n); \quad A_{\lambda\mu} A_{\mu\varkappa} A_{\varkappa\lambda} = E.$$

also der eine durch die Quadratwurzel einer Zahl α aus K_1, der andere durch die aus ihrer Konjugierten α^S erzeugen. Dann gilt $(\alpha) = \mathfrak{d}\mathfrak{t}^2$ und $(\alpha^S) = \mathfrak{d}^S\mathfrak{t}^{2S}$, wo $\mathfrak{t}$ ein passend gewähltes Ideal ist, und es ist $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}^S$. Da dann aber der dritte quadratische Körper $K_1(\sqrt{D_2})$ gleichzeitig durch $\sqrt{\alpha \cdot \alpha^S}$ erzeugt wird, ist $N(\alpha) > 0$, und es kann sich $N(\mathfrak{d})$ von D_2 nur um ein Quadrat unterscheiden, das aber 1 ist wegen $\mathfrak{d} \mid D_2$ (auch für $8 \mid D_2$). Anders ausgedrückt: es müssen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}^S$ zueinander prim sein, dürfen keinen rationalen Faktor enthalten, da dieser aus dem Führer D_2 von K^2 herausfiele. Wenn also $D_2 = q_1 q_2 \ldots q_s$ zerfällt, fällt $\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_s$ aus, wo $\mathfrak{q}_\sigma$ ein Primteiler von q_σ ist.

Damit hat sich als notwendig ergeben, daß die q_σ in K_1 zerfallen oder: daß D_1 quadratischer Rest aller q_σ ist. Um aber zu einem Hauptideal $(\alpha) = \mathfrak{d}\mathfrak{t}^2$ mit $N(\alpha) > 0$ zu gelangen, ist ferner notwendig und auch hinreichend, daß $\mathfrak{d}$ in einer Idealquadratklasse liegt, und das heißt, daß $N(\mathfrak{d}) = D_2$ quadratischer Rest aller Primteiler von D_1 ist. Es ist also notwendig, daß $D = D_1 D_2$ eine Z. 2. A. ist, und auch hinreichend, wenn sich α als quadratischer Rest mod 4 wählen läßt, eine Bedingung nur für ungerades D_2, damit die Relativdiskriminante von $K_1(\alpha)$ ungerade ausfällt. Wenn man nun $(\alpha) = \mathfrak{d}\mathfrak{t}^2$ zu 2 teilerfremd bestimmt, also $N(\alpha) = D_2 t^2 \equiv 1 \bmod 4$, ist für ungerades D_1 schon α oder $-\alpha \equiv \gamma^2 \bmod 4$, weil $\alpha^3 \equiv 1 \bmod 2$, also $\equiv \pm 1, \sqrt{D_1} \bmod 4$, wobei aber $\pm\sqrt{D_1}$ wegen $N(\sqrt{D_1}) \equiv -1$ ausscheidet. Für $8 \mid D_1$ vertausche man D_1 und D_2.

Also gehört zur Zerfällung $D = D_1 D_2$ dann und nur dann ein K^4, wenn sie von zweiter Art ist, und damit ist der Rédeische Satz für reelle Körper bewiesen. Es gibt dann genau 2^{n-2} Körper K^4: einmal läßt sich der Führer $\mathfrak{d}$ auf 2^{s-1} verschiedene Weisen kombinieren, und dann ist, wenn $D_1 = p_1 \ldots p_r$, die Wahl von $\mathfrak{t}$ auf 2^{r-1} Weisen möglich. Existiert noch ein Körper K^8, so braucht sich jedoch nur ein Teil der Körper K^4 zu einem Körper K^8 erweitern zu lassen.

Um jetzt zu entscheiden, wann ein Körper K^4 *reell* ist, und das brauchen wir für B. und C., müssen wir die zu K^4 gehörige Klasseneinteilung in K_1 ermitteln. Auf diese Weise werden wir erneut beweisen, daß die Z. 2. A. hinreichend für die Existenz der K^4 ist, und dabei die obige etwas aus der Rolle fallende Betrachtung mod 4 vermeiden. Dagegen würde der Beweis der Notwendigkeit der Z. 2. A. auf dem Wege der Klasseneinteilung etwas umständlicher ausfallen.

Da K^4 zum unverzweigten Klassenkörper von K_1 teilerfremd ist, lassen sich die vier Klassen in K_1 durch Ideale (α) mit $N(\alpha) > 0$ repräsentieren, und zwar sind hier die Restcharaktere

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{d}}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{d}^S}\right)$$

($\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_s$) maßgebend für die Klasseneinteilung. Die zu K^4 gehörige Idealgruppe besteht dann aus den Idealen

$$\alpha \mathfrak{j}_1^{x} \dots \mathfrak{j}_{r-1}^{z}, \tag{6}$$

wo $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{d}^S}\right) = 1$, $N(\alpha) > 0$ und die $\mathfrak{j}$ bestimmte Repräsentanten der Basisklassen in der Klassengruppe von K_1 sind, deren Auswahl genau so wie die Zusammensetzung von $\mathfrak{d}$ davon abhängt, welchen der Körper K^4 man betrachtet.

Notwendig und hinreichend dafür, daß auf diese Weise eine Klassenvierteilung herauskommt, ist, daß die Hauptidealpotenzen der $\mathfrak{j}$

$$(\gamma) = \mathfrak{j}^h \text{ mit } N(\gamma) > 0$$

selbst unter die (α) in (6) fallen. Da nun aber die zweiseitigen Klassen in $K_1 = \mathsf{P}(\sqrt{p_1 \dots p_r})$ durch die Ideale $p_\varrho^{1/2}$ und ihre Produkte $P^{1/2}$ ausgefüllt werden, sind die in diesen Klassen liegenden Potenzen der $\mathfrak{j}$ in der Form $\beta P^{1/2}$ darstellbar, und daraus folgt

$$\mathfrak{j}^h = \beta^2 P,$$

wenn h die Idealklassenordnung von $\mathfrak{j}$. Für die Existenz von K^4 ist also außer der schon benutzten Bedingung $\left(\frac{D_1}{q_\sigma}\right) = 1$ notwendig und hinreichend, daß alle $\left(\frac{p}{\mathfrak{d}}\right) = 1$ sind oder im rationalen Zahlkörper $\left(\frac{p_\varrho}{D_2}\right) = 1$ für $\varrho = 1, \dots, r$.

Imaginär ist K^4, wenn bei der zugehörigen Klasseneinteilung in K_1 eine Positivitätsbedingung tatsächlich verwandt wurde. Hat die Grundeinheit von K_1 die Norm -1, so ist das der Fall, wenn $\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{d}}\right) = -1$. In diesem Falle ist nämlich der Satz 3 aus Kap. 1 gültig. Anders liegt die Sache für $N(\varepsilon_1) = +1$. Hier ist immer

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{\pi^{S-1}}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{\pi^{S+1}}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{P}{\mathfrak{d}}\right) = +1.$$

(π) ist dabei eins der oben definierten Ideale $P^{1/2}$. Die Zahlideale teilen sich hier von vornherein in die Hauptideale (α) mit $N(\alpha) > 0$ und die Ideale (α') mit $N(\alpha') < 0$. Den Potenzrestbedingungen für die Idealgruppe (6) unterliegen nur die α. Je nachdem, ob sie nun auch für die α' gelten oder ob $\left(\frac{\alpha'}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{\alpha'}{\mathfrak{d}^S}\right) = -1$, ist K^4 reell oder imaginär. Da die zweiseitige Klasse der (α') im Hauptgeschlecht liegt, muß es auch ein Idealquadrat (α') geben, das dann sicher zur Idealgruppe von K^4 gehört. Vom Potenzrestcharakter dieses α' mod D_2 hängt also die Realität von K^4 ab, nicht etwa von den $\mathfrak{j}_\varrho$ in (6). — Für beide Fälle $N(\varepsilon_1) = \pm 1$ hängt

somit die Realität von K^4 vom Restsymbol $\left(\frac{\alpha'}{\mathfrak{d}}\right)$ ab, wo (α') ein beliebiges Idealquadrat negativer Norm ist. Das Restsymbol ist auch unabhängig von der Zusammensetzung von $\mathfrak{d}$: ersetzt man in $\mathfrak{d}$ etwa den Primteiler $\mathfrak{q}_1$ durch $\mathfrak{q}_1^s$, so ändert sich der Restcharakter von α' nicht, weil $N(\alpha') = -a^2$ quadratischer Rest für $N(\mathfrak{q}_1) = q_1$ ist. Ob K^4 reell ist, hängt demnach nur von der Zerfällung $D = D_1 D_2$ ab.

Jetzt beweisen wir analog zu Satz 4 aus Kap. 1: Ein zur Z. 2. A. $D = D_1 D_2$ gehörender Körper K^4 ist dann und nur dann reell, wenn

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 . \tag{7}$$

Wenn wir dann noch beweisen, daß die Positivität von (7) notwendig dafür ist, daß sich K^4 zu einem K^8 erweitern läßt, sind die Behauptungen B. und C. bewiesen. Denn ist nur ein K^4 imaginär, so auch der volle Klassenkörper $\tilde{K}$ von K. Sind hingegen alle K^4 reell, und gibt es keinen K^8, so ist auch $\tilde{K}$ reell.

Der Beweis dieser Sätze verläuft ganz den Beweisen 4^{I}, 4^{II}, 5. für $n = 2$ entsprechend. Wir dürfen K^4 als den Teilklassenkörper von $\tilde{K}$ wählen, der zur Untergruppe $\mathfrak{H}_1 = \{C_1^4, C_2, \ldots, C_{n-1}\}$ der Formenklassengruppe $\mathfrak{C}$ gehört.

Ist K^4 imaginär, so ist $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{R}_1 = \{C_2, \ldots, C_{n-1}\}$, und -1 ist außerhalb $\mathfrak{H}_1$ darstellbar. Bei der zu K^4 gehörigen Zerfällung $D = D_1 D_2$ ist dann etwa $+D_1$ und $-D_2$ in $\mathfrak{H}_1$ darstellbar; d. h. in der zu K^4 gehörigen Idealgruppe liegt das Ideal $D_1^{1/2}$, nicht aber $D_2^{1/2}$. Ist wieder $D_1 = p_1 p_2 \ldots p_r$; $D_2 = q_1 \ldots q_s$, so bedeutet das, daß von den Primidealen $p_1^{1/2}, \ldots, p_r^{1/2}$ in K, die alle noch in K^2 zerfallen, allenfalls eine gerade Anzahl in K^4 nicht mehr weiter zerfällt. Von den $q_\sigma^{1/2}$ dagegen eine ungerade Anzahl. Diese Aussagen über die p_ϱ und q_σ gelten dann auch in K_1 und K_2. Faßt man sie wieder als Aussage über ihre Produkte zusammen, so erhält man, daß $(\sqrt{D_1})$ in K_1 in der Idealgruppe für K^4 liegt, in K_2 aber $(\sqrt{D_2})$ nicht. Und das heißt, weil K^4 imaginär ist und D_1 und D_2 negative Norm haben:

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = -1; \quad \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = +1 \text{ in } \mathsf{P}.$$

Ist K^4 reell, so ist -1 in $\mathfrak{H}_1$ darstellbar. D_1 und D_2 sind also beide in $\mathfrak{H}_1$ darstellbar oder beide nicht. Im ersten Falle gelangen wir zu $(7) = +1$, im zweiten Falle zu $(7) = -1$. Dies folgt wieder genau so wie vorher. — Im zweiten Falle sind ferner D_1 und D_2 in $C_1^2 \mathfrak{H}_1$ darstellbar, und daraus folgt $C_1^4 = E$. Es gibt also keinen K^8 zur Zerfällung $D = D_1 D_2$. Gilt insbesondere $(7) = -1$ für alle Z. 2. A. von D, so gibt es überhaupt keine Formenklasse der Ordnung 8, und dann folgt aus dem

obigen Beweis, daß $\tilde{K}$ reell, also $N(\varepsilon) = -1$. Wenn hingegen (7) auch nur für eine Z. 2. A. ungültig ist, so folgt nach dem Obigen schon $N(\varepsilon) = +1$. Dieser Fall der Unlösbarkeit von (1) läßt sich also auch für ein D mit beliebig viel Faktoren noch einfach beschreiben.

Die in A., B., C. aufgestellten Behauptungen über die Lösbarkeit von (1) sind hiermit bewiesen; wir wissen nur noch nicht, wann im Falle der Gültigkeit von (7) für alle Z. 2. A. und Positivität von (7) für wenigstens eine Z. 2. A. die weitere Art B. vorliegt. Darum bleibt uns noch zu untersuchen, wann für die Existenz eines K^8 zur Zerfällung $D = D_1 D_2$ die schon als notwendig erkannte Bedingung $(7) = +1$ auch hinreichend ist, und welche Bedingungen andernfalls noch hinzukommen. Es gilt der Satz:

Ist $e_4 = 1$, d. h. gibt es in der Klassengruppe nur eine durch 4 teilbare Invariante, also auch nur eine Z. 2. A. $D_1 D_2$ von D, so ist diese Invariante dann und nur dann durch 8 teilbar, wenn $(7) = +1$.

In diesem Falle hat nämlich, wenn wir uns an die früheren Bezeichnungen halten, die zu K^4 gehörige Klassenuntergruppe $\mathfrak{H}_1 = \{C_1^4, C_2, \ldots, C_{n-1}\}$ mit dem Hauptgeschlecht den Durchschnitt $\{C_1^4\}$, der $\pm D_1, D_2$ darstellt und darum nicht mit der Hauptklasse zusammenfallen kann. Wenn aber $e_4 > 1$ und etwa C_2 die Ordnung 4 hat, könnten D_1 und D_2 in C_2^2 darstellbar sein. Tatsächlich fällt die Bedingung dafür, daß zur Z. 2. A. $D = D_1 D_2$ ein K^8 gehört, um so schärfer aus, je größer e_4 ist: Die sämtlichen 2^{e_4} Z. 2. A. $D = D_1' D_2'$ einschließlich der identischen verteilen sich auf die 2^{e_4} zweiseitigen Klassen des Hauptgeschlechts so, daß in jeder solchen Klasse vier Zahlen $P, -Q, R, -S$ darstellbar sind, wo $D = PQ = RS$ zwei gleiche oder verschiedene Zerfällungen von D sind, je nachdem $N(\varepsilon) = -1$ oder $+1$[4]). Jetzt ist die Ordnung von C_1 dann und nur dann durch 8 teilbar, wenn *alle* Teiler zweiter Art von D in $\mathfrak{H}_1$ darstellbar sind, da gerade dann C_1^2 nicht unter den zweiseitigen Klassen vorkommt. Ist wieder $D = D_1 D_2$ die zu $\mathfrak{H}_1$ gehörige Zerfällung, $K_1 = \mathsf{P}(\sqrt{D_1})$, $K_2 = \mathsf{P}(\sqrt{D_2})$, *so müssen die Faktoren $\pm D_1^{(\nu)}$ der e_4 Basiszerfällungen zweiter Art (und damit auch alle Faktoren zweiter Art) in K_1 oder K_2 Normen von Idealen sein, die in der zu K^4 gehörigen Idealgruppe liegen.*

Eine vernünftige Verteilung der Bedingungen auf K_1 und K_2 läßt sich jedoch nur dann erreichen, wenn die Basiszerfällungen $D = D_1^{(\nu)} D_2^{(\nu)}$ so gewählt werden können, daß alle $D_1^{(\nu)}$ Teiler von D_1 oder D_2, den Faktoren einer bestimmten Basiszerfällung, sind. Dann ist die Entscheidung, ob $(D_1^{(\nu)})^{1/2} = \mathfrak{D}$ zur Idealgruppe von K^4 gehört, entweder in K_1 bei $D_2 = N(\mathfrak{d})$ durch den quadratischen Restcharakter $\left(\frac{\delta}{\mathfrak{d}}\right)$ einer Zahl

$$\delta = \mathfrak{D}\mathfrak{t}^2 \quad \text{mit} \quad N(\delta) > 0$$

gegeben, oder in K_2 bei $D_1 = N(\mathfrak{d})$.

Eine solche Basiswahl ist aber schon von $n = 4$ an nicht immer möglich, wie das Beispiel $D = p_1 p_2 p_3 p_4$; $\left(\frac{p_\mu}{p_\nu}\right) = -1$ zeigt, das ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Rédei verdanke. Hier sind $D = p_1 p_2 \times p_3 p_4 = p_1 p_3 \times p_2 p_4$ zwei unabhängige Zerfällungen zweiter Art, und die komponierte Zerfällung lautet $D = p_1 p_4 \times p_2 p_3$. In einem solchen Falle ist aber doch das obige Kriterium $\left(\frac{\delta}{\mathfrak{d}}\right) = 1$ brauchbar, wenn jetzt $\mathfrak{D}$ als ein zu $\mathfrak{d}$ primes Ideal mit der Norm $D_1^{(\nu)}$ gewählt wird.

Aber selbst, wenn die Basiswahl in der angegebenen Weise möglich ist, wie immer noch bei $D = p_1 p_2 p_3$, läßt sich für $e_4 \geqq 2$, $(7) = +1$ die Existenz eines K^8 vollständig nur durch Restsymbole in K_1, nicht aber in P entscheiden. Bildet man nämlich das biquadratische Symbol $\left(\frac{\delta^2}{\mathfrak{d}}\right)_4$ für einen echten Teiler $\mathfrak{D}$ von $\sqrt{D_1}$, so steht im Zähler nur $\delta^2 = D_1^{(\nu)}\tau$, wo $\tau = t^4$ irrational; selbst für $t = 1$, also $\mathfrak{D} = (\delta)$ und $N(\varepsilon_1) = +1$, hat man nur $\tau = \varepsilon_1$.

Daß überhaupt *rationale* biquadratische Reste für unsere Fragestellung maßgebend sein konnten, lag ja nur daran, daß Aussagen über Idealklassen in K in Aussagen über quadratische Reste in einem Körper K_1 umgeformt werden konnten, wobei diese Reste Quadratwurzeln rationaler Zahlen waren. Und hiermit ist auch die Rolle rationaler Potenzreste für unsere Fragen erschöpft.

Das Kriterium $\left(\frac{\delta}{\mathfrak{d}}\right) = 1$ für die durch 8 teilbaren Invarianten ist aber doch in jedem Falle von Wichtigkeit: Einmal läßt sich ihre Anzahl e_8 oft leichter auf diese Weise praktisch bestimmen als durch Aufstellung der reduzierten quadratischen Formen, und vor allem erhält man als Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine durch 4 teilbare Invariante auch durch 8 teilbar ist, $1 : 2^{e_4+1}$, was auch zur Bestimmung der Häufigkeit der C-Zahlen, über die wir ja noch wenig wissen, wichtig werden wird.

(Eingegangen am 10. November 1933.)

Über die Begründung der Mengenlehre[1]).

Von

E. Kamke in Tübingen.

Über die Begründung der (abstrakten) Mengenlehre ist schon viel diskutiert worden. Wenn ich trotzdem dazu noch etwas sage, so geschieht es deswegen, weil die modernen Begründungsversuche der Mengenlehre meines Erachtens einen zu einseitigen Verlauf genommen haben, indem bei ihnen das Augenmerk fast ausschließlich einer Axiomatisierung des Mengenbegriffs zugewendet wurde[2]).

Ich skizziere zunächst, wie es dazu gekommen ist. Nachdem Cantor in seinen ersten Arbeiten sehr vorsichtig sich hauptsächlich mit Mengen der beiden ersten Zahlklassen beschäftigt hatte, veröffentlichte er in den Jahren 1895 und 1897 seine zusammenfassende Darstellung der abstrakten Mengenlehre[3]), in der er Mengen beliebiger Art, d. h. irgendwelche Gesamtheiten oder Mannigfaltigkeiten von „bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens“[4]) behandelte. Für die auf diesem Mengenbegriff fußende Mengenlehre gelang es Cantor und seinen Nachfolgern, ein Lehrgebäude von wunderbarer Schönheit zu errichten, für das sich immer weitere Kreise der mathematischen Welt begeisterten. Diese Entwicklung wurde durch die Entdeckung von Antinomien innerhalb des errichteten Lehrgebäudes ernstlich gestört. Ich lasse diejenigen beiseite, in die wie in die Richardsche sprachliche Ungenauigkeiten hineinspielen oder die über das Gebiet der Mathematik hinausgreifen und auch als rein logische Antinomien formuliert werden können. Ich beschränke mich hier auf die beiden typischen Antinomien, die ausschließlich von Begriffsbildungen der Mengenlehre Gebrauch machen, und die wohl den stärksten Einfluß auf die Neubegründung der Mengenlehre gehabt haben. Das sind die Antinomien von Russell und von Burali-Forti.

---

[1]) Vorgetragen am 18. Sept. 1933 bei der Deutschen Mathematikertagung in Würzburg.

[2]) Andeutungsweise habe ich das schon 1928 in dem Bändchen „Mengenlehre“, Berlin und Leipzig 1928, S. 158 f. ausgesprochen. Der Inhalt dieses ganzen Vortrages geht im wesentlichen auf eine damals verfaßte Skizze zurück.

[3]) Mathem. Annalen 46 (1895), 481—512; 49 (1897), 207—246. Gesammelte Abhandlungen S. 282—356.

[4]) A. a. O., S. 481 bzw. S. 282.

Bei der Russellschen Antinomie wird die Menge aller Mengen gebildet, die sich selbst nicht als Element enthalten, und nun festgestellt, daß dieser Begriff einen Widerspruch enthält, da eine derartige Menge sich selbst als Element enthalten müßte und zugleich nicht enthalten dürfte. — Bei der Antinomie von Burali-Forti wird die Menge aller Ordnungszahlen gebildet und festgestellt, daß es doch noch Ordnungszahlen geben müßte, die in jener Menge, die alle Ordnungszahlen enthalten sollte, nicht vorkommen.

Aus diesen Antinomien zog man die Folgerung, daß man nicht in völlig beliebiger Weise Dinge zu Mengen zusammenfassen dürfe. Da der Mengenbegriff nicht auf andere Grundbegriffe zurückführbar erschien, begann man die Mengenlehre axiomatisch zu begründen. Man legte die Beziehungen zwischen den Dingen, die man Mengen nennen wollte, also Beziehungen wie „Element-sein", „Untermenge", „Gleichheit" durch ein Axiomensystem[5]) fest. Dieses Axiomensystem war selbstverständlich so gewählt, daß sich aus ihm die Sätze der Cantorschen Mengenlehre im wesentlichen ebenfalls entwickeln ließen, jedoch die bisher bekannt gewordenen Antinomien nicht auftreten konnten. Ob das Axiomensystem wirklich in dem weitesten Sinne widerspruchsfrei ist, daß man bei der Gründung eines Lehrgebäudes auf dieses Axiomensystem niemals innerhalb dieses Lehrgebäudes zu Widersprüchen kommt, diese Frage ist bis heute nicht entschieden. Nun ist zwar auch sonst noch bei keinem für die Mathematik wesentlichen Axiomensystem — nicht einmal bei dem einfachen von Peano[6]) für die Arithmetik angegebenen — ein solcher Nachweis für die Widerspruchsfreiheit im allgemeinsten Sinne geglückt. Aber die Situation ist bei dem Peanoschen Axiomensystem deswegen doch anders, weil dieses Axiomensystem nichts anderes als eine axiomatische Einkleidung eines sehr durchsichtigen konstruktiven Verfahrens zur Erzeugung der Zahlen darstellt und weil in dem Bereich der Arithmetik sich noch niemals Widersprüche gezeigt haben. Es sei aber noch auf zwei andere Punkte hingewiesen.

Erstens: Zunächst bestand wohl die Hoffnung, durch ein Axiomensystem der erwähnten Art (populär gesprochen) genau die Cantorsche

[5]) Ich denke hierbei in erster Linie an die von Zermelo und Fraenkel aufgestellten Axiomensysteme, die man bei A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. (1928), 268ff. und bei E. Zermelo, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), 29ff. findet. Man vgl. jedoch z. B. auch J. v. Neumann, Journal für die reine und angewandte Mathematik 154 (1925), 219—240 und Mathem. Ztschr. 27 (1928), 699—752.

[6]) A. Genochi - G. Peano, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, Leipzig 1899, Anhang II. — E. Landau, Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930, S. 2.

Mengenlehre, soweit sie widerspruchsfrei ist, zu erfassen. Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt. Die aufgestellten Axiomensysteme haben sich vielmehr als nicht kategorisch herausgestellt, d. h. Dingbereiche, die ihnen genügen, brauchen nicht zueinander isomorph zu sein. Populär gesprochen: es gibt Mengenlehren mit Dingbereichen von wesentlich verschiedenem Umfang[7]). Das hat zur Folge, daß es in diesen Mengenlehren Fragen gibt, die auf Grund des Axiomensystems nicht entschieden werden können. Eine solche Frage ist z. B. die Frage nach dem Vorkommen von „Ordnungszahlen exorbitanter Größe“[8])[9]).

Zweitens: Wir wollen einmal annehmen, alle das Axiomensystem betreffenden Fragen, insbesondere die nach seiner Widerspruchsfreiheit seien befriedigend beantwortet. Dann bleibt noch das Anwendungsproblem. Um z. B. den Cantorschen Satz zu beweisen, daß die Ableitungen jeder Punktmenge von einer gewissen Ordnungszahl der zweiten Zahlklasse an alle übereinstimmen, brauchen wir die Ordnungszahlen der beiden ersten Zahlklassen, und zwar gerade in ihrer Cantorschen Definition. Um von dem Kontinuumproblem überhaupt nur reden zu können, brauchen wir den Anfang der Skala der Alefzahlen in der Cantorschen Definition und die Menge der reellen Zahlen. Hat man den Mengenbegriff axiomatisch eingeführt, so bleibt also immer noch die Aufgabe, ein Modell einer Mengenlehre zu konstruieren, in dem gerade ein Teil der Cantorschen Mengenlehre vorkommt. Für Fragen der vorher genannten Art ist also eine axiomatisierte Mengenlehre ein zwar interessanter, jedoch keineswegs übersichtlicher und mit Sicherheit zum Ziel führender Umweg.

Angesichts dieser Situation muß man überlegen, ob die Axiomatisierung des Mengenbegriffs wirklich unbedingt nötig ist. Auch sonst bildet man ja in der Mathematik Zusammenfassungen von Dingen bestimmter Art, ohne daß dieses als unzulässig angesehen wird[10]) oder gar zu Widersprüchen geführt hat. Ich erinnere nur an die Begriffe Gruppe, Zahlkörper, Ideal, Kurvenschar. Ob man dabei diese Bezeichnungen gebraucht oder von einer Gesamtheit von Dingen bestimmter Art oder von

---

[7]) Am deutlichsten hat das wohl Zermelo in den Fundamenta Mathematicae **16** (1930), 29 ff. gezeigt.

[8]) Für diesen Begriff vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl. 1914, S. 131.

[9]) Hat man ein „Modell“ einer Mengenlehre, das den Axiomen genügt, so ist die „Grenzzahl“ der in dieser Mengenlehre möglichen Ordnungszahlen zwar eine (in einer Erweiterung dieser Mengenlehre existierende) Ordnungszahl von exorbitanter Größe, aber keine Ordnungszahl in dem betrachteten Modell (Zermelo a. a. O.).

[10]) Von intuitionistischen Einwänden sehe ich ab und stelle mich durchaus auf formalistischen Boden.

einem System oder von einer Menge redet, das kann doch auf die Sache keinen Einfluß haben. Wir verlassen daher nun den axiomatisierten Mengenbegriff und kehren zu dem Cantorschen zurück und wollen uns vor allem die Antinomien daraufhin ansehen, ob sie wirklich zu einer radikalen Aufgabe des Cantorschen Mengenbegriffs zwingen.

Für die Antinomie von Russell ist die Frage von Wichtigkeit, ob es Mengen gibt, die sich selbst als Element enthalten. Sobald eine Menge in dem Sinne einer Gesamtheit von wohldefinierten Objekten mehr als ein Element enthält, wird niemand, der unvoreingenommen an diese Frage herantritt, sie bejahen[11]). Hat man eine „Menge" von nur einem Element, so liegt im Sinne des Sprachgebrauchs bereits eine uneigentliche Menge vor, und man hat nun eine Konvention zu treffen[12]), die im Sinne Cantors, wenn sie für alle aus nur einem Element bestehenden Mengen gleichlautend sein soll, und wenn man sich nicht in Widersprüche verstricken will[13]), nur so lauten kann, daß die Menge $\{a\}$ mit dem Element a stets von dem Element a als verschieden anzusehen ist. Nimmt man diesen Standpunkt ein[14]), so ist die Russellsche Menge nichts anderes als die Menge aller Mengen oder die Gesamtheit aller Gesamtheiten. Eine solche „Menge" wird aber niemand im Ernst als eine wohldefinierte Menge ansehen können. Abgesehen davon, daß sie eine Menge wäre, die sich selbst als Element enthielte, müßte sie z. B. enthalten die Menge aller Gedanken Cäsars, die Menge aller künftig entstehenden Weltkörper, die Menge aller Träume, die Menge aller denkbaren falschen Urteile, die Menge aller widerspruchsvollen Begriffe, sowie die Menge aller Untermengen dieser Mengen, die Menge aller Untermengen dieser neuen Mengen usw. usw. —, oder zum mindesten müßte man sich jedenfalls mit der Frage beschäftigen, ob diese „Mengen" abgelehnt werden dürfen oder nicht und warum. Die Russellsche Menge und die daran geknüpfte

---

[11]) Alle Versuche, eine Menge solcher Art aufzustellen, sind bisher fehlgeschlagen. Im Rahmen einer Axiomatik kann die Sache natürlich anders aussehen, zumal wenn die Widerspruchsfreiheit der Axiomatik nicht bewiesen ist.

[12]) Wie man z. B. auch nach der Einführung der Potenz a^n als ein Produkt von n Faktoren über a^1 noch eine ergänzende Konvention zu treffen hat.

[13]) Würde man festsetzen, daß stets $\{a\} = a$ sein soll, so wäre für $a = \{1, 2\}$ die Menge $\{a\}$ einerseits eine Menge mit nur einem Element, anderseits auch gleich $\{1, 2\}$, also eine Menge mit zwei Elementen (W. Sierpinski, Leçons sur les nombres transfinis, Paris 1928, S. 2, Fußnote 2).

[14]) Er ist nicht neu. Vgl. z. B. Schoenflies, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinig. 15 (1906) 22; Kamke, Mengenlehre, Berlin und Leipzig 1928, S. 157. Recht temperamentvoll hat ihn Study vertreten (Sitzungsber. d. Preuß. Akademie d. Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, Jahrg. 1929).

Antinomie liegen also sicher nicht im Rahmen der Begriffsbildungen, die der Mathematiker als sinnvoll anerkennen kann[15]).

Damit findet aber auch die Burali-Fortische Antinomie ihre Aufklärung. Denn Ordnungszahlen sind in der Cantorschen Mengenlehre nichts anderes als wohlgeordnete Mengen mit der Maßgabe, daß in Relationen zwischen Ordnungszahlen jede der darin auftretenden wohlgeordneten Mengen durch jede zu ihr ähnliche ersetzt werden kann. Will man die Menge aller Ordnungszahlen bilden, so hat man also, um sicher zu sein, daß keine ausgelassen wird, die Menge aller wohlgeordneten Mengen zu bilden, aus der Klasse der untereinander ähnlichen Mengen je eine auszuwählen und diese ausgewählten Mengen zu einer neuen Menge zu vereinigen. Abgesehen davon, daß diese Menge selber als wohlgeordnete Menge geschrieben werden könnte und dann zu einer Menge führte, die sich selber als Element enthielte, ist gegen sie das gleiche wie gegen die Menge aller Mengen zu sagen.

Nachdem diese Antinomien aufgeklärt sind, sieht man, wie man noch beliebig viele Antinomien ähnlicher Art bilden kann. Als paradox erweisen sich z. B. die Menge aller geraden Ordnungszahlen, die Menge aller Ordnungszahlen, die größer als eine gegebene Ordnungszahl sind, allgemein jede Menge von Ordnungszahlen, deren Elemente jede Größe überschreiten. Abgesehen davon, daß in diese Mengen immer in irgendeiner Form Mengen hineinspielen, die sich selbst als Element enthalten, kann man sich leicht davon überzeugen, daß zur Bildung dieser Mengen völlig uferlos Dinge von ganz unübersehbarer und zweifelhafter Art herangezogen werden müßten.

Lassen sich die Antinomien bei näherem Zusehen auch auf eine einheitliche Wurzel zurückführen, so ist die Lage doch unheimlich genug, weil nicht immer auf den ersten Blick ersichtlich ist, ob es sich um sinnvolle oder sinnlose Mengen handelt. Ja die Unsicherheit greift noch weiter um sich. Überall, wo Mengen von Ordnungszahlen auftreten, wird man nun erst Erwägungen darüber anstellen müssen, ob man sinnvolle Mengen vor sich hat oder nicht. Man wird daher Mißtrauen gegen den Satz der Cantorschen Mengenlehre haben, daß es zu jeder Menge von Ordnungszahlen eine Ordnungszahl gibt, die größer als jedes Element

[15]) Gegen eine mißbräuchliche Verwendung der Sprache zu sinnlosen Wortzusammenstellungen wie „eine gerade ungerade Zahl“ oder „die größte Primzahl“ oder das bei Jakob Bernoulli vorkommende „letzte Glied einer unendlichen Reihe“ oder „eine Zahl, die noch nicht Null ist, aber Null wird“ gibt es keinen Schutz. Vielmehr sind genau genommen Wortzusammenstellungen und mit ihrer Hilfe gebildete vermeintliche Begriffe immer erst noch daraufhin zu untersuchen, ob sie sinnvoll sind.

dieser Menge ist[16]). Man wird ferner Bedenken gegen die beim Beweise des Wohlordnungssatzes auftretenden wohlgeordneten Mengen haben, mögen sie in der Form von Γ-Folgen[17]) oder in der Form aller Typen wohlordnungsfähiger Teilmengen einer gegebenen Menge[18]) oder in der Form von Ketten[19]) auftreten. Es könnte nämlich sein, daß hier gerade die Burali-Fortische Menge vorliegt. Eine Gewißheit, daß dem nicht so ist, erhält man gerade erst durch den mit Hilfe dieser Mengen zu beweisenden Wohlordnungssatz.

Die Antinomien lassen sich also zwar auflösen, aber trotzdem werden durch die Unsicherheit, die sie in die Mengenlehre hineingetragen haben, wesentliche Teile der sogenannten naiven Mengenlehre, nämlich die ganze Theorie der Ordnungszahlen, hinfällig. Gleichwohl läßt sich diese Theorie bei einer andersartigen Einführung der Ordnungszahlen auch ohne eine Axiomatik der Mengenlehre retten. In der sogenannten naiven Mengenlehre ist von Mengen mit beliebigen Elementen die Rede, und die eigentlichen Schwierigkeiten rühren, wie wir gesehen haben, daher, daß man annimmt, man könnte den Bereich dieser Mengen völlig übersehen. Nun operiert man aber auch sonst in der Mathematik nicht mit so unscharf definierten Gebilden. Auch sonst führt man in der Mathematik nicht Zahlen ein, indem man sie durch irgendwelche Gebilde — etwa die Zahl 3 durch einen Schuh, einen Traum und eine Klaviersonate — repräsentiert, sondern man kommt zu ihnen durch wohlumrissene gedankliche Konstruktionen, deren Präzision der Schärfe der mathematischen Schlußverfahren entspricht. So ist auch Cantor ursprünglich vorgegangen[20]). Er hat für die Konstruktion der Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse zwei Erzeugungsprinzipien aufgestellt. Das erste besteht in der Hinzufügung einer neuen Einheit zu der letzten schon konstruierten Zahl [also z. B. $4 = 3 + 1$, $\omega + 2 = (\omega + 1) + 1$]; das zweite besteht in der Einführung einer unendlichen Folge von schon konstruierten Zahlen als neue Zahl. So kann man in der Tat in bekannter Weise die Zahlen $1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega \cdot 2, \ldots$ konstruieren. Cantor ist später auf diese Art der Einführung von Ordnungszahlen nicht mehr zurückgekommen. Diese Konstruktion läßt sich aber so ausbauen, daß man einen Bereich von Ordnungszahlen von vermutlich[21]) ausreichendem Umfang erhält.

[16]) Hausdorff, a. a. O., S. 106; Fraenkel, a. a. O., S. 187 in der auf der Mitte der Seite befindlichen Formulierung; Kamke, a. a. O., S. 106.

[17]) Zermelo, Mathem. Annalen 59 (1904), 513ff.; Kamke, a. a. O., S. 128.

[18]) Hausdorff, a. a. O., S. 134 (mein Bedenken besteht trotz der Fußnote auf dieser Seite); Sierpinski, a. a. O., S. 228ff.

[19]) Zermelo, Mathem. Annalen 65 (1908), 107ff.; Hausdorff, a. a. O., S. 136f

[20]) Mathem. Annalen 21 (1883), 576ff. Gesammelte Abhandlungen, S. 195ff.

[21]) Auf das „vermutlich" komme ich später (S. 125) zurück.

Ich erinnere zunächst an die Einführung der natürlichen Zahlen[22]). Man geht von irgendeinem Ding, 0 genannt, aus und setzt etwa $1 = [0]$; weiter setzt man $1 > 0$ fest[23]) und nennt 1 einen „Nachfolger" von 0, und zwar einen unmittelbaren Nachfolger, da es (mangels der Existenz weiterer Zahlen) keine Zahl a gibt, für die $0 < a < 1$ ist. Dann wird $2 = [1]$ (oder $2 = \{0, 1\}$) gesetzt; ferner wird $0 < 2$ und $1 < 2$ festgesetzt und 2 ein Nachfolger von 0 und 1 genannt. Offenbar gilt das transitive Gesetz „aus $a < b$, $b < c$ folgt $a < c$", und 2 ist ein unmittelbarer Nachfolger von 1. So fährt man fort. Hat man irgendeine natürliche Zahl a definiert, so wird $[a]$ (oder $\{0, 1, \ldots, a\}$) als Nachfolger aller Zahlen $n \leqq a$ eingeführt und $n < [a]$ für $n \leqq a$ festgesetzt. Es gilt dann auch jetzt noch das transitive Gesetz, und $[a]$ ist unmittelbarer Nachfolger von a. Dieses Verfahren nimmt seinem Wesen nach kein Ende. Die Gesamtheit der so herstellbaren Zahlen bildet die Menge der natürlichen Zahlen. Diese hat, wie aus ihrer Konstruktion unmittelbar hervorgeht, folgende vier Eigenschaften:

I_1. Die Menge ist geordnet. Das heißt für je zwei Zahlen gilt genau eine der drei Relationen $a = b$, $a < b$, $a > b$; und aus $a < b$, $b < c$ folgt $a < c$.

II_1. Es gibt eine Zahl 0, so daß $0 < a$ für jedes $a \neq 0$ ist.

III_1. Zu jedem a gibt es mindestens einen (also wegen I_1 genau einen) unmittelbaren Nachfolger $[a]$.

Dabei heißt b ein Nachfolger von a, wenn $b > a$ ist, und unmittelbarer Nachfolger von a, wenn $b > a$ ist und $c \geqq b$ für $c > a$ gilt.

IV_1. Ist $\mathfrak{Z}$ eine Menge von natürlichen Zahlen mit den Eigenschaften[24])

a) $0 \varepsilon \mathfrak{Z}$,

b) aus $a \varepsilon \mathfrak{Z}$ folgt $[a] \varepsilon \mathfrak{Z}$,

so ist $\mathfrak{Z}$ die Gesamtheit der natürlichen Zahlen.

Aus diesen vier Eigenschaften lassen sich ohne Zurückgehen auf das vorher beschriebene konstruktive Verfahren die bekannten Eigenschaften der natürlichen Zahlen ableiten. Man kann daher die Eigenschaften I_1 bis IV_1 auch als ein modifiziertes Peanosches Axiomensystem für die natürlichen Zahlen ansehen; dabei ist III_1 das axiomatisierte Konstruktionsprinzip und IV_1 ein Beschränkungsaxiom, das die vollständige Induktion ermöglicht.

Weiter kann man mit Cantor die Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse folgendermaßen bilden. Die Gesamtheit der natürlichen Zahlen (oder auch

---

[22]) Darunter verstehe ich hier die ganzen, nichtnegativen Zahlen.

[23]) Wie auch sonst sollen $a > b$ und $b < a$ dasselbe bedeuten.

[24]) $a \varepsilon \mathfrak{Z}$ bedeutet, wie üblich: a gehört zu $\mathfrak{Z}$, a ist Element von $\mathfrak{Z}$.

jede unbegrenzte, monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen) wird als neue Ordnungszahl Ω_1 (in der üblichen Bezeichnung ist $\Omega_1 = \omega_0$) eingeführt. Weiter werden zwei Konstruktionsprinzipien eingeführt: erstens das Ω_0-Prinzip, das dem obigen Konstruktionsaxiom III_1 entspricht und darin besteht, daß zu jeder Zahl α_0 eine Zahl $\alpha = [\alpha_0]$ (oder die Gesamtheit der Zahlen, die $\leqq \alpha_0$ sind) als unmittelbarer Nachfolger von α_0 eingeführt wird; zweitens das Ω_1-Prinzip, das darin besteht, daß zu jeder aufsteigenden Folge $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$ eine neue Zahl $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$ (oder auch die Gesamtheit der Zahlen β, zu denen es ein $\alpha_k \geqq \beta$ gibt) als unmittelbarer Nachfolger der Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ eingeführt wird. In jedem Falle wird festgesetzt, daß $\alpha >$ jedes β sein soll, für das $\alpha_0 \geqq \beta$ bzw. für das ein $\alpha_k \geqq \beta$ ist. Ferner wird im zweiten Falle noch festgesetzt, daß genau dann $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots] = [\beta_0, \beta_1, \ldots]$ sein soll, wenn es zu jedem α_k ein $\beta_l > \alpha_k$ und zu jedem β_k ein $\alpha_{l'} > \beta_k$ gibt.

Dieses Konstruktionsverfahren führt über jede einzelne Ordnungszahl und über jede einfache Folge von Ordnungszahlen hinaus. Die Gesamtheit der nach diesem Verfahren erhältlichen Zahlen bildet die zweite Zahlklasse. Diese hat, wie unmittelbar aus ihrer Konstruktion hervorgeht, die folgenden vier Eigenschaften:

I_2. Die Zahlen bilden eine geordnete Menge.

II_2. Es gibt eine Zahl Ω_1, so daß $\Omega_1 < \alpha$ für jedes $\alpha \neq \Omega_1$ ist.

III_2. Zu jeder Zahl α gibt es mindestens einen (also genau einen) unmittelbaren Nachfolger $[\alpha]$, und zu jeder aufsteigenden Folge $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$ gibt es mindestens einen (also genau einen) unmittelbaren Nachfolger $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$.

Dabei heißt β Nachfolger von α, wenn $\beta > \alpha$ ist; unmittelbarer Nachfolger, wenn $\beta > \alpha$ ist und $\gamma \geqq \beta$ für jedes $\gamma > \alpha$ gilt. Ferner heißt β Nachfolger der aufsteigenden Folge $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$, wenn $\beta >$ jedes α_k ist; unmittelbarer Nachfolger der Folge, wenn $\gamma \geqq \beta$ für jeden Nachfolger γ der Folge gilt.

IV_2. Ist $\mathfrak{Z}$ eine Menge von Ordnungszahlen mit den Eigenschaften

a) $\Omega_1 \varepsilon \mathfrak{Z}$,

b) aus $\alpha \varepsilon \mathfrak{Z}$ folgt $[\alpha] \varepsilon \mathfrak{Z}$,

c) aus $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$, $\alpha_0 \varepsilon \mathfrak{Z}$, $\alpha_1 \varepsilon \mathfrak{Z}, \ldots$ folgt $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots] \varepsilon \mathfrak{Z}$, so ist $\mathfrak{Z}$ die Gesamtheit der Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse.

I_2 bis IV_2 können wiederum als eine Axiomatisierung des Konstruktionsverfahrens angesehen werden; III_2 ist wieder das eigentliche Konstruktionsprinzip und IV_2 ein Beschränkungsaxiom, das die vollständige Induktion ermöglicht.

Die Verbindung zwischen den beiden Zahlklassen wird durch die zusätzlichen Festsetzungen hergestellt: es soll

α) $\Omega_1 = [n_0, n_1, \ldots]$ für $0 \leqq n_0 < n_1 < \cdots$

und

β) jedes $a <$ jedes α für jede Zahl a der ersten und jede Zahl α der zweiten Zahlklasse sein.

Ohne nochmaliges Zurückgehen auf die Konstruktion der Zahlen, allein aus den acht Tatsachen I_1 bis IV_2 zusammen mit α) und β) ergibt sich[25]):

1. Aus $[\alpha] = [\beta]$ folgt $\alpha = \beta$.

2. Aus $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots] = [\beta_0, \beta_1, \ldots]$

folgt, daß es zu jedem α_k ein $\beta_l > \alpha_k$ und zu jedem β_k ein $\alpha_{l'} > \beta_k$ gibt.

3. Entweder ist $\alpha = 0$, oder es gibt ein $\bar{\alpha}$, so daß $\alpha = [\bar{\alpha}]$ ist (α heißt dann eine Zahl erster Art), oder es gibt eine aufsteigende Folge $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$, so daß $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$ ist (α heißt dann eine Zahl zweiter Art oder Limeszahl).

4. In jeder nichtleeren Menge von Ordnungszahlen gibt es eine kleinste Zahl, jede Menge von Ordnungszahlen ist also wohlgeordnet.

Daraus folgt: es gibt keine absteigende unendliche Folge von Ordnungszahlen; allgemeiner gibt es keine Menge von Ordnungszahlen, bei der es zu jeder Zahl der Menge in der Menge eine kleinere Zahl gibt.

5. Zu jeder abzählbaren[26]) Menge von Ordnungszahlen gibt es eine wohlbestimmte nächstgrößere Ordnungszahl.

6. Für jede Ordnungszahl α ist die Menge der Ordnungszahlen, die $\leqq \alpha$ sind, endlich oder abzählbar.

7. Die Menge aller (bisher definierten) Ordnungszahlen ist nicht abzählbar.

Weiter lassen sich die wohlgeordnete Summe von zwei und von abzählbar vielen Ordnungszahlen und entsprechend Produkt und Potenz in bekannter Weise mit Hilfe von Normalfunktionen einführen. Der Beweis der Rechenregeln erfolgt im wesentlichen in der üblichen Weise.

Damit ist im Prinzip der Aufbau der transfiniten Arithmetik im Bereich der abzählbaren Mengen geleistet. Fragen über abzählbare Mengen, deren Elemente nicht Ordnungszahlen sind, werden in das Gebiet der Anwendungen der transfiniten Arithmetik verwiesen. Bei derartigen Mengen ist in jedem einzelnen Fall erst zu untersuchen, ob die Mengen als wohldefiniert angesehen werden können. Eine allgemeine Entscheidung dieser

---

[25]) Mit griechischen Buchstaben werden jetzt nicht nur die Zahlen der ersten, sondern der beiden ersten Zahlklassen bezeichnet.

[26]) Eine Menge heißt auch hier abzählbar, wenn sie der Menge der natürlichen Zahlen äquivalent ist.

Frage wird abgelehnt, da sie nicht möglich erscheint. Der angewandten transfiniten Arithmetik gehört z. B. die Frage an, ob jede abzählbare wohlgeordnete[27]) Menge M ihrem Ordnungstypus nach durch eine Ordnungszahl charakterisiert werden kann, d. h. ob es eine Ordnungszahl α gibt, so daß M der Menge der Ordnungszahlen $\mu < \alpha$ ähnlich ist. Diese Frage ist auch hier zu bejahen, und dieser Satz kann als Ersatz für den hier fehlenden Wohlordnungssatz angesehen werden.

Schließlich wollen wir uns noch die Menge aller Ordnungszahlen ansehen, die in der Cantorschen Mengenlehre zur Burali-Fortischen Paradoxie führte. Bei dem hier geschilderten Aufbau definiert diese Menge, da sie nach 7. nicht abzählbar ist, auf Grund unserer bisherigen Konstruktionsprinzipien keine Ordnungszahl, und damit entfällt die paradoxe Wirkung dieser Menge. Sie kann allerdings durch einen neuen Definitionsakt zur Definition einer neuen Ordnungszahl benutzt werden (solche Definitionsakte werden wir im folgenden reichlich verwenden), doch ist damit dann auch die bisherige Menge aller Ordnungszahlen verändert.

Bei dem bisher definierten Bereich von Ordnungszahlen können wir nicht stehenbleiben. Die Erweiterung dieses Bereiches wird in folgender Weise vorgenommen:

Es sei eine Menge $\mathfrak{B}$ von Ordnungszahlen definiert, die folgende Eigenschaften hat:

A. $\mathfrak{B}$ ist wohlgeordnet, d. h. für je zwei Zahlen α, β von $\mathfrak{B}$ besteht genau eine der drei Relationen

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta,$$

und in jeder Teilmenge von $\mathfrak{B}$ gibt es eine kleinste Ordnungszahl[28]). Ferner ist $0 \varepsilon \mathfrak{B}$ und $0 < \alpha$ für jedes $\alpha \neq 0$.

B. Es gibt eine Menge $\mathfrak{A}$ von Ordnungszahlen, die entweder $\mathfrak{B}$ oder ein Abschnitt von $\mathfrak{B}$ ist[29]), derart, daß $\mathfrak{B}$ in Teilmengen $\mathfrak{Z}(\alpha)$, *Zahlklassen* genannt, zerfällt, die den Elementen α von $\mathfrak{A}$ in eineindeutiger Weise zugeordnet sind, und daß diese Zahlklassen die folgenden Eigenschaften I bis III haben:

I. In jeder Zahlklasse $\mathfrak{Z}(\alpha)$ gibt es (nach A) eine kleinste Zahl Ω_α, *Anfangszahl* genannt, und es ist $\Omega_0 = 0$ und $\Omega_\alpha < \Omega_\beta$ für $\alpha < \beta$.

Definition: Ist für eine Zahl $\varrho > 0$ von $\mathfrak{B}$ jedem $\nu < \varrho$ eine Ordnungszahl μ_ν zugeordnet, so sagen wir, es sei eine Folge $\Phi(\mu_\nu)$ von $\nu < \varrho$

[27]) Für eine gegebene wohldefinierte Menge kann die „Wohlordnung" in der üblichen Weise definiert werden.

[28]) Es würde genügen, daß $\mathfrak{B}$ geordnet und die in B auftretende Menge $\mathfrak{A}$ wohlgeordnet ist.

[29]) Das heißt aus den Ordnungszahlen besteht, die kleiner als eine gewisse Zahl von $\mathfrak{B}$ sind.

Ordnungszahlen gegeben. Die Folge heißt aufsteigend, wenn $\mu_\nu < \mu_{\bar\nu}$ für $\nu < \bar\nu$ ist.

II. In $\mathfrak{Z}(\alpha)$ gibt es zu jedem $\nu \leqq \alpha$ und jeder aufsteigenden Ω_ν-Folge von Zahlen aus $\mathfrak{Z}(\alpha)$ genau eine auf diese Ω_ν-Folge unmittelbar folgende Zahl; das soll heißen:

Für $\nu = 0$: zu jeder Zahl β von $\mathfrak{Z}(\alpha)$ gibt es eine kleinste Zahl, die $> \beta$ ist; diese Zahl wird mit $[\beta]$ bezeichnet.

Für $\nu > 0$: ist die aufsteigende Folge $\underset{\mu < \Omega_\nu}{\Phi(\beta_\mu)}$ gegeben, wobei $\nu \leqq \alpha$ und die β_μ Zahlen aus $\mathfrak{Z}(\alpha)$ sind, so gibt es eine kleinste Zahl, die $>$ jedes β_μ ist; diese Zahl wird mit $\underset{\mu < \Omega_\nu}{[\Phi(\beta_\mu)]}$ bezeichnet.

III. $\mathfrak{Z}(\alpha)$ enthält außer Ω_α nur die auf Grund von II durch Ω_α bestimmten Zahlen: d. h. ist $\overline{\mathfrak{Z}}$ eine Menge von Ordnungszahlen aus $\mathfrak{B}$ derart, daß

a) $\Omega_\alpha \varepsilon \overline{\mathfrak{Z}}$,

b) $\Omega_\alpha \leqq \beta$ für jede Zahl β aus $\overline{\mathfrak{Z}}$ ist,

c) für jede aufsteigende Ω_ν-Folge mit $\nu \leqq \alpha$ und Zahlen aus $\overline{\mathfrak{Z}}$ auch die unmittelbar folgende Zahl zu $\overline{\mathfrak{Z}}$ gehört,

so ist $\overline{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}(\alpha)$.

Es gibt derartige Bereiche, z. B. die erste und die beiden ersten Zahlklassen.

Durch transfinite Induktion läßt sich zeigen, daß die unter B beschriebene Einteilung in Zahlklassen bei gegebenem $\mathfrak{B}$ eindeutig ist.

Es sei nun ein Bereich $\mathfrak{B}$ gegeben. Ferner sei Ω' eine in $\mathfrak{B}$ vorkommende Anfangszahl und $\underset{\mu < \Omega'}{\Phi(\Omega_{\lambda_\mu})}$ eine aufsteigende Ω'-Folge[30]) von Anfangszahlen Ω_{λ_μ} aus $\mathfrak{B}$. Dann sind folgende beiden Fälle möglich:

1. Entweder: Es gibt in $\mathfrak{B}$ eine Anfangszahl und daher wegen A eine kleinste Anfangszahl Ω_γ, die $>$ jedes Ω_{λ_μ} unserer Ω'-Folge ist. Dann existiert die Zahlklasse $\mathfrak{Z}(\gamma)$ und gehört zu $\mathfrak{B}$.

2. Oder: Es gibt in $\mathfrak{B}$ keine Anfangszahl, die $>$ jedes Ω_{λ_μ} ist. Dann sind folgende beiden Fälle zu unterscheiden:

α) $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt von $\mathfrak{B}$, etwa der durch γ bestimmte Abschnitt, d. h. die Menge der Zahlen $\nu < \gamma$. Dann ist $\gamma = \underset{\mu < \Omega'}{[\Phi(\lambda_\mu)]}$, und es wird Ω_γ gleich der Gesamtheit der Zahlen von $\mathfrak{B}$ gesetzt.

β) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Dann werden γ und Ω_γ gleich der Gesamtheit der Zahlen von $\mathfrak{B}$ gesetzt.

In jedem der beiden Fälle von 2. wird weiter festgesetzt, daß $\Omega_\gamma >$ jede Zahl von $\mathfrak{B}$ gilt.

---

[30]) Für $\Omega' = \Omega_0 = 0$ soll die Folge eine Anfangszahl Ω_λ sein.

Zwei Ω'-Folgen bestimmen offensichtlich genau dann die gleichen Zahlen γ und Ω_γ, wenn jede Zahl der ersten Folge größer als eine Zahl der zweiten Folge ist und auch umgekehrt jede Zahl der zweiten Folge größer als eine Zahl der ersten Folge ist (oder auch, wenn diese Tatsachen für die Indizes der Anfangszahlen gelten, welche die Elemente der Ω' Folgen bilden).

Liegt einer der beiden Fälle von 2. vor, so wird die neu definierte Zahl Ω_γ als Anfangszahl einer neuen Zahlklasse $\mathfrak{Z}(\gamma)$ genommen. Die Zahlen der Zahlklasse werden entsprechend den ausführlichen Darlegungen, die bei der ersten und zweiten Zahlklasse gemacht sind, so konstruiert, daß eine Menge $\mathfrak{Z}(\gamma)$ von Zahlen mit folgenden Eigenschaften entsteht:

0. Die Zahlen bilden eine geordnete Menge.

I'. Ω_γ ist die kleinste Zahl in $\mathfrak{Z}(\gamma)$.

II'. In $\mathfrak{Z}(\gamma)$ gibt es zu jedem $\nu \leqq \gamma$ und jeder Ω_ν-Folge von Zahlen aus $\mathfrak{Z}(\gamma)$ genau eine auf diese Ω_ν-Folge unmittelbar folgende Zahl.

III'. $\mathfrak{Z}(\gamma)$ enthält außer Ω_γ nur die auf Grund von II' durch Ω_γ bestimmten Zahlen.

Auf Grund der vorstehenden Eigenschaften läßt sich zeigen, daß die Menge $\mathfrak{Z}(\gamma)$ wohlgeordnet ist. Wird noch festgesetzt, daß jede Zahl von $\mathfrak{Z}(\gamma)$ größer als jede Zahl von $\mathfrak{B}$ sein soll, so ist $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{Z}(\gamma)$ eine wohlgeordnete Menge, die gerade wieder die vorhin für $\mathfrak{B}$ angeführten Eigenschaften A und B nebst I bis III hat. Damit ist ein vollkommen eindeutiges Verfahren angegeben, durch das man von der Menge $\mathfrak{B}$ von Ordnungszahlen zu einer umfassenderen Menge $\mathfrak{B}'$ gelangt, falls nicht der Fall 1 vorliegt, d. h. falls nicht jede mit einer Anfangszahl Ω' von $\mathfrak{B}$ gebildete aufsteigende Ω'-Folge von Anfangszahlen eine zu $\mathfrak{B}$ gehörige Anfangszahl definiert.

Nun gehen wir von $\mathfrak{B} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, d. h. von der ersten Zahlklasse aus. Unser Konstruktionsverfahren führt von diesem $\mathfrak{B}$ zu der Anfangszahl Ω_1 und einem Bereich $\mathfrak{B}'$, der aus den beiden ersten Zahlklassen besteht. Wird auf diesen Bereich als nunmehriges $\mathfrak{B}$ das Verfahren angewendet, so führt 2α) zu Ω_2 und zu einem Bereich, der aus den drei ersten Zahlklassen besteht. So kann man fortfahren. Man übersieht aber, indem man mit den Zahlen der ersten Zahlklasse eine Induktion ausführt, auch mit einem Blick, daß man auf Grund von 2α) alle Ω_n und alle $\mathfrak{Z}(n)$ mit endlichem n erhalten kann. Die Gesamtzahl aller Ordnungszahlen dieser Zahlklassen bildet wieder einen Bereich $\mathfrak{B}$; jetzt führt 2α) zu Ω_{Ω_1} und $\mathfrak{Z}(\Omega_1)$ und weiter durch Verwendung der Zahlen dieses $\mathfrak{B}$ für eine transfinite Induktion zu den Anfangszahlen Ω_{Ω_n} und den Zahlklassen $\mathfrak{Z}(\Omega_n)$. Durch 2α) kommt man jetzt zu $\Omega_{\Omega_{\Omega_1}}$ und zu der Zahlklasse $\mathfrak{Z}(\Omega_{\Omega_1})$. In dieser Weise kann man fortfahren. Die

alleinige Verwendung des unter $2\,\alpha$) beschriebenen Prinzips führt zu einem Bereich von Ordnungszahlen, aus dem man dann durch $2\,\beta$) zu der ersten Anfangszahl Ω_γ mit $\gamma = \Omega_\gamma$ gelangt[31]). Da man zugleich die Zahlklasse $3\,(\gamma)$ erhält, gelangt man nun aber auch noch wieder weiter.

Es sei nun $\mathfrak{B}_0$ die Gesamtheit der Ordnungszahlen, die durch dieses Verfahren konstruiert werden können. Diese Menge $\mathfrak{B}_0$ ist wieder eine Menge mit den Eigenschaften A und B nebst I bis III. Da sie nach ihrer Definition durch unser Konstruktionsverfahren nicht erweitert werden kann, liegt bei ihr für jede Anfangszahl Ω und jede aufsteigende Ω-Folge von Anfangszahlen der Fall 1 vor, d. h. zu jeder solchen Folge gibt es eine Anfangszahl, die größer als jede Zahl dieser Folge ist.

Über unsern Bereich $\mathfrak{B}_0$ läßt sich weiter zeigen, daß er keine größte Anfangszahl enthält und daß es zu jeder α-Folge von Ordnungszahlen aus $\mathfrak{B}_0$ eine Ordnungszahl gibt, die größer als jede Zahl der Folge ist. Daraus folgt, daß $\mathfrak{B}_0$ mit keinem Abschnitt konfinal ist. $\mathfrak{B}_0$ ist aber auch der kleinste bei unserm Konstruktionsverfahren sich ergebende Bereich, in dem es keine größte Anfangszahl gibt und der mit keinem Abschnitt konfinal ist. Das ist von Wichtigkeit für eine Axiomatisierung unseres Konstruktionsverfahrens.

Zugleich ergibt sich daraus die Antwort auf die von F. Hausdorff[32]) aufgeworfene Frage, ob es Ordnungszahlen von exorbitanter Größe gibt, d. h. Ordnungszahlen, die eine Limeszahl als Index haben und mit keiner kleineren konfinal sind. In unserm Bereich $\mathfrak{B}_0$ gibt es solche Zahlen nach dem vorangehenden nicht. Aber man kann, wenn man will, über unsere bisherigen Konstruktionsprinzipien noch hinausgehen, indem man die Menge aller bisher definierten Ordnungszahlen als eine neue Ordnungszahl einführt und nun wiederum unsere bisherigen Konstruktionsprinzipien oder noch weitergehende anwendet. In dem so entstehenden Bereich von Ordnungszahlen ist die erste der neu definierten Zahlen eine Ordnungszahl von exorbitanter Größe.

Die Burali-Fortische und verwandte Paradoxien können in unserem Bereich $\mathfrak{B}_0$ nicht auftreten, da keineswegs jede Menge von Ordnungszahlen wieder eine Ordnungszahl definiert.

Auf den Aufbau der Arithmetik innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}_0$ gehe ich wieder nicht ein. Prinzipielle Schwierigkeiten treten dabei nicht auf.

Dagegen liegen zurzeit unüberwindliche Schwierigkeiten vor, wenn man die Theorie der Kardinalzahlen einschließlich ihrer Potenzrechnung in die hier beschriebene Theorie der Ordnungszahlen einbeziehen will.

---

[31]) $\Omega_\gamma = [\Omega_1, \Omega_{\Omega_1}, \Omega_{\Omega_{\Omega_1}}, \ldots]$.

[32]) A. a. O., S. 131.

Man kommt zwar zu einem Bereich $\mathfrak{A}_0$ von Kardinalzahlen, indem man die Anfangszahlen unseres Bereiches $\mathfrak{B}_0$ als Kardinalzahlen einführt. Die Kardinalzahlen charakterisieren dann in der Menge der ihnen vorangehenden Ordnungszahlen Mengen verschiedener Mächtigkeiten. Weiter liefert die Arithmetik der Ordnungszahlen auch unmittelbar eine Arithmetik der Kardinalzahlen, die bei beliebigen Summen und bei Produkten von endlich vielen Faktoren genau mit der bekannten Arithmetik der Kardinalzahlen übereinstimmt. Aber das hört auf bei den Potenzen. Behalten wir die Definition der Potenz von Kardinalzahlen mit Hilfe der Potenzmenge aus der Cantorschen Mengenlehre bei, so wissen wir nicht, ob z. B. $\aleph_0^{\aleph_0}$ eine Kardinalzahl unseres Bereiches $\mathfrak{A}_0$ ist, d. h. ob die Menge aller Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen einem Abschnitt unseres Bereiches $\mathfrak{B}_0$ äquivalent ist. Dadurch fehlt es der Theorie der Kardinalzahlen in diesem Rahmen an der erforderlichen Abrundung[33]). Aber es ist gar nicht ausgeschlossen, daß sich gerade von diesem konstruktiven Aufbau der Ordnungszahlen her neue Einsichten ergeben, aus denen heraus sich sogar vielleicht eine Lösung des Kontinuumproblems anbahnen läßt.

Tübingen, 27. November 1933.

---

[33]) Das werden wir bei unserer bisherigen Einstellung zu diesen Dingen als einen Mangel empfinden.

(Eingegangen am 28. November 1933.)

Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

Vorbemerkung.

Anläßlich verschiedener Untersuchungen[1]) ist die Frage aufgetaucht, ob ein vorgelegter Bogen „*ordnungsfest*" erweitert werden könne, d. h. ob zu einem vorgelegten *Bogen*[2]) $\mathfrak{B}$ von gegebener (Realitäts-)Ordnung[3]) r ein umfassenderer Bogen $\mathfrak{B}^*$ der gleichen Ordnung r oder auch eine geschlossene Kurve[2]) $\mathfrak{K}$ der Ordnung r konstruiert werden könne, so daß $\mathfrak{B}$ *echter* Teilbogen von $\mathfrak{B}^*$ oder von $\mathfrak{K}$ sei.

In den folgenden Zeilen soll diese Frage vollständig beantwortet werden. Wir geben nämlich (Nr. 2) notwendige und hinreichende Bedingungen an dafür, daß ein vorgelegter *Bogen* ordnungsfest erweitert werden kann. Dabei handelt es sich um „*nicht*-triviale" Erweiterungen, nämlich um solche, bei welchen die Hinzufügung von Strecken verboten

[1]) Juel, C., Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen, Atti del Congr. Intern. d. matematici, Bologna 1928, T. IV, Communicacioni Sez. II, S. 198; Marchaud, A., Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930), S. 88–89.

[2]) Operationsgebiet ist die projektive Ebene. Unter *Bogen* bzw. *Kurven* sind eindeutige, stetige Strecken- bzw. Kreisbilder zu verstehen. Ein Bogen oder eine Kurve kann also — wenigstens zunächst, vgl. aber das Verbot in Nr. 2 des Textes — auch Strecken als Teilbogen enthalten. Die Punkte, in welche die Endstellen eines Bogens fallen, heißen „*Endpunkte*" und sollen, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, immer beide als *eigentliche* Punkte angenommen werden. Der Bogen selbst ist natürlich im allgemeinen keinem beschränkten Bogen projektiv äquivalent.

[3]) Unter der „Ordnung" eines Bogens oder einer Kurve ist die größte Anzahl von *Schnitt*stellen mit einer Geraden zu verstehen [bezüglich der Definition der Schnittstelle u. a. vgl. z. B. Haupt, Zur Theorie der Ordnungen usw., Monatsh. f. Math. u. Phys. 40 (1933), Nr. 1, 3]. Enthält der Bogen oder die Kurve Strecken als Teilbogen, so zählt man eine solche Strecke — sofern nicht alle ihre Punkte mehrfach sind — bei der Bestimmung der Ordnung als *eine* „verlängerte" Stelle. Besitzt die Anzahl der Stellen, welche ein Bogen oder eine Kurve mit jeder beliebigen Geraden gemeinsam hat, ein Maximum r, so gibt es Gerade, welche genau r *Schnitt*stellen tragen (vgl. a. a. O. Nr. 1, 8, S. 16). Unter einer „*Sekante*" des Bogens usw. verstehen wir eine jede Gerade, welche mit dem Bogen usw. *nur Schnitt*stellen gemeinsam hat, welche also insbesondere keine Endpunkte des Bogens enthält. Wir nehmen im folgenden stets an, daß *die uneigentliche Gerade eine Sekante* des Bogens oder der Kurve sei; das bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Sekanten des Bogens, welche die größtmögliche Anzahl von Schnittstellen tragen, heißen „*Maximalsekanten*" des Bogens.

ist; denn andernfalls wird — wie man sogleich bemerkt (Nr. 1) — die Aufgabe der ordnungsfesten Erweiterung immer lösbar.

Mit Hilfe unserer Überlegungen läßt sich sogleich auch die Frage nach der ordnungsfesten Erweiterung einer vorgelegten *Kurve* $\mathfrak{K}$ gegebener Ordnung r beantworten, nämlich die Frage, ob man zu $\mathfrak{K}$ ohne Erhöhung der Ordnung r noch weitere Kurven hinzufügen kann oder nicht (Nr. 3) — sogenannte „*Vervollständigung von Kurven*“ [4]).

Für Bogen, welche als Summen von endlich vielen Konvexbogen darstellbar sind, läßt sich ein Teil der gewonnenen Aussagen noch verschärfen (Nr. 4). Schließlich wird durch Konstruktion von Beispielen die Existenz nicht erweiterbarer Bogen und vollständiger Kurven beliebig vorgegebener Ordnung dargetan (Nr. 5).

Die ganzen Betrachtungen werden im folgenden nur für den Fall *ebener* Bogen und Kurven durchgeführt. Sie übertragen sich zum Teil ohne weiteres auf den Fall der Bogen und Kurven *im projektiven* R_n $(3 \leqq n)$; darauf ist an anderer Stelle einzugehen. Im Zusammenhange damit ist schließlich noch zu erwähnen, daß für den *Sonderfall der Bogen n-ter*, also *niedrigster Ordnung im* R_n notwendige und hinreichende Bedingungen für (nichttriviale) Erweiterbarkeit bereits bekannt sind [5]); diese Bedingungen sind einfacher, allerdings auch nur für den in Rede stehenden Sonderfall gültig.

Nach Erledigung des Falles der Bogen und Kurven liegt die Frage nahe, wie sich die Lösung der Erweiterungsaufgabe für Flächenstücke (zunächst im R_3) gestaltet. Diese erfordert, wie es scheint, neue Überlegungen. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Erweiterungskriterium.

1. Zunächst einige Worte über den trivialen Teil unserer Erweiterungsaufgabe. Bei diesem werden *Strecken als Teilbogen in den betrachteten Bogen und Kurven zugelassen.* Wir behaupten: *Eine ordnungsfeste Erweiterung ist immer möglich, und zwar durch Hinzunahme einer (geeigneten) unter den Verbindungsstrecken der beiden Endpunkte von* $\mathfrak{B}$.

Sind nämlich A und B die Endpunkte von $\mathfrak{B}$, so wird nur *eine* der beiden Strecken [6]), durch welche A und B in der projektiven Ebene ver-

[4]) Vgl. Juel [7]), a. a. O. S. 138.

[5]) Haupt, Über die Erweiterung beliebiger Bogen dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung, Crelles Journal 170 (1934), S. 154 ff., sowie die dort angekündigte Arbeit von J. Sauter.

[6]) Als „*Strecke*“ wird jedes projektive Bild einer nur eigentliche Punkte enthaltenden Strecke, also einer Strecke im üblichen Sinne, bezeichnet. Soweit im folgenden von Schnittstellen der betrachteten Strecken mit Sekanten die Rede ist, handelt es sich immer um *innere* Punkte der betreffenden Strecke, also *nicht* um Begrenzungspunkte der Strecke.

bunden werden, von „Maximalsekanten“ [3]) des Bogens $\mathfrak{B}$, d. h. von solchen Geraden getroffen, welche mit $\mathfrak{B}$ lauter Schnittstellen, und zwar genau r gemeinsam haben. In der Tat besteht auch in der projektiven Ebene der bekannte Satz [7]): Ist $\mathfrak{C}$ eine geschlossene Kurve, d. h. eindeutiges, stetiges Kreisbild von der Ordnung k, so gilt für die Anzahl z der Schnittstellen *irgendeiner Sekante* [3]) von $\mathfrak{C}$ stets: $z \equiv k \pmod 2$. Betrachten wir nun die beiden Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, welche aus dem gegebenen Bogen $\mathfrak{B}$ durch Hinzufügen je einer der beiden Verbindungsstrecken von A und B entstehen, so differiert die Anzahl ihrer Schnittstellen mit der uneigentlichen Geraden um Eins. Daher ist die Ordnung der einen Kurve gerade, die der anderen ungerade; und deshalb tragen diejenigen Sekanten, von welchen die eine jener beiden Verbindungsstrecken getroffen wird, sämtlich eine gerade Anzahl Schnittstellen mit der zugehörigen Kurve $\mathfrak{C}_1$, während die Treffsekanten der anderen Verbindungsstrecke sämtlich eine ungerade Anzahl von Schnittstellen mit der zugehörigen $\mathfrak{C}_2$ tragen müssen. Je nachdem nun die Ordnung r des ursprünglich vorgelegten Bogens B gerade oder ungerade ist, tragen aber alle Maximalsekanten des Bogens $\mathfrak{B}$ eine gerade oder *alle* eine ungerade Anzahl von Schnittstellen mit $\mathfrak{B}$. Die Maximalsekanten von $\mathfrak{B}$ können daher nur *eine* von unseren beiden Verbindungsstrecken treffen (man bemerke dazu, daß keine der Maximalsekanten von $\mathfrak{B}$ die Endpunkte A oder B enthält). Fügt man also diejenige Verbindungsstrecke S von A und B zu $\mathfrak{B}$ hinzu, welche von Maximalsekanten des Bogens $\mathfrak{B}$ *nicht* getroffen wird, so entsteht eine *Kurve* $\mathfrak{K}$, und zwar ist $\mathfrak{K}$ von der Ordnung r, weil ja S von allen übrigen Sekanten des Bogens $\mathfrak{B}$ in höchstens einem Punkte getroffen wird und weil diese Sekanten außerdem nur noch höchstens $(r-1)$ Schnittstellen tragen. Die Gerade g, auf welcher S liegt und welche nicht zu den Sekanten des *Bogens* $\mathfrak{B}$ zählte, kann jetzt allerdings Sekante der *Kurve* $\mathfrak{K}$ sein, wobei dann S als *ein* (verlängerter) Punkt von $\mathfrak{K}$ auf g zählt; aber g trägt dann nicht mehr als r Stellen von $\mathfrak{K}$. Würde nämlich g etwa q Stellen mit der Kurve $\mathfrak{K}$ gemeinsam haben, wobei $q > r$, so hätte g mit dem Bogen $\mathfrak{B}$ ebenfalls sicher q Stellen gemeinsam, unter denen sich die beiden Endstellen von $\mathfrak{B}$ befänden. Dann gäbe es zu g beliebig benachbarte Geraden, welche mindestens q (innere) Schnittstellen mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam

---

[7]) Juel, C., Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og math. Afd., 7. R., XI. 2 (1914), S. 138. — Vgl. dazu auch E. Kivikoski = E. Stenfors, Der Jordansche Kurvensatz in der projektiven Ebene und die v. Staudtschen Schnittpunktsätze, Soc. Sci. Fennicae, Comment Phys.-Math. II 5, Helsingfors 1923. Betreffend Streckenzüge in der projektiven Ebene siehe Kivikoski, Ann. Acc. Sci. Fennicae Serie A, 28 (1928), Nr. 14 und 32 (1929), Nr. 3.

hätten[8]). Wegen $q > r$ widerspricht dies aber der Annahme, daß $\mathfrak{B}$ die Ordnung r besitzt.

Die fragliche Verbindungsstrecke, deren Hinzufügung zu $\mathfrak{B}$ eine ordnungsfeste Erweiterung bewirkt, wollen wir kurz „*die zum Bogen $\mathfrak{B}$ gehörige Schlußstrecke*“ nennen. Die Schlußstrecke enthält den uneigentlichen Punkt der Verbindungsgeraden der Bogenendpunkte dann und nur dann, wenn *entweder* der Bogen $\mathfrak{B}$ von ungerader Ordnung ist und wenn zugleich die uneigentliche Gerade eine gerade Anzahl Schnittstellen mit dem Bogen trägt, *oder* wenn der Bogen $\mathfrak{B}$ von gerader Ordnung ist und wenn zugleich $\mathfrak{B}$ mit der uneigentlichen Geraden eine ungerade Anzahl von Schnittstellen gemeinsam hat. In der Tat: Soll die Erweiterungskurve z. B. von ungerader Ordnung sein, so muß sie — wie oben festgestellt — mit *jeder* Sekante, also auch mit der uneigentlichen, eine ungerade Anzahl Schnittstellen gemeinsam haben.

Allgemein wird daher bei ordnungsfester Erweiterung die Schlußstrecke von derjenigen Verbindungsstrecke der beiden Bogenendpunkte geliefert, bei deren Hinzufügung die Anzahl der Schnittstellen mit der uneigentlichen Geraden kongruent zu r nach dem Modul 2 wird.

2. Eine etwas andere nicht-triviale Erweiterungsaufgabe erhalten wir durch das *Verbot des Auftretens von Strecken als Teilbogen der betrachteten Bogen und Kurven.* Wir verlangen demgemäß von jetzt ab insbesondere von einer Erweiterung des Bogens, daß sie nicht durch Hinzufügung von Strecken erfolge; und wir sprechen dann von *nicht-trivialer, ordnungsfester Erweiterung* im Gegensatz zu der in Nr. 1 besprochenen *trivialen* Erweiterung. Wie Beispiele zeigen (vgl. Nr. 5), gibt es Bogen jeder (beschränkten) Ordnung, welche nur in trivialer Weise ordnungsfest erweitert werden können. Es hat demnach einen Sinn, notwendige und hinreichende Bedingungen zu suchen dafür, daß ein vorgelegter Bogen nicht-trivial und ordnungsfest erweiterungsfähig ist, insbesondere erweiterungsfähig zu einer geschlossenen Kurve. Zu dem Zwecke bezeichnen wir eine Gerade als „*Sekante S_t der Ordnung t von $\mathfrak{B}$*“ $(0 < t)$, wenn S_t mit $\mathfrak{B}$ genau t Stellen gemeinsam hat und wenn diese Stellen überdies *sämtlich Schnitt*stellen sind; man beachte wieder, daß zufolge eben dieser Definition die Verbindungsgerade der beiden Endpunkte A und B des Bogens $\mathfrak{B}$ *nicht* zu den Sekanten irgendeiner bestimmten Ordnung zählt. Ist nun P ein beliebiger Punkt einer S_t, so gehen durch jeden Punkt einer geeignet gewählten Umgebung von P Sekanten von mindestens der Ordnung t. In der Tat: Ist Q ein von P verschiedener, nicht auf $\mathfrak{B}$ gelegener, im übrigen beliebig gewählter Punkt

[8]) Vgl. [3]), a. a. O. Nr. 2, 4; bezüglich des Begriffes der „Nachbarschaft“ einer Kurve vgl. a. a. O. Nr. 1, 1; D.

von S_t, so liegen auf jeder durch Q gehenden und zu S_t hinreichend benachbarten Geraden mindestens t Schnittstellen[9]), so daß durch *jeden* Punkt P' einer Umgebung von P Gerade g' gehen, auf welchen mindestens t Schnittstellen liegen. Durch geeignete, beliebig kleine Drehung von g' um P' erhält man nun aus g' schließlich Gerade g'', welche durch P' gehen und mit $\mathfrak{B}$ nur *Schnitt*stellen gemeinsam haben, und zwar[10]) mindestens t; dabei ist, wie immer im folgenden, angenommen, daß $\mathfrak{B}$ eine beschränkte Ordnung r besitzt.

Der letzte Schluß — betreffend die Existenz von g'' — ist indes nur dann zulässig, wenn P' nicht Stützstelle von $\mathfrak{B}$ auf g' ist, und unsere Behauptung, daß durch jeden Punkt der Umgebung von P eine Sekante von mindestens t-ter Ordnung geht, ist also dann nicht bewiesen, wenn durch beliebig nahe an P gelegene Punkte P' Stützstellen auf den betreffenden Geraden g' geliefert werden, was übrigens höchstens dann eintreten kann, wenn P auf $\mathfrak{B}$ liegt und wenn überdies die Umgebung einer zu P gehörigen Stelle auf $\mathfrak{B}$ nicht als Summe von endlich vielen Konvexbogen darstellbar ist. Die hiermit bezeichneten Ausnahmefälle bereiten für unsere spätere Untersuchung gewisse Schwierigkeiten, die man folgendermaßen umgehen kann. Zur Abkürzung bezeichnen wir als „(gewöhnlichen) *t-Punkt*" *bezüglich des Bogens* $\mathfrak{B}$ jeden Punkt der Ebene, welcher auf einer S_t liegt und dessen Umgebung aus lauter Punkten besteht, deren jeder seinerseits auf einer S_τ mit $\tau \geqq t$ liegt. Alle anderen, auf einer S_t gelegenen Punkte sollen „*kritische t-Punkte*" *bezüglich* $\mathfrak{B}$ heißen; jeder solche kritische t-Punkt muß Punkt von $\mathfrak{B}$ sein. Dann ergeben sich folgende, für den Beweis des nachstehenden 1. Satzes nützliche Tatsachen:

a) Ist S_k irgendeine Sekante k-ter Ordnung von $\mathfrak{B}$, so gibt es zu S_k beliebig benachbarte Sekanten $\overline{S}_m$ von mindestens k-ter Ordnung ($k \leqq m$), welche nur *gewöhnliche* m-Punkte enthalten. In der Tat: Es sei Q ein nicht auf $\mathfrak{B}$ gelegener Punkt von S_k. Da $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung ist, so liegen auf $\mathfrak{B}$ die hinsichtlich des Geradenbüschels mit dem Zentrum Q relativ einfachen Teilbogen überall dicht[11]). Durch beliebig kleine Drehung von S_k um Q kann man daher aus S_k eine neue Sekante $\overline{S}_m$ von $\mathfrak{B}$ von mindestens k-ter Ordnung erhalten, deren Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ sämtlich im Innern von (bezüglich Q) relativ einfachen Teilbogen von $\mathfrak{B}$ liegen. Dann aber sind sämtliche Punkte von $\overline{S}_m$ gewöhnliche m-Punkte.

---

[9]) Satz von der Erhaltung der Schnittstellen bei stetiger Änderung der Sekante (vgl. [3]), a. a. O. Nr. 1, 4 und 1, 6).

[10]) Vgl. [3]), a. a. O. Nr. 1, 6; a.

[11]) Siehe z. B. Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Crelles Journal 167 (1931), S. 23 ff., § 1.

b) Ist T ein (kritischer) t-Punkt und ist R irgendein von T verschiedener Punkt der Ebene, so gibt es zwei verschiedene, weder T noch R enthaltende Sekanten S'_λ und S''_σ von mindestens der Ordnung t, d. h. mit $\lambda \geqq t$, $\sigma \geqq t$, und von folgender Eigenschaft: Sämtliche Punkte von S'_λ und S''_σ sind gewöhnliche λ-Punkte bzw. σ-Punkte; ferner enthält jedes der beiden von S'_λ und S''_σ gebildeten Zweiecke in seinem Innern genau einen der beiden Punkte T und R. In der Tat: Wir nehmen, was ja keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, T und R als eigentliche Punkte an. Liegt nun T auf S_t, so führe man S_t durch zwei passende, hinreichend kleine Drehungen in zwei Sekanten S'_λ und S''_σ von mindestens der Ordnung t über, so daß T und R im Innern verschiedener, von S'_λ und S''_σ gebildeter Zweiecke liegen. Im Rahmen dieser Bedingung können zufolge a) die beiden Sekanten noch so gewählt werden, daß S'_λ und S''_σ nur gewöhnliche λ-Punkte bzw. nur gewöhnliche σ-Punkte enthalten.

Nunmehr *bezeichnen wir mit* $\mathfrak{S}_t$ *die Vereinigungsmenge aller gewöhnlichen* ϱ*-Punkte, für welche* $\varrho \geqq t$; dem oben Erklärten zufolge ist $\mathfrak{S}_t$ offen[12]). Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_2$ die volle projektive Ebene. Alsdann können wir folgenden Satz aussprechen:

1. Satz: *Die Menge* $\mathfrak{C}_t = \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{S}_t$ *aller Punkte der Ebene, welche bezüglich des Bogens* B *keine gewöhnlichen* ϱ*-Punkte mit* $\varrho \geqq t$ *sind, ist abgeschlossen* $(0 \leqq t \leqq r)$. *Die Komponenten von* $\mathfrak{C}_t$ *sind „projektiv-konvexe" Bereiche. Die kritischen* ϱ*-Punkte mit* $\varrho \geqq t$ *sind einpunktige Komponenten von* $\mathfrak{C}_t$. *Eine der Strecken, durch welche die Endpunkte des Bogens* $\mathfrak{B}$ *miteinander verbunden werden, nämlich die Schlußstrecke von* $\mathfrak{B}$, *ist in einer Komponente von* $\mathfrak{C}_r$ *enthalten, wobei* r *die Ordnung von* $\mathfrak{B}$ *ist.*

Als „*projektiv-konvex*" wird dabei ein Bereich, d. h. eine abgeschlossene, zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{M}$ bezeichnet, wenn irgend zwei Punkte von M durch (mindestens) eine, ganz zu $\mathfrak{M}$ gehörige Strecke verbunden werden können; der Fall, daß $\mathfrak{M}$ nicht mehr als einen Punkt enthält, sei einbegriffen.

Beweis: $\mathfrak{C}_t$ ist abgeschlossen, weil dem oben Bemerkten zufolge $\mathfrak{S}_t$ offen ist. Daß die — sämtlich in $\mathfrak{C}_t$ enthaltenen — kritischen ϱ-Punkte (mit $\varrho \geqq t$) einpunktige Komponenten von $\mathfrak{C}_t$ sind, sieht man so ein: Ist T kritischer ϱ-Punkt und R irgendein anderer Punkt von $\mathfrak{C}_t$, so liegen, wie oben [vgl. b)] gezeigt, T und R im Innern verschiedener, durch zwei Sekanten mindestens der Ordnung t von $\mathfrak{B}$ gebildeter Zweiecke, wobei sämtliche Punkte besagter Sekanten, also sämtliche Randpunkte dieser Zweiecke, zu $\mathfrak{S}_t$ und damit nicht zu $\mathfrak{C}_t$ gehören. Daher

[12]) Die Begriffe offen und abgeschlossen sind zu verstehen bezüglich der (kompakten) projektiven Ebene.

können T und R nicht in der gleichen Komponente von $\mathfrak{C}_t$ liegen. — Es sei jetzt $\mathfrak{K}$ irgendeine nicht-leere und nicht-einpunktige Komponente von $\mathfrak{C}_t$; kein Punkt von $\mathfrak{K}$ ist dann (gewöhnlicher oder) kritischer ϱ-Punkt mit $\varrho \geqq t$. Um $\mathfrak{K}$ als projektiv-konvex nachzuweisen, zeigen wir, daß irgend zwei verschiedene Punkte F und G von $\mathfrak{K}$ weder durch gewöhnliche noch durch kritische ϱ-Punkte mit $\varrho \geqq t$ auf der Verbindungsgeraden v von F und G voneinander getrennt werden können. Andernfalls seien C und D zwei derartige Punkte auf v; dann geht durch C eine S_μ und durch D eine S_ν mit $\mu \geqq t$, $\nu \geqq t$. Weder F noch G liegt auf der S_μ oder auf der S_ν; diese beiden letzteren Sekanten sind also insbesondere voneinander verschieden. Ferner gibt es [wegen a)] zu S_μ und S_ν beliebig benachbarte Sekanten $\overline{S}_{\bar{\mu}}$ bzw. $\overline{S}_{\bar{\nu}}$, für welche $\bar{\mu} \geqq t$, $\bar{\nu} \geqq t$ ist und welche nur gewöhnliche $\bar{\mu}$-Punkte bzw. $\bar{\nu}$-Punkte enthalten. Nun liegen aber F und G in verschiedenen Zweiecken, welche von $\overline{S}_{\bar{\mu}}$ und $\overline{S}_{\bar{\nu}}$ gebildet werden und deren Begrenzung mithin ganz zu $\mathfrak{S}_t$ gehört. Daher können F und G nicht der gleichen Komponente $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{C}_t$ angehören im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Irgend zwei verschiedene Punkte einer nicht-einpunktigen Komponente von $\mathfrak{C}_t$ können also durch eine ganz zu $\mathfrak{C}_t$ gehörige Strecke verbunden werden w. z. z. w. — Die letzte, auf die Schlußstrecke von $\mathfrak{B}$ bezügliche Behauptung unseres Satzes ergibt sich aus Nr. 1.

Die von uns *als „projektiv-konvex" bezeichneten Bereiche sind projektiv äquivalent mit dem Innern oder mit dem Äußern von* (beschränkten) *Ovalen*, wobei für das Oval auch die Ausartungen in ein geradlinig begrenztes Zweieck, oder in eine Gerade, oder in eine Strecke, oder in einen Punkt, oder in die Nullmenge zugelassen werden. In der Tat: Ist der betrachtete konvexe Bereich $\mathfrak{K}$ keinem beschränkten Oval äquivalent, so hat er mit jeder Geraden Punkte gemeinsam. Ist Q ein nicht zu $\mathfrak{K}$ gehöriger Punkt — wir sehen damit vom Fall der Vollebene ab —, und nehmen wir ihn als uneigentlich an, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist, so liegt $\mathfrak{K}$ ganz außerhalb einer Umgebung von Q, das heißt z. B. ganz in dem von einer geeignet gewählten Hyperbel begrenzten, die Asymptoten enthaltenden Gebiet. Man stellt jetzt fest, daß der Rand von $\mathfrak{K}$ mit jeder Geraden des dem Punkte Q entsprechenden Parallelenbüschels höchstens zwei Punkte gemeinsam hat, daß also die eigentlichen Punkte des Randes von $\mathfrak{K}$ sich auf höchstens zwei einfache Bogen verteilen, von denen wiederum leicht einzusehen ist, daß sie von höchstens zweiter Ordnung sind. Daraus folgt die Behauptung.

Aus dem ersten Satze ergibt sich als eine notwendige Bedingung für nicht-triviale, ordnungsfeste Erweiterung eines Bogens zu einer Kurve folgendes: Diejenige Komponente $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{C}_r$, in welcher die beiden Bogenendpunkte A und B und folglich die zu $\mathfrak{B}$ gehörige Schlußstrecke

enthalten sind, muß zweidimensional sein. Diese Bedingung erscheint aber auf den ersten Blick noch nicht als hinreichend; denn es kommt ersichtlich auch auf das Verhalten der Sekanten S_{r-1} der Ordnung $(r-1)$ an. Gäbe es nämlich solche S_{r-1}, von welchen *jeder* keine Teilstrecken enthaltende Verbindungsbogen von A und B, also z. B. schon jeder Konvexbogen in mindestens zwei Punkten getroffen wird, so würde jede nicht-triviale Erweiterung des Bogens eine Erhöhung der Ordnung um mindestens Eins bewirken. Dies würde aber dann und nur dann möglich sein, wenn es solche S_{r-1} gäbe, welche zu der in $\mathfrak{R}^*$ gelegenen Verbindungsstrecke w von A und B, also zu der Schlußstrecke von $\mathfrak{B}$, „in $\mathfrak{R}^*$ beliebig benachbart" wären und von denen keine mit w Punkte gemeinsam hätte; „zu w in $\mathfrak{R}^*$ beliebig benachbart" soll heißen: Es gibt zu jedem nicht auf w gelegenen, aber zu w hinreichend benachbarten [13]) Punkte R aus $\mathfrak{R}^*$ eine S_{r-1}, welche die in $\mathfrak{R}^*$ gelegene Verbindungsstrecke von R und A trifft. Nun wird aber w, als Schlußstrecke von $\mathfrak{B}$, von keiner S_r getroffen. Nach der bereits in Nr. 1 angestellten Überlegung muß daher jede S_{r-1} mit der Strecke w Punkte gemeinsam haben, so daß der fragliche Fall nicht eintreten kann. Wir haben daher den

2. Satz: *Damit der Bogen $\mathfrak{B}$ von der Ordnung r sich nicht-trivial und ordnungsfest zu einer geschlossenen Kurve erweitern lasse, ist notwendig und hinreichend, daß diejenige Komponente $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{C}_r$ zweidimensional sei, in welcher jeder der beiden Endpunkte des Bogens $\mathfrak{B}$ und folglich auch die zu $\mathfrak{B}$ gehörige Schlußstrecke enthalten ist. Die Erweiterung ist dann auf unendlich viele verschiedene Weisen möglich, nämlich durch Hinzufügen eines jeden Konvexbogens, welcher ganz in $\mathfrak{R}^*$ verläuft und die beiden Bogenendpunkte miteinander verbindet.*

Es sei besonders hervorgehoben:

3. Satz: *Jeder Bogen ist nicht-trivial und ordnungsfest entweder überhaupt nicht oder sogleich zu einer geschlossenen Kurve erweiterbar.*

Ausführlicher: Ist der Bogen $\mathfrak{B}$ überhaupt ordnungsfest in nicht-trivialer Weise erweiterbar, gibt es also einen *Bogen* gleicher Ordnung (ohne Teilstrecken), in welchem $\mathfrak{B}$ als echter Teilbogen enthalten ist, so gibt es immer auch eine *Kurve* gleicher Ordnung (ohne Teilstrecken), in welcher $\mathfrak{B}$ enthalten ist.

Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus der Tatsache, daß die Komponente $\mathfrak{R}^*$ konvex ist, daß also A und B durch einen ganz in $\mathfrak{R}^*$ verlaufenden Konvexbogen verbunden werden können, sobald nur $\mathfrak{R}^*$ zweidimensional ist.

---

[13]) Ist $\overline{w}$ ein beschränktes, projektives Bild des Urbildes w, so konstruiere man die η-Hülle von $\overline{w}$ [vgl. [3]), a. a. O. Nr. 1, 1; D]. Das Urbild dieser η-Hülle liefert eine Nachbarschaft von w.

Ferner folgt noch:

4. Satz: *Jeder Bogen der Ordnung r ist, in nicht-trivialer Weise, zu einer Kurve der Ordnung $(r+1)$ erweiterbar, und zwar auf unendlich viele Weisen, nämlich jedenfalls durch Hinzufügen geeigneter Konvexbogen.*

Zum Beweise muß man mit derjenigen Verbindungsstrecke p der Bogenendpunkte A und B arbeiten, welche von allen S_r getroffen wird, also mit dem Komplement der Schlußstrecke des Bogens $\mathfrak{B}$. Errichtet man über p einen Konvexbogen $\mathfrak{B}$, so wird $\mathfrak{B}$ von jeder S_r in nur einem, von jeder S_λ, $\lambda = r-1, r-2, \ldots$ in höchstens zwei Punkten getroffen, woraus die Behauptung folgt.

3. Die vorstehenden Betrachtungen liefern übrigens auch eine Kennzeichnung der „vollständigen" geschlossenen Kurven[14]). Man nennt mit Herrn Juel[4]) eine Kurve $\mathfrak{K}$ von der Ordnung r *„unvollständig"* oder *„vollständig"*, je nachdem $\mathfrak{K}$ als ein echter Teil eines (mindestens zweiteiligen) Kurvenaggregates der gleichen Ordnung r aufgefaßt werden kann oder nicht (k-teiliges Kurvenaggregat = Summe aus k Kurven); eine unvollständige Kurve ist also sozusagen ordnungsfest erweiterbar.

Auf Grund des 1. Satzes, welcher mutatis mutandis auch für Kurven gilt, erkennt man:

Eine Kurve $\mathfrak{K}$ der Ordnung r ist dann und nur dann vollständig, wenn $\mathfrak{C}_r$ keine zweidimensionale Komponente enthält ($\mathfrak{C}_{r-1} = \mathfrak{C}_r$ *für Kurven*).

Zu einer unvollständigen Kurve kann man ohne Erhöhung der Ordnung mindestens so viele Kurven zweiter Ordnung hinzufügen, als die Anzahl der zweidimensionalen Komponenten von $\mathfrak{C}_{r-1}$ beträgt.

4. Die Fassung des 1. Satzes in Nr. 2 gestattet eine gewisse Verschärfung, sobald wir als Bogen und als Kurven beispielsweise nur Summen von endlich vielen Konvexbogen zulassen. In diesem Falle gibt es nämlich nicht nur keine kritischen t-Punkte, sondern es geht sogar durch jeden Punkt einer passend gewählten Umgebung des beliebigen Punktes P von S_t wieder eine S_t (nicht nur eine S_τ mit $t \leqq \tau$). Daher ist bereits die Menge $\widetilde{\mathfrak{S}}_t$ aller Punkte, durch welche eine S_t geht, eine offene Menge; folglich ist $\widetilde{\mathfrak{C}}_t = \mathfrak{R}_2 - \widetilde{\mathfrak{S}}_t$, also *die Menge aller Punkte, durch welche keine S_t geht*, abgeschlossen. Für Bogen, welche Summen von endlich vielen Konvexbogen sind, kann man alsdann mit Hilfe des so verschärften 1. Satzes ein Kriterium erhalten für nicht-triviale, indexfeste Erweiterungsfähigkeit eines Bogens, sowie für zugleich ordnungs- *und* indexfeste Erweiterung; im letzten Falle muß jedenfalls $r \equiv j \pmod 2$ sein, wo r die Ordnung und j den Index des Bogens bedeutet.

---

[14]) Auch hier sollen die Kurven keine Strecken als Teilbogen enthalten (vgl. Nr. 2 des Textes).

Beispiele.

5. Zum Schluß geben wir noch Beispiele für erweiterbare und nicht-erweiterbare Bogen. Beispiele für *Bogen von beliebig vorgegebener Ordnung r und von beliebigem Index j ($j \leqq r-2$), welche ordnungsfest und in nicht-trivialer Weise erweitert werden können*, werden geliefert durch hinreichend große Teilbogen von Kurven eben dieser Ordnung r und eines passenden Index [15]).

Hingegen ist weniger naheliegend die Konstruktion von *Bogen vorgegebener Ordnung r ($r \geqq 2$), welche nur trivial, d. h. nur durch Hinzufügen der Schlußstrecke ordnungsfest erweitert werden können* [16]). Eine solche Konstruktion ist folgende: Man betrachte eine „Spirale" $\mathfrak{Q}$ der Ordnung r, also einen etwa zweimal stetig differenzierbaren beschränkten Bogen ohne Doppel- und ohne Wendepunkte. Der Anfangspunkt A von $\mathfrak{Q}$ sei der „innerste" Punkt von $\mathfrak{Q}$, der Endpunkt sei B, und es sei h_a die im Sinne der Fortschreitungsrichtung von A nach B orientierte Halbtangente [17]) in A an $\mathfrak{Q}$. Je nachdem $r \equiv 1 \pmod 2$ oder $r \equiv 0 \pmod 2$, soll dann B auf h_a liegen oder auf der zu h_a komplementären Halbgeraden h_a'. Nun geht aber durch jeden Punkt R der Ebene, welcher nicht auf der Trägergeraden h von h_a (und h_a') liegt, eine S_r an $\mathfrak{Q}$. In der Tat: Jede h_a nicht enthaltende Gerade durch A hat mit B die maximale Anzahl Punkte gemeinsam, darunter nur *einen* Endpunkt, nämlich A. Zieht man also durch den vorgegebenen Punkt R die Verbindungsgerade g nach A, so liefert eine hinreichend kleine, geeignet gewählte Drehung von g um R eine Maximalsekante S_r von $\mathfrak{Q}$. Daher ist $\mathfrak{C}_r$ identisch mit der Schlußstrecke von $\mathfrak{Q}$, und $\mathfrak{Q}$ ist nur in trivialer Weise ordnungsfest erweiterbar. Man kann die eben dargelegte Konstruktion so abändern: Man lege an A eine zweite Spirale $\mathfrak{Q}^*$ von gleichem Windungssinne wie $\mathfrak{Q}$ so, daß die orientierte Halbtangente an $\mathfrak{Q}^*$ im Anfangspunkte A entgegengesetzt gerichtet ist zu h_a und daß $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^*$ in der Nähe von A auf entgegengesetzten Seiten von h verlaufen. Die Endpunkte B und B^* von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^*$ liefern uns dann die Endpunkte des Bogens $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^*$. Liegt B^* auf der Trägergeraden h von h_a, so ist $\mathfrak{B}^*$ nur trivial erweiterbar, weil jede von h verschiedene Gerade durch A Maximalsekante ist.

---

15) Vgl. eine an anderer Stelle erscheinende Arbeit „Über Kurven vom Maximalindex".

16) Vgl. Marchaud [1]) a. a. O.

17) Zwecks Definition des Begriffs der Halbtangente wird etwa eine bestimmte Gerade der projektiven Ebene als uneigentlich ausgezeichnet, oder man beschränkt die Betrachtung auf eine genügend kleine Umgebung des in Rede stehenden Bogenpunktes.

Die eben betrachteten Spiralen $\mathfrak{Q}$ waren sämtlich beschränkt, also vom Index Null. Man kann aber auch *Bogen von beliebig vorgegebener Ordnung r und von beliebig vorgegebenem Index j konstruieren, welche nur trivial erweiterbar sind.* ($j \leqq r-2$). Zu dem Ende nehme man eine Spirale $\mathfrak{Q}$ der oben zuerst betrachteten Art und von der Ordnung $(r-j)$, sodann verlängere man $\mathfrak{Q}$ durch geeignetes Ansetzen von j durchs Uneigentliche ziehenden, je einen Wendepunkt enthaltenden Bogen derart, daß der Endpunkt des verlängerten Bogens wieder auf h_a bzw. h'_a zu liegen kommt und daß jede Gerade durch A (abgesehen von der Geraden h) jeden der Verlängerungsbogen in genau einem Punkte schneidet. Ganz entsprechend überzeugt man sich von der *Existenz vollständiger Kurven beliebiger Ordnung r.* Für $r \equiv 0 \pmod 2$ erhält man Kurven der gewünschten Beschaffenheit, indem man z. B. — anschaulich gesprochen — $r' = r/2$ konzentrische Kreise mit dem Zentrum M schlägt und aus ihnen durch Zusammenbiegen und kreuzweises Verbinden des ν-ten und $(\nu+1)$-ten Kreises ($\nu = 1, \ldots, r'-1$) eine geschlossene Kurve der Ordnung r herstellt; im Verlaufe der Verbiegungen soll M fremd bleiben zu allen Kreisen. Dann ist jede Gerade durch M eine Maximalsekante, woraus die Vollständigkeit unserer Kurve bereits folgt. Durch Einhängen von geeigneten, durchs Uneigentliche ziehenden Zügen erhält man weiter *vollständige Kurven von beliebiger Ordnung r und von beliebig vorgeschriebenem Index j* ($j \equiv r-2$).

(Eingegangen am 24. Dezember 1933.)

Über die Irrfahrt in einem Straßennetz.

Von

O. Bottema in Groningen.

Ein Spaziergänger befindet sich am Knotenpunkt einiger Straßen in einer beliebigen Stadt. Er wählt aufs Geratewohl eine dieser Straßen in dem Sinne, daß jede Straße die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, gewählt zu werden. Ist er an einem neuen Knotenpunkt angelangt, so überläßt er es wiederum dem Zufall, zu entscheiden, welche Straße er einschlagen soll. Auch bei dieser neuen Wahl kommt jeder der in Betracht kommenden Straßen, auch der soeben zurückgelegten, die gleiche Wahrscheinlichkeit zu. An jedem Knotenpunkt, den der Spaziergänger erreicht, wird nach demselben Grundsatz die folgende Straße gewählt. Unsere Frage ist nun: Welche ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Spaziergänger an einem bestimmten Knotenpunkt befindet, nachdem er n Straßen zurückgelegt hat. Namentlich interessiert uns der Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$. Wir setzen voraus, daß dem Spaziergänger eine endliche Anzahl von Straßen zur Verfügung steht.

Wir können der Frage eine etwas andere Fassung geben. An einem Knotenpunkt befindet sich eine große Menschenmenge. Diese wird über die dort zusammenkommenden Straßen so zerstreut, daß sich in jeder ein gleicher Teil der Menge befindet. Eine Gruppe, welche an einem neuen Knotenpunkt ankommt, wird von neuem gleichmäßig verteilt. Nach demselben Grundsatz wird das Verfahren fortgesetzt. Man wartet, bis sich wiederum jeder an einem Knotenpunkt befindet, und verteilt dann die dort sich befindende Menge gleichmäßig über die Straßen, die an jener Stelle zusammenkommen.

Wir fragen nach demjenigen Teil der Menge, der sich an einem bestimmten Knotenpunkt befindet, nachdem das Verteilungsverfahren n-mal angewandt worden ist, besonders für den Fall, daß n nach Unendlich geht.

Diese zweite Fassung veranlaßt eine etwas erweiterte Frage: Statt der Annahme, daß sich die ganze Menge anfänglich an einem einzigen Knotenpunkt befindet, kann man voraussetzen, daß schon im Anfangszustand die Menge in einer bestimmten, aber willkürlichen Weise über die Knotenpunkte verteilt war.

Dem Straßennetz wird nur folgende, übrigens einleuchtende Bedingung auferlegt: Es soll *zusammenhängend* sein, d. h. jeder Knotenpunkt ist von jedem andern Knotenpunkt aus erreichbar.

Aus unserer Fragestellung ist schon hervorgegangen, daß wir unter einer „Straße" nur einen Weg verstehen, an dessen Endpunkten sich Knoten befinden. Um uns etwas bequemer ausdrücken zu können, wollen wir *vorläufig* noch voraussetzen: 1. zwei Knotenpunkte sind nur durch *eine* Straße verbunden; 2. eine Straße verbindet zwei *verschiedene* Knotenpunkte.

Die N Knotenpunkte des Netzes nennen wir $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Wenn an dem Punkte A_i k_i Straßen zusammenkommen, so nennen wir A_i einen k_i-fachen Knotenpunkt und k_i die Ordnung des Punktes A_i.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Spaziergänger, nachdem er n Straßen zurückgelegt hat, in A_i befindet, bezeichnen wir mit $x_i(n)$. In der zweiten Fassung der Aufgabe gibt diese Zahl also den Teil der Menge an, welcher sich nach n Teilungsvorgängen in A_i befindet.

Ist der Punkt A_i durch Straßen verbunden mit den k_i-Punkten $A_p, A_q, \ldots$, so hat man augenscheinlich die Gleichung

$$x_i(n+1) = \frac{1}{k_p} x_p(n) + \frac{1}{k_q} x_q(n) + \ldots \tag{1}$$

oder wenn

$$x_r(m) = k_r y_r(m), \tag{2}$$

$$k_i y_i(n+1) = y_p(n) + y_q(n) + \ldots \tag{3}$$

Eine solche Gleichung haben wir für $i = 1, 2, \ldots, N$. Wir erhalten also ein System von N linearen homogenen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten, welches wir folgendermaßen schreiben können:

$$k_i y_i(n+1) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} y_j(n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{4}$$

Hierbei ist

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, \text{ wenn } i = j, \\ a_{ij} = 0, \text{ wenn } A_i \text{ und } A_j \textit{ nicht} \text{ durch eine Straße verbunden sind}, \\ a_{ij} = 1, \text{ wenn } A_i \text{ und } A_j \text{ durch eine Straße verbunden sind}. \end{cases} \tag{5}$$

Die Koeffizienten a_{ij} genügen offenbar folgenden Bedingungen:

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = k_i. \tag{7}$$

Um das System (4) zu lösen, setzen wir

$$y_i(n) = P_i \lambda^n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

wo P_i eine von n unabhängige Zahl und $\lambda \neq 0$ ist.

Wir bekommen dann

$$k_i \lambda P_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} P_j. \tag{9}$$

Die N linearen homogenen Gleichungen haben nur dann eine Lösung, welche von der Nullösung verschieden ist, wenn

$$D = 0, \tag{10}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} -k_1\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & -k_2\lambda & a_{23} & \dots & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & \dots & -k_N\lambda \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist bekanntlich nicht nur durch die Wurzeln der Gleichung (10), sondern auch durch das Verhalten der Elementarteiler von D bedingt. Eine nähere Betrachtung führt uns zu den folgenden Sätzen.

I. *Die Wurzeln der Gleichung* (10) *sind sämtlich reell.*

Da nämlich D eine symmetrische Determinante ist, können wir sie auffassen als die Diskriminante einer quadratischen Form in N Variabeln $X_1, X_2, \dots, X_N$.

Die Gleichung (10) ist dann die Säkulargleichung des Büschels:

$$A - \lambda K = 0, \tag{12}$$

wo

$$A = 2 \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j, \tag{13}$$

$$K = \sum_{i,j} k_i X_i^2. \tag{14}$$

Die Form K ist aber positiv definit wegen $k_i > 0$. Nach einem bekannten Satze sind also die Wurzeln von (10) sämtlich reell.

II. *Ist* λ_s *eine Wurzel von* (10), *so ist* $-1 \leqq \lambda_s \leqq 1$.

Bei der Substitution $\lambda = \lambda_s$ wird das System (9) lösbar, d. h. es gibt ein System von reellen Zahlen P_i, die nicht sämtlich Null sind, und wobei

$$k_i \lambda_s P_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} P_j, \qquad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Hieraus geht hervor

$$\sum_{i=1}^{N} P_i [-k_i \lambda_s P_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} P_j] = 0,$$

so daß die Zahlen P_i der Gleichung

$$-\lambda_s \sum_i k_i X_i^2 + 2 \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j = 0 \tag{15}$$

genügen. Diese läßt sich aber schreiben:

$$2 \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j - \sum_i k_i X_i^2 - (\lambda_s - 1) \sum_i k_i X_i^2 = 0,$$

oder wegen (5) und (7):

$$-\sum_{i>j} a_{ij}(X_i - X_j)^2 - (\lambda_s - 1)\sum_i k_i X_i^2 = 0. \tag{16}$$

Für $\lambda_s > 1$ ist aber das linke Glied eine (negativ) definite quadratische Form, und die Gleichung läßt dann also keine reellen Lösungen zu außer der Nullösung. Folglich ist $\lambda_s \leqq 1$.

Schreibt man (15) in der Form

$$2\sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j + \sum_i k_i X_i^2 + (-\lambda_s - 1)\sum_i k_i X_i^2 = 0,$$

oder

$$\sum_{i>j} a_{ij}(X_i + X_j)^2 + (-\lambda_s - 1)\sum_i k_i X_i^2 = 0, \tag{17}$$

so ist das linke Glied eine (positiv) definite quadratische Form, wenn $\lambda_s < -1$. In derselben Weise gelangt man also zu $\lambda_s \geqq -1$.

III. *Die Gleichung $D = 0$ hat immer die Wurzel $\lambda = 1$.*

Das System (9) hat nämlich für $\lambda = 1$ wegen (7) die Lösung $P_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), so daß D für $\lambda = 1$ verschwinden muß.

IV. *Die Wurzel $\lambda = 1$ ist eine einfache Wurzel.*

Wir zeigen vorerst, daß die ersten Minoren von D für $\lambda = 1$ nicht sämtlich verschwinden, also daß D den Rang $N - 1$ hat. Bei der Substitution $\lambda_s = 1$ nimmt die quadratische Form (16) die Gestalt

$$-\sum_{i>j} a_{ij}(X_i - X_j)^2 \tag{18}$$

an. Die Gleichung, welche man erhält, indem man diese Form gleich Null setzt, hat nur diejenigen reellen Lösungen, welche den Gleichungen

$$a_{ij}(X_i - X_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, N)$$

genügen. D. h. sie genügen der Gleichung

$$X_i = X_j$$

für jedes Wertepaar i, j, wobei A_i und A_j durch eine Straße miteinander verbunden sind. *Da aber der Zusammenhang des Netzes vorausgesetzt ist,* folgt hieraus, daß die Gleichung

$$X_i = X_j$$

für *jedes* Wertepaar i, j zutreffen muß. Für $\lambda = 1$ hat also das System (9) nur eine einzige Lösung, nämlich (von dem Proportionalitätsfaktor abgesehen): $X_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, N$). D hat also den Rang $N - 1$ für $\lambda = 1$.

Ein bekannter und in der analytischen Geometrie oft angewandter Satz sagt, daß die λ-Matrix eines Büschels, der eine definite Form ent-

hält, immer lineare Elementarteiler hat[1]). Daraus geht aber hervor, daß die Wurzel $\lambda = 1$ eine einfache ist[2]).

V. *Die Zahl* -1 *ist dann und nur dann eine Wurzel der Gleichung* $D = 0$, *wenn das Netz die Eigenschaft hat, daß sämtliche geschlossenen Züge aus einer geraden Anzahl von Straßen bestehen.*

Hat (9) eine Lösung für $\lambda = -1$, so muß diese die Gleichung (17) für $\lambda = -1$ befriedigen. D. h. die Lösung genügt der Gleichung

$$\sum_{i>j} a_{ij}(X_i + X_j)^2 = 0. \tag{19}$$

Es müssen also die Gleichungen

$$X_i = -X_j \tag{20}$$

bestehen für jedes Wertepaar i, j, wo $a_{ij} \neq 0$, also für jedes Wertepaar i, j, wobei A_i und A_j durch eine Straße verbunden sind.

Es ist klar, daß die Gleichungen (20) nur dann eine Lösung haben, wenn das Netz spezieller Natur ist. Nimmt man z. B. an, daß für einen gewissen Wert i (also an einem bestimmten Punkt A_i) $X_i = 1$ sei, dann kommt jedem Punkt, welcher mit A_i durch eine Straße verbunden ist, der Wert -1 zu, während sämtlichen Punkten, die mit diesen verbunden sind, wieder die Zahl 1 zugeordnet ist usw. D. h. also: *die Zahl* -1 *ist dann und nur dann eine Wurzel der Gleichung* $D = 0$, *falls es möglich ist, die Menge der Knotenpunkte des Netzes so in zwei Teile zu zerlegen* — wir werden sie K_1 und K_2 nennen —, *daß jede Straße einen Punkt von* K_1 *mit einem von* K_2 *verbindet.*

Für K_1 und K_2, welche im allgemeinen eine verschiedene Anzahl von Punkten enthalten, gilt offenbar

$$\sum_{K_1} k_i = \sum_{K_2} k_i; \tag{21}$$

beide Summen stimmen nämlich überein mit der Straßenanzahl des Netzes.

Wir können die Netze mit der erwähnten Eigenschaft auch charakterisieren als solche, wobei jeder geschlossene Weg aus einer geraden Straßenanzahl besteht. Daß diese Bedingung notwendig ist, sieht man sofort ein: fängt man z. B. an einem Punkt von K_1 an, so befindet man sich, nachdem man eine ungerade Anzahl von Straßen durchwandert hat, an einem Punkte von K_2, nach einer geraden Anzahl an einem Punkte von K_1.

---

[1]) Bôcher-Beck: Einführung in die höhere Algebra (1910), S. 328.

[2]) Für ein nicht zusammenhängendes Netz ist die Wurzel $\lambda = 1$ immer mehrfach. Beispiel: $N = 4$. $a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = 1$, die übrigen a_{ij} gleich Null.

Ist man nach dem Anfangspunkt zurückgekehrt, so hat man eine gerade Straßenanzahl durchschritten.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Man setzt für einen Knotenpunkt fest, er soll zu K_1 gehören, jeder Nachbarpunkt zu K_2, dessen Nachbarpunkte wieder zu K_1 usw. Diese Verteilung ist unzweideutig; sollte nämlich ein gewisser Punkt einerseits zu K_1 und von einer andern Seite her zu K_2 gerechnet werden müssen, so ließe sich sofort ein geschlossener Weg angeben mit einer ungeraden Straßenanzahl.

Wir werden die Netze mit der genannten Eigenschaft als G-Netze bezeichnen. Sie lassen sich offenbar in einfacher Weise konstruieren. Zu ihnen gehören besonders sämtliche Netze ohne „eigentliche" geschlossene Wege, also die Bäume der kombinatorischen Topologie.

VI. *Ist* $\lambda = -1$ *eine Wurzel der Gleichung* $D = 0$, *so ist sie eine einfache Wurzel.*

Haben die Gleichungen (20) eine Lösung, ist also das Netz ein G-Netz, so kann sie (wiederum abgesehen von dem Proportionalitätsfaktor) nur lauten

$$X_i = \varepsilon_i, \tag{22}$$

wo $\varepsilon_i = 1$, wenn A_i zur Menge K_1 gehört, und $\varepsilon_i = -1$, wenn A_i zur Menge K_2 gehört.

Da nur eine einzige Lösung besteht, hat D für $\lambda = -1$ den Rang $N - 1$. Man folgert nun wie in IV, daß $\lambda = -1$ eine einfache Nullstelle von D ist[3]).

Aus den Sätzen I—VI können wir Schlüsse ziehen in bezug auf das Verhalten der allgemeinen Lösung der Differenzengleichungen (3) für $n \to \infty$.

Diese allgemeine Lösung ist eine lineare Funktion (mit durch die Anfangsbedingungen festzustellenden Koeffizienten) der Partikularlösungen. Jeder m-fachen Wurzel λ_s von $D = 0$ sind dabei m unabhängige Partikularlösungen zugeordnet. Obgleich es für unsere Frage nicht von wesentlicher Bedeutung ist, bemerken wir noch, daß für jedes λ_s die bezüglichen Elementarteiler linear sind; für $\lambda = \lambda_s$ wird also D ein Matrix $(N - m)$-ten Ranges. Die zu λ_s gehörigen Partikularlösungen sind darum sämtlich von der Form

$$y_i = C_{ij} \lambda_s^n \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, N \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}, \tag{23}$$

[3]) Die Nullstellen von D, welche im Intervall $-1 \leqq \lambda \leqq 1$ liegen, können mehrfach sein. Beispiel: $N = 3$, $a_{ij} = 1$ $(i \neq j)$.

so daß Glieder wie $n^r \lambda_s^n$ in der allgemeinen Lösung in unsrem Falle gar nicht vorkommen.

Die Wurzeln von $D = 0$, welche von 1 und -1 verschieden sind, haben Moduln, welche < 1 sind. Ihre Beiträge verschwinden also für $n \to \infty$. Es kommen für uns nur die Wurzeln 1 und -1 in Betracht.

Ist das Netz *kein* G-Netz, dann kommt $\lambda = -1$ nicht vor. Wegen der in IV gemachten Bemerkung haben wir dann also

$$\lim_{n=\infty} y_i(n) = P, \tag{24}$$

wo P eine Konstante bedeutet. Das heißt

$$\lim_{n=\infty} x_i(n) = k_i P. \tag{25}$$

Aus der Bedingung $\sum_{i=1}^{N} x_i(n) = 1$ folgt noch

$$P^{-1} = \sum_{i=1}^{N} k_i. \tag{26}$$

In einem Netz, das kein G-Netz ist, entsteht für $n \to \infty$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche von den Anfangsverhältnissen unabhängig ist. Der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit ist für einen bestimmten Knotenpunkt der Ordnung dieses Punktes proportional.

Ist das Netz dagegen ein G-Netz, so ist auch die Wurzel $\lambda = -1$ an der allgemeinen Lösung beteiligt. Wir erhalten jetzt

$$y_i(n) = P_1 + \varepsilon_i P_2 (-1)^n + R_i(n),$$

wo

$$\lim_{n=\infty} R_i(n) = 0.$$

Für große Werte von n hat man also

$$x_i(n) = k_i \{P_1 + \varepsilon_i P_2 (-1)^n\}. \tag{27}$$

Aus der Bedingung $\sum x_i(n) = 1$ folgt

$$1 = P_1 \sum_1^N k_i + (-1)^n \cdot P_2 \sum_1^N \varepsilon_i k_i,$$

oder, da wegen (21)

$$\sum_1^N \varepsilon_i k_i = 0$$

$$P_1^{-1} = \sum_{i=1}^{N} k_i \left(= 2 \sum_{K_1} k_i = 2 \sum_{K_2} k_i\right), \tag{28}$$

während P_2 noch unbestimmt bleibt. Ihre Bestimmung kann mittels der Anfangsbedingungen stattfinden.

Handelt es sich um das Problem des Spaziergängers, und befindet sich dieser am Anfang an einem Punkte der Menge K_1, so hat man

$$\sum_{K_1} x_i(n) = 1, \quad \sum_{K_2} x_i(n) = 0 \text{ für gerades } n,$$
$$\sum_{K_1} x_i(n) = 0, \quad \sum_{K_2} x_i(n) = 1 \text{ für ungerades } n.$$

Man findet also $P_2 = P_1$, und für große Werte von n hat man

$$(29) \qquad \begin{aligned} x_i(n) &= 0, && \text{wenn } \varepsilon_i(-1)^n = -1, \\ x_i(n) &= 2k_iP_1, && \text{wenn } \varepsilon_i(-1)^n = 1. \end{aligned}$$

Der Spaziergänger, welcher sich durch ein G-Netz bewegt, befindet sich abwechselnd in einem Punkt der Menge K_1 und in einem der Menge K_2. Befindet er sich in einer bestimmten Menge, so ist für große Werte von n die Wahrscheinlichkeit, sich in einem bestimmten Knotenpunkt dieser Menge zu befinden, mit der Ordnung dieses Punktes proportional.

Handelt es sich um die Bewegung einer Menschenmenge durch das Straßennetz, so kann man die Anfangsbedingungen etwas erweitern, indem man voraussetzt, daß sich der Teil α_i in den Knotenpunkten von K_i befindet $(i = 1, 2)$; es ist $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Man hat dann

$$\sum_{K_1} x_i(n) = \alpha_1, \quad \sum_{K_2} x_i(n) = \alpha_2 \text{ für gerades } n.$$
$$\sum_{K_1} x_i(n) = \alpha_2, \quad \sum_{K_2} x_i(n) = \alpha_1 \text{ für ungerades } n.$$

Man findet dann

$$P_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) P_1$$

und für große Werte von n

$$(30) \qquad \begin{aligned} x_i(n) &= 2k_iP_1\alpha_1, && \text{wenn } \varepsilon_i(-1)^n = 1, \\ x_i(n) &= 2k_iP_1\alpha_2, && \text{wenn } \varepsilon_i(-1)^n = -1. \end{aligned}$$

Bewegt sich eine Menschenmenge auf die erwähnte Weise durch ein G-Netz und war am Anfang der Teil α_1 über die Punkte von K_1, der Teil α_2 über diejenigen von K_2 verteilt, so befindet sich der Teil α_1 abwechselnd an den Punkten von K_1 und von K_2, der Teil α_2 dagegen an denjenigen von K_2 und von K_1. Für große Werte von n ist die Verteilung über die einzelnen Knotenpunkte so, daß die an einem bestimmten Punkte befindliche Anzahl mit der Ordnung des Punktes proportional ist.

Eine stationäre Verteilung findet nur statt, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Wir hatten vorläufig dem Straßennetz noch zwei Bedingungen auferlegt. Wenn wir jetzt zulassen, daß zwei Knotenpunkte durch mehr als eine Straße verbunden sind und daneben die Möglichkeit ins Auge fassen, daß die Endpunkte einer Straße zusammenfallen, so werden unser Beweis

und unsre Resultate nicht wesentlich geändert, wenn wir nur die Definition der Zahlen a_{ij} folgendermaßen erweitern:

a_{ij} für $i \neq j$: die Anzahl der Straßen zwischen A_i und A_j. a_{ii}: die doppelte Anzahl der Straßen, welche von A_i nach A_i zurückführen.

Unter k_i bleiben wir dabei die Anzahl der Richtungen verstehen, worin man sich von A_i aus bewegen kann.

Die fundamentalen Relationen (6) und (7) bleiben ungeändert.

In einem G-Netz ist offenbar $a_{ii} = 0$.

Wir können unser Problem leicht erweitern auf den Fall, daß *nicht* sämtliche Straßen *gleichwertig* sind, sondern daß jede Straße ein bestimmtes Gewicht erhält (z. B. der Breite der Straße proportional). Auch jetzt wird die Lösung nicht wesentlich anders, wenn man nur den Zahlen a_{ij} und k_i folgende Bedeutung beilegt:

a_{ii}: die doppelte Summe der Gewichte derjenigen Straßen, welche von A_i nach A_i führen.

a_{ij} für $i \neq j$: die Summe der Gewichte der Straßen, welche A_i und A_j verbinden.

k_i: die Summe der Gewichte der Straßen, welche von A_i ausgehen (die nach A_i zurückkehrenden doppelt gezählt.)

(Eingegangen am 31. Dezember 1933.)

The Asymptotic Distribution of the Numerals in the Decimal Representation of the Squares of the Natural Numbers.

By

A. S. Besicovitch, Trinity College, Cambridge (England).

---

§ 1.

Notation and definitions. Given a base B, any number m may be expressed in the form

$$m = a_\mu B^\mu + a_{\mu-1} B^{\mu-1} + \ldots + a_1 B + a_0,$$

where

$$1 \leqq a_\mu < B,$$

$$0 \leqq a_i < B \text{ for } i < \mu.$$

We shall write simply

$$m = a_\mu a_{\mu-1} \ldots a_0$$

when the base B can be understood: and the symbol on the right is called the representation of m to the base B. The numerals in our scale of notation are the numbers

$$0, 1, 2, \ldots, (B-1)$$

and the numerals in the representation of m the numbers

$$a_\mu, a_{\mu-1}, \ldots, a_1, a_0.$$

So also we write

$$\frac{m}{B^{\mu+1}} = \cdot a_\mu a_{\mu-1} \ldots a_1 a_0.$$

Given a finite set of numerals E we denote by $s(E, a)$ the number of times that the numeral a belongs to the set E. Given an integer $m = a_\mu a_{\mu-1} \ldots a_0$ we shall write $s(m, a)$ for the number of times that the numeral a occurs in the representation of m. Similarly we shall write $s(m, b_1 b_2 \ldots b_k)$ for the number of times that k consecutive numerals in the representation of m coincide with the numerals $b_1, b_2, \ldots, b_k$ in order.

We shall denote by Θ any real number of the interval $(-1, +1)$, not necessarily the same number in two different instances.

Given $\varepsilon > 0$ we say that a set E of l numerals is ε-normal if for each numeral a

$$s(E, a) = \left(\frac{1}{B} + \Theta\varepsilon\right) l.$$

We say that the number $m = a_\mu a_{\mu-1} \dots a_1 a_0$ is ε-normal if the set $E = (a_\mu, a_{\mu-1}, \dots, a_1, a_0)$ is ε-normal: and we say that m is (k, ε)-normal if for each sequence $b_1 b_2 \dots b_k$ of k numerals

$$s(m, b_1 b_2 \dots b_k) = \left(\frac{1}{B^k} + \Theta\varepsilon\right) \mu.$$

Lemma 1. *Given two positive numbers ε, η we can find an integer ν_0 such that, for any $\nu > \nu_0$, out of all the B^ν possible sequences of ν numerals more than $B^\nu (1 - \eta)$ are ε-normal.*

The lemma follows immediately from the law of large numbers.

Denote by $N(n, \varepsilon)$ the number of ε-normal numbers less than n. From Lemma 1 easily follows

Theorem 1. *Given two positive numbers ε, η we can find an integer n_0 such that, for any $n > n_0$,*

$$N(n, \varepsilon) > (1 - \eta)\, n.$$

Denote also by $N(n. k, \varepsilon)$ the number of (k, ε)-normal numbers less than n.

Theorem 2. *Given two positive numbers ε, η and a positive integer k we can find an integer n_0 such that, for any $n > n_0$,*

$$N(n, k, \varepsilon) > (1 - \eta)\, n.$$

Writing $m = a_\mu a_{\mu-1} \dots a_1 a_0$ we observe that in the representation of the numbers

$$\begin{aligned} m &= a_\mu a_{\mu-1} \dots a_1 a_0 \\ \left[\frac{m}{B}\right] &= a_\mu \dots a_2 a_1 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \left[\frac{m}{B^{k-1}}\right] &= a_\mu \dots a_k a_{k-1} \end{aligned}$$

to the base B^k the numerals used are the numbers represented to the usual base B by the symbols

$$\begin{aligned} &a_\mu, a_\mu a_{\mu-1}, \dots, a_\mu a_{\mu-1} \dots a_{\mu-k+2}, \\ &a_\mu a_{\mu-1} \dots a_{\mu-k+1}, \\ &a_{\mu-1} a_{\mu-2} \dots a_{\mu-k}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_k a_{k-1} \dots a_1, \\ &a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0. \end{aligned}$$

Applying Theorem 1 for the base B^k with numbers $\varepsilon_1 < \varepsilon$ and $\eta_1 < \frac{\eta}{k}$ in place of ε and η we obtain the desired result.

Cor. *Given a set I of measure l and composed of a finite number of intervals contained in $(0, 1)$, given also positive numbers ε, η, then we can find an integer n_0 such that for any $n > n_0$ there are more than $(1 - \eta)n$ values of $m < n$ with the property that, if as usual we write*

$$m = a_\mu a_{\mu-1} \dots a_1 a_0,$$

then of the real numbers

$$0 \cdot a_0,\ 0 \cdot a_1 a_0,\ \dots,\ 0 \cdot a_\mu a_{\mu-1} \dots a_1 a_0,$$

the number which belong to the set I is equal to $(l + \Theta\varepsilon)\mu$.

§ 2.

Lemma 2. *Given a positive number A, all real numbers except a set of measure zero can be represented in infinitely many ways in the form*

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{\beta} \tag{1}$$

where a and b are integers and

$$\beta > A b^2.$$

This result is well-known and may be proved by continued fractions.

Lemma 3. *Given positive numbers A, η we can find a number β_0 and a set I, of measure greater than $1 - \eta$ in $(0, 1)$ and composed of a finite number of intervals, such that every number of the set I can be represented in the form (1) with*

$$\beta_0 > \beta > A b^2.$$

It follows from Lemma 2 that the intervals

$$\left(\frac{a}{b},\ \frac{a}{b} + \frac{1}{A b^2}\right)$$

corresponding to all rational points of the interval $(0, 1)$ cover almost all points of $(0, 1)$. Consequently there exists a set

$$I_1 = \Sigma\left(\frac{a}{b},\ \frac{a}{b} + \frac{1}{A b^2}\right),$$

composed of a finite number n of these intervals, which has measure greater than $1 - \frac{1}{2}\eta$. Introduce now the set

$$I_2 = \Sigma\left(\frac{a}{b},\ \frac{a}{b} + \frac{\eta}{2n}\right)$$

where the summation is extended over the same values of $\frac{a}{b}$ as before. Then it is easy to see that the set

$$I = I_1 - I_1 I_2$$

and the number $\beta_0 = \frac{2n}{\eta}$ have the required properties.

§ 3.

Lemma 4. *Given a positive number ε (and the base B of enumeration) we can find $A > 0$ such that, if a, b, N be integers and β a positive number and if*

$$N \geqq A\beta \geqq A^2 b^2,$$

then the set E consisting of the N numbers

$$\text{res}\left[n\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\right] \pmod{B}, \tag{2}$$

where n runs from 0 up to $N-1$, is ε-normal.

Observe that for

$$k\beta + \frac{i\beta}{b} \leqq n < k\beta + \frac{(i+1)\beta}{b}, \tag{3}$$

where $i < b$, we have

$$\left[n\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\right] = \left[\frac{na+i}{b}\right] + k$$

and the residue of the right hand side is periodic in n with period bB.

Let $c_1, c_2, \ldots, c_{bB}$ be the set of values of $\text{res}\left[\frac{na+i}{b}\right] \pmod{B}$ for $n = 0, 1, \ldots, bB-1$, which (the set) on account of the periodicity coincides (except in order) with the set of values for any bB consecutive values of n. Then it follows that the values of $\text{res}\left[n\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\right]$ for any bB consecutive values of n belonging to the interval

$$k\beta + \frac{i\beta}{b} \leqq n < k\beta + \frac{(i+1)\beta}{b}$$

are

$$\text{res}\,(c_1 + k),\ \text{res}\,(c_2 + k),\ \ldots,\ \text{res}\,(c_{bB} + k)$$

which shews that the values of $\text{res}\left[n\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\right]$ for B groups, each of bB consecutive values of n, one group from everyone of B consecutive intervals

$$k\beta + \frac{i\beta}{b} \leqq n < k\beta + \frac{(i+1)\beta}{b},\ k = k_0 + 1,\ k_0 + 2, \ldots, k_0 + B$$

are $0, 1, \ldots, B-1$, each of them taken bB times. Consider now the values of n satisfying the conditions

$$k\beta + \frac{i\beta}{b} \leqq n < k\beta + \frac{i\beta}{b} + Bb\left[\frac{\beta}{Bb^2}\right],$$

$$i = 0, 1, \ldots, b-1; \quad k = 0, 1, \ldots, B\left[\frac{N}{B\beta}\right].$$

The set E_0 of the corresponding vulues of $\operatorname{res}\left[n\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{\beta}\right)\right]$ consists of the numbers $0, 1, \ldots, B-1$, each taken equal number of times.

And the number of members of the set $E - E_0$ is only

$$\begin{aligned} &N - b^2 B^2 \left[\frac{N}{\beta B}\right] \cdot \left[\frac{\beta}{b^2 B}\right] \\ &\leqq \left(N - \beta B\left[\frac{N}{\beta B}\right]\right) + b^2 B^2 \left[\frac{N}{\beta B}\right] \\ &< \beta B + \frac{N B b^2}{\beta} \end{aligned}$$

and is therefore less than εN if

$$\frac{B b^2}{\beta} \leqq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \frac{\beta B}{N} \leqq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

In this case each of the numerals occurs more than $\frac{(1-\varepsilon)N}{B}$ times in E_0, a fortiori in E: and occurs less than $\left(\frac{1}{B} + \varepsilon\right)N$ times in E. The lemma is thus proved with

$$A = \frac{2B}{\varepsilon}.$$

§ 4.

Given integers

$$N, m = a_\mu a_{\mu-1} \ldots a_1 a_0 \quad \text{and} \quad f = \alpha_\varphi \alpha_{\varphi-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0$$

we denote by $E(f, m, N)$ the set, of μN members, consisting of the last μ figures of each of the numbers

$$f + jm = c_\sigma c_{\sigma-1} \ldots c_1 c_0,$$

where j runs from 0 up to $N-1$.

Lemma 5. *Given positive numbers ε, η we can find numbers n_0, N_0 such that for any $n > n_0$ and $N > N_0$ the set $E(f, m, N)$ is ε-normal for more than $(1-\eta)n$ values of $m < n$.*

Choose an integer k and a positive number ε_1 so that

$$B^{-k} < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad (B^{k-1} + 1)\varepsilon_1 < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{4}$$

By Lemma 4, we can find $A > 0$ such that, if

$$N \geqq A\beta \geqq A^2 b^2,$$

then

$$\operatorname{res}\left[j\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\right] \pmod{B^k}$$

takes $N(B^{-k}+\Theta\varepsilon_1)$ times each of the values $0, 1, \ldots, B^k-1$ as j runs from 0 up to $N-1$.

By Lemma 3, we can find a number β_0 and a set I, of measure $l > 1-\frac{1}{3}\varepsilon$ in $(0, 1)$ and composed of a finite number of intervals, such that every number of I can be represented in the form

$$\frac{a}{b}+\frac{1}{\beta},$$

where a, b are integers and

$$\beta_0 > \beta > A b^2.$$

We shall take

$$N_0 = A\beta_0.$$

Denote by $U(m, I)$ the set of values of i for which the fractional part of $m B^{k-i-1}$ belongs to I. For any such value of i we may write

$$\frac{m}{B^{i-k+1}} = \frac{a}{b}+\frac{1}{\beta}$$

where a, b are integers and

$$N_0 > A\beta > A^2 b^2.$$

In fact when we add an integer to a number of the form (1) we change only the value of a. It follows that if $N > N_0$ then

$$\operatorname{res}\left[\frac{jm}{B^{i-k+1}}\right] \pmod{B^k}$$

takes $N(B^{-k}+\Theta\varepsilon_1)$ times each of the values $0, 1, \ldots, B^k-1$ as j runs from 0 up to $N-1$.

Now write

$$f' = [f B^{k-i-1}], \quad f = B^{i-k+1} f' + f'',$$
$$f + jm - f'' = b_\varrho\, b_{\varrho-1} \ldots b_1\, b_0.$$

Then

$$b_i\, b_{i-1} \ldots b_{i-k+1} = \operatorname{res}\left[f' + \frac{jm}{B^{i-k+1}}\right] \pmod{B^k}$$

and therefore takes $N(B^{-k}+\Theta\varepsilon_1)$ times each of the values $0, 1, \ldots, B^k-1$ as j varies.

But c_i can differ from b_i only when

$$b_{i-1} = b_{i-2} = \ldots = b_{i-k+1} = B-1.$$

It follows that the number of times that c_i takes any particular value $c (< B)$ is

$$N (B^{-k} + \Theta \varepsilon_1) (B^{k-1} + \Theta)$$

which by (4) may be written

$$N \left(\frac{1}{B} + \frac{2}{3} \Theta \varepsilon \right).$$

Write $| U |$ for the number of members of the set U. By Theorem 2, Cor. we can find a number n_0 such that, for any $n > n_0$,

$$| U (m, I) | > \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon \right) \mu \tag{5}$$

for more than $(1 - \eta) n$ values of $m < n$. But for any such value of m the number of times that the numeral c occurs in the set $E (f, m, N)$ exceeds

$$N \left(\frac{1}{B} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) | U | > \frac{N}{B} \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon \right) \mu - \frac{2}{3} \varepsilon N \mu > \mu N \left(\frac{1}{B} - \varepsilon \right)$$

and is less than

$$N \left(\frac{1}{B} + \frac{2}{3} \varepsilon \right) | U | + \frac{1}{3} \varepsilon N \mu \leqq \mu N \left(\frac{1}{B} + \varepsilon \right).$$

Thus the set $E (f, m, N)$ is ε-normal and the proof of the lemma complete.

§ 5.

Given integers

$$N, m = a_\mu a_{\mu-1} \ldots a_1 a_0,$$

we denote by $E (m, N)$ the set, of μN members, consisting of the last μ figures of each of the numbers

$$(m + j)^2 = c_\sigma c_{\sigma-1} \ldots c_1 c_0,$$

where j runs from 0 up to $N - 1$.

Lemma 6. *Given positive numbers ε, η we can find a number N_0 and a function $n_0 (N)$ such that, for any $N > N_0$ and any $n > n_0 (N)$ the set $E (m, N)$ is ε-normal for more than $(1 - \eta) n$ values of $m < n$.*

Choose an integer k and a positive number ε_1, so that

$$B^{-k} < \frac{1}{8} \varepsilon, \quad (B^{k-1} + 2) \varepsilon_1 < \frac{1}{4} \varepsilon. \tag{6}$$

By Lemma 4, we can find $A > 0$ such that, if

$$N \geqq A \beta \geqq A^2 b^2,$$

then

$$\operatorname{res} \left[j \left(\frac{a}{h} + \frac{1}{\beta} \right) \right] (\operatorname{mod} B^k)$$

takes $N (B^{-k} + \Theta \varepsilon_1)$ times each of the values $0, 1, \ldots, B^k - 1$ as j runs from 0 up to $N - 1$.

By Lemma 3, we can find a number β_0 and a set I, of measure $l > 1 - \frac{1}{4}\varepsilon$ in $(0, 1)$ and composed of a finite number of intervals, such that every number of I can be represented in the form

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{\beta},$$

where a, b are integers and

$$\beta_0 > \beta > A b^2.$$

We shall take

$$N_0 = A\beta_0.$$

Denote by $U(m, I)$ the set of values of i for which the fractional part of $2m B^{k-i-1}$ belongs to I. For any such value of i and any $N > N_0$

$$\operatorname{res}\left[\frac{2jm}{B^{i-k+1}}\right] \pmod{B^k}$$

takes $N(B^{-k} + \Theta\varepsilon_1)$ times each of the values $0, 1, \ldots, B^k - 1$ as j runs from 0 up to $N - 1$.

Now write

$$f' = [m^2 B^{k-i-1}], \quad m^2 = B^{i-k+1} f' + f'',$$
$$m^2 + 2jm - f'' = b_\varrho b_{\varrho-1} \ldots b_1 b_0.$$

Then

$$b_i b_{i-1} \ldots b_{i-k+1} = \operatorname{res}\left[f' + \frac{2jm}{B^{i-k+1}}\right] \pmod{B^k}$$

and therefore takes $N(B^{-k} + \Theta\varepsilon_1)$ times each of the values $0, 1, \ldots, B^k - 1$ as j varies.

Denote by $U(m, N, I)$ the set of values of i belonging to $U(m, I)$ for which also

$$N^2 \leqq B^{i-k+1}. \tag{7}$$

For any such value of i we have

$$f'' + j^2 < 2B^{i-k+1}.$$

Hence c_i can differ from b_i only when $b_{i-1} b_{i-2} \ldots b_{i-k+1}$ is equal to either $B^{k-1} - 1$ or $B^{k-1} - 2$. It follows that the number of times that c_i takes any particular value c is

$$N(B^{-k} + \Theta\varepsilon_1)(B^{k-1} + 2\Theta)$$

which by (6) may be written

$$N\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{2}\Theta\varepsilon\right).$$

Now we can find a number $m_0(N)$ such that if $m > m_0(N)$ then (7) holds except for at most $\frac{1}{4}\mu\varepsilon$ values of i. And we can find $n_0'(N)$ such that, for any $n > n_0'(N)$,

$$m > m_0(N)$$

except for at most $\frac{1}{2}\eta n$ values of $m < n$.

By Theorem 2, Cor. we can find a number n_1 such that, for any $n > n_1$,

$$|U(m, I)| > (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon)\mu$$

for more than $(1 - \frac{1}{2}\eta)n$ values of $m < n$.

We shall take

$$n_0(N) = n_1 + n_0'(N).$$

Then if $N > N_0$ and $n > n_0(N)$ we have for more than $(1 - \eta)n$ values of $m < n$ at once

$$|U(m, I)| > (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon)\mu, \quad m > m_0(N)$$

and therefore also

$$|U(m, N, I)| > (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\mu.$$

But for any such value of m the set $E(m, N)$ is ε-normal. This proves the lemma.

§ 6.

For any integer m we now write

$$m = a_\mu a_{\mu-1} \dots a_1 a_0, \quad m^2 = d_\tau d_{\tau-1} \dots d_1 d_0,$$
$$\Phi(m) = d_\tau d_{\tau-1} \dots d_\mu.$$

Lemma 7. *Given two positive numbers ε, η we can find a number n_0 such that for any $n > n_0$ the number $\Phi(m)$ is ε-normal for more than $(1 - \eta)n$ values of $m < n$.*

In any range

$$B^\mu \leqq m < B^{\mu+1}$$

$\Phi(m)$ is strictly monotonic and the difference between two consecutive values is less than $2B$. The lemma accordingly follows from Lemma 1.

Denote by $E'(m, N)$ the set consisting of all the figures in the representations of the numbers

$$(m + j)^2 = c_\sigma c_{\sigma-1} \dots c_1 c_0,$$

where j runs from 0 up to $N - 1$.

Lemma 8. *Given two positive numbers ε, η we can find a number N_0 and a function $n_0(N)$ such that for any $N > N_0$ and any $n > n_0(N)$ the set $E'(m, N)$ is ε-normal for more than $(1 - \eta)n$ values of $m < n$.*

This result follows easily by combining Lemma 6 and Lemma 7.

We come now to our main result.

Theorem 3. *Given two positive numbers ε, η we can find a number n_0 such that the representation of m^2 is ε-normal for more than $(1 - \eta)n$ values of $m < n$, n being any integer greater than n_0.*

Write

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{4}\varepsilon, \quad \eta_1 = \tfrac{1}{4}\eta.$$

Choose an integer k so great that of all the B^k possible sequences $b_1 b_2 \dots b_k$ of k figures more than $B^k(1 - \varepsilon_1 \eta_1)$ of them are ε_1-normal and write

$$\varepsilon_2 = B^{-k}.$$

Let the representation of the number m to the base B^k be

$$m = A_M A_{M-1} \dots A_1 A_0$$

and let that of $(m+j)^2$ be

$$(m+j)^2 = C_\Sigma C_{\Sigma-1} \dots C_1 C_0. \tag{8}$$

In particular write

$$m^2 = D_T D_{T-1} \dots D_1 D_0.$$

Denote by $E_k'(m, N)$ the set consisting of all the figures C in the representations (8) of the numbers $(m+j)^2$ where j runs from 0 up to $N-1$.

By Lemma 8 we can choose a number N_0 and a function $n_0(N)$ such that if $N > N_0$ and $n > n_0(N)$ then there are more than $(1-\eta_1)n$ values of $m < n$ for which the set $E_k'(m, N)$ is ε_2-normal.

Let us say that a numeral in the scale of notation to the base B^k is *exceptional* if its representation to the usual base B is not ε_1-normal. If m be so large that, for each value of j,

$$\Sigma \leqq 2M + 3 \tag{9}$$

and if $E_k'(m, N)$ is ε_2-normal then the number of exceptional figures in $E_k'(m, N)$ does not exceed

$$N(2M+3)(B^{-k}+\varepsilon_2) B^k \varepsilon_1 \eta_1 = 2N\varepsilon_1\eta_1(2M+3).$$

Hence the number of such figures in any one of the expansions (8) does not exceed $2\varepsilon_1(2M+3)$ except for at most $N\eta_1$ values of j.

Let n be so great that (9) holds for more than $(1-\eta_1)n$ values of $m < n$. Then in the range

$$m + j \geqq N, \quad m < n, \quad j < N$$

there are at most $2\eta_1 n N$ pairs (m, j) for which the expansion (8) contains more than $2\varepsilon_1(\Sigma+3)$ exceptional figures. Hence there are at most $2\eta_1 n$ values of m in the range

$$N \leqq m < n$$

for which the expansion

$$m^2 = D_T D_{T-1} \dots D_1 D_0$$

contains more than $2\varepsilon_1 (T+3)$ exceptional figures. For any other value of m in the range we easily find that the usual expansion

$$m^2 = d_\tau d_{\tau-1} \dots d_1 d_0$$

is ε-normal provided also T is sufficiently large, say

$$T > T_0(\varepsilon).$$

We take N to be the least integer greater than N_0 and then choose $n_0 > n_0(N)$ so that the conditions

$$\Sigma \leqq 2M + 3, \quad m \geqq N, \quad T > T_0(\varepsilon)$$

are all fulfilled for more than $(1 - 3\eta_1) n$ values of $m < n$. This number n_0 has the desired property.

(Eingegangen am 13. Januar 1934.)

Zu einem Beispiel von Nagumo und Fukuhara.

Von

E. Digel aus Reutlingen.

Von Fukuhara stammt folgender Satz[1]):
Gegeben sei ein System von Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dessen rechte Seiten in dem Bereich $0 \leqq x - x_0 \leqq a$, $-\infty < y_i < +\infty$ stetige und beschränkte Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ sind. Die Punktmenge $\mathfrak{R}$ bestehe aus den Punkten, die auf den Integralkurven liegen, welche vom Punkt $P_0 = P_0(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ ausgehen.

Ist dann $P = P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ ein Punkt auf dem Rand von $\mathfrak{R}$ und ist $x_0 < \xi < x_0 + a$, so gibt es durch P eine Integralkurve des Systems (A), welche durch P_0 geht und für $x_0 \leqq x \leqq \xi$ dem Rand von $\mathfrak{R}$ angehört.

Daß es stets eine Integralkurve durch P gibt, die durch P_0 geht und für ein größeres Intervall $x_0 \leqq x \leqq c$, wo $\xi < c < x_0 + a$ ist, dem Rand von R angehört, kann dagegen nicht behauptet werden. Nagumo und Fukuhara[2]) belegen das durch ein Beispiel, ohne jedoch alle erforderlichen Überlegungen im einzelnen durchzuführen. Es sei mir daher die Angabe eines Beispiels gestattet, bei dem der geometrische Sachverhalt ähnlich ist wie bei dem Beispiel von Nagumo und Fukuhara, bei dem sich aber die erforderlichen Überlegungen analytisch wesentlich einfacher durchführen lassen.

Wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \pm \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \sqrt{|x|}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \pm \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} \sqrt{|x|}, \end{cases}$$

und zwar im t, x, y-Raum; dabei sollen die rechten Seiten für $x^2 + y^2 = 0$ den Wert Null haben, und es soll das obere oder untere Vorzeichen gelten, je nachdem $x \geqq 0$ oder < 0 ist. Die rechten Seiten sind in dem ganzen

[1]) Fukuhara, Proceedings of the Imperial Academy of Japan 6 (1930), S. 360—362; vgl. auch Nagumo und Fukuhara, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan (3) 12 (1930), S. 233—235, sowie Kamke, Acta mathematica 58 (1932), S. 69—74.

[2]) Nagumo und Fukuhara, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan (3) 12 (1930), S. 234—235.

Raum stetig und haben für $x \neq 0$ stetige partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Es gibt also durch jeden Punkt mindestens eine Integralkurve. Um die Integrale dieses Systems explizit angeben zu können, führen wir folgende Funktion ein

$$T = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \qquad \left(0 \leqq \Phi \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

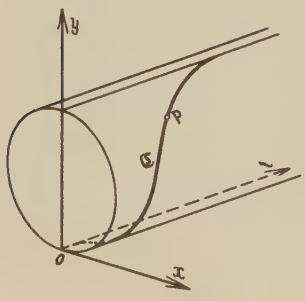
Das Integral ist konvergent. Sein Wert für $\Phi = \frac{\pi}{2}$ sei c. Die Umkehrfunktion $\Phi(T)$ von (2) existiert im Intervall $0 \leqq T \leqq c$, hat dort eine stetige Ableitung und erfüllt folgende Relationen

$$\Phi(0) = 0, \ \Phi(c) = \frac{\pi}{2}; \qquad \Phi'(T) = \sqrt{\sin 2\Phi(T)}.$$

Integrale des Systems (1) sind nun bei beliebigem $a > 0$ und beliebigem τ die Raumkurven

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} a \sin 2\Phi\left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2a}}\right) \\ y = \quad a \sin^2 \Phi\left(\frac{t-\tau}{\sqrt{2a}}\right) \end{cases} \qquad \text{für } 0 \leqq \frac{t-\tau}{\sqrt{2a}} \leqq c, \tag{3}$$

sowie die in der t, y-Ebene liegenden Parallelen zur t-Achse. Die Projektionen der Kurven (3) auf die x, y-Ebene sind die abgeschlossenen linken und rechten Hälften der Kreise $x^2 + y^2 = a\,y$. Die Kurven selber liegen also auf Kreiszylindern, welche die x, t-Ebene längs der t-Achse berühren. Ihre Endpunkte und nur diese liegen in der t, y-Ebene. Setzt man in ihnen Halbgeraden an die Kurven (3) an, die in Richtung der t-Achse verlaufen, so entstehen Kurven, die in ihrem ganzen Verlauf Integrale sind. Unter den Kurven (3) verstehen wir weiterhin diese verlängerten Kurven. Sie gehen für $\tau \geqq 0$ alle durch den Nullpunkt.



Diejenigen Kurven von (3), für die $\tau = 0$ ist, verlassen die t, y-Ebene im Nullpunkt und münden im Punkt $t = c\sqrt{2a}$, $y = a$ wieder in sie ein. Die anderen Kurven von (3) entstehen aus diesen durch Parallelverschiebung in Richtung der t-Achse. Die Punkte $t = c\sqrt{2a}$, $y = a$ bilden für veränderliches a einen Parabelbogen, der im ersten Quadranten der t, y-Ebene liegt.

Es sei nun $\mathfrak{R}$ die Menge derjenigen Punkte, die auf Integralkurven liegen, die vom Nullpunkt ausgehen.

Ist dann $\mathfrak{C}$ eine beliebige der Kurven (3) mit $\tau = 0$ und P ein Punkt auf $\mathfrak{C}$, der außerhalb der t, y-Ebene liegt, so ist P ein Randpunkt von $\mathfrak{R}$. Verschiebt man nämlich die Kurve $\mathfrak{C}$ ein wenig in Richtung der

negativen t-Achse, so geht der Punkt P in einen Punkt P_1 über, und die verschobene Kurve $\mathfrak{C}_1$ ist auch eine Integralkurve. Die durch P_1 gehenden Integralkurven fallen mit $\mathfrak{C}_1$ zusammen, solange diese Kurve außerhalb der t, y-Ebene liegt; denn durch jeden Punkt außerhalb der t, y-Ebene geht nur eine Integralkurve, da die rechten Seiten von (1) für $x \neq 0$ stetige partielle Ableitungen haben. An der Stelle $t = 0$ liegt $\mathfrak{C}_1$ außerhalb der t, y-Ebene. Also geht keine der durch P_1 gehenden Integralkurven durch den Nullpunkt, d. h. P ist ein Randpunkt von $\mathfrak{R}$.

Wir zeigen nun, daß die Punkte

$$x^2 + y^2 \leqq \frac{y\, t^2}{2\, c^2}, \qquad t \geqq 0 \tag{4}$$

zu $\mathfrak{R}$ gehören. Das sind die Punkte der abgeschlossenen Kreisscheiben, die die Ordinaten des obigen Parabelbogens zu Durchmessern haben und senkrecht auf der t, y-Ebene stehen.

Der Punkt $t_0, x_0, y_0, (y_0 > 0)$ sei zunächst beliebig gewählt. Dann setzen wir

$$a_0 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{y_0}{a_0}} = \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}}$$

(Arc sin bedeutet den Hauptwert dieser Funktion). Da $0 \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2}$ ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes T_0, so daß $\Phi(T_0) = \varphi_0$ ist. Schließlich wird τ_0 so bestimmt, daß

$$T_0 = \frac{t_0 - \tau_0}{\sqrt{2\, a_0}} \tag{5}$$

ist. Bildet man mit den so definierten Werten von a_0 und τ_0 die Kurve (3) und nimmt dabei das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem $x_0 \geqq 0$ oder $x_0 < 0$ ist, so geht sie durch den Punkt t_0, x_0, y_0.

Genügt nun der Punkt t_0, x_0, y_0 außer $y_0 > 0$ noch der Bedingung (4), so ist $\tau_0 \geqq 0$, d. h. die mit a_0 und τ_0 gebildete Kurve (3) geht dann durch den Nullpunkt. Aus (4) und $y_0 > 0$ folgt nämlich

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} \leqq \frac{t_0^2}{2\, c^2}$$

oder, da $\frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} = a_0$ und $t_0 \geqq 0$ ist:

$$c \sqrt{2\, a_0} \leqq t_0. \tag{6}$$

Wegen $T_0 \leqq c$ folgt aus (5) $t_0 - \tau_0 \leqq c \sqrt{2\, a_0}$, also wegen (6) $\tau_0 \geqq 0$, wenn $y_0 > 0$ ist. Ist aber $y_0 = 0$, so folgt aus (4) $x = 0$, d. h. wir haben die Punkte der positiven t-Achse, und diese gehören, da die t-Achse eine Integralkurve ist, auch zu $\mathfrak{R}$.

Es sei nun $\mathfrak{C}$ wieder die oben eingeführte Kurve und P wieder ein Punkt auf $\mathfrak{C}$, der außerhalb der t, y-Ebene liegt. Die von P ausgehenden

Integralkurven können sich erst verzweigen, nachdem $\mathfrak{C}$ die t, y-Ebene getroffen hat. Letzteres geschieht im Punkt $t_1 = c\sqrt{2a}$, $y_1 = a$. Da hier $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ den Wert Null haben, so lassen sich die durch diesen Punkt gehenden Integralkurven in der Form

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \varepsilon_1 \cdot (t - t_1) \\ y = y_1 + \varepsilon_2 \cdot (t - t_1) = \frac{t_1^2}{2c^2} + \varepsilon_2 \cdot (t - t_1) \end{cases}$$

darstellen, wobei ε_1, ε_2 Funktionen von t sind, für die $\lim\limits_{t \to t_1} \varepsilon_1 = \lim\limits_{t \to t_1} \varepsilon_2 = 0$ ist. Es gibt nun ein $\delta > 0$, so daß die Punkte von (7) für $0 < t - t_1 < \delta$ die Beziehung

$$(8) \qquad x^2 + y^2 < \frac{y t^2}{2c^2}$$

erfüllen, denn es ist

$$x^2 + y^2 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)(t - t_1)^2 + \frac{\varepsilon_2 t_1^2}{c^2}(t - t_1) + \frac{t_1^4}{4c^4},$$

$$\frac{y t^2}{2c^2} = \frac{t_1^2 t^2 + 2c^2 \varepsilon_2 t^2 (t - t_1)}{4c^4},$$

$$\frac{y t^2}{2c^2} - (x^2 + y^2) = (t - t_1)\left\{\frac{t_1^2 (t + t_1)}{4c^4} + \frac{\varepsilon_2}{c^2}\left(\frac{t^3}{2} - t_1^2\right) - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)(t - t_1)\right\},$$

also bei passend gewähltem $\delta > 0$

$$\frac{y t^2}{2c^2} - (x^2 + y^2) > 0 \quad \text{für } 0 < t - t_1 < \delta.$$

Da die Punkte, die (8) erfüllen, *innere* Punkte von $\mathfrak{R}$ sind, so gelangen alle von P ausgehenden Integralkurven ins Innere von $\mathfrak{R}$. Weil P ein Randpunkt von $\mathfrak{R}$ ist, so ist damit die Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 6. April 1934.)

Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. I.

Herrn Prof. Dr. Michael Bauer zum 60. Geburtstag am 20. September 1934 gewidmet.

Von

Nikolaj Tschebotarëw in Kasan (USSR.).

Herr E. Landau[1]) hat das Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke auf die Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{\sin m\Theta}{\sin n\Theta}\right)^2 = \frac{m}{n} \tag{1}$$

zurückgeführt, wobei m und n relativ prime ganze rationale Zahlen sind. Er hat bewiesen, daß diese Gleichung im Falle $m = p$ (p eine Primzahl), $n = 1$ nur dann durch Quadratwurzeln lösbar ist, wenn p eine sogenannte Gaußsche Primzahl ist, d. h. die Gestalt $2^k + 1$ hat. Neuerdings hat Herr L. Tschakaloff[2]) das Landausche Ergebnis wesentlich erweitert und gezeigt, daß diese Bedingung nicht hinreichend ist, indem er die Unlösbarkeit der Gleichung (1) durch Quadratwurzeln im Falle $m = 17$, $n = 1$ bestätigte. In einer anderen Arbeit[3]) hat er mittels einer sehr scharfsinnigen Methode mehrere allgemeinere Fälle der Gleichung (1) erledigt, indem er eine Clausensche Vermutung[4]) zu bestätigen strebte, daß die Gleichung (1) nur in folgenden Fällen durch Quadratwurzeln lösbar ist:

$$\begin{array}{lllll} m = 2 & m = 3 & m = 3 & m = 5 & m = 5 \\ n = 1 & n = 1 & n = 2 & n = 1 & n = 3. \end{array}$$

In der vorliegenden Arbeit will ich dieses Problem für den Fall $m - n \equiv 0 \pmod 2$ erledigen. Dabei benutze ich zwei verschiedene

[1]) E. Landau, Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. Sitzber. Berl. Math. Ges. **2** (1903), S. 1—6.

[2]) L. Tschakaloff, Beitrag zum Problem der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke. Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 552—559.

[3]) Derselbe, Anwendung der Theorie der algebraischen Zahlen usw. C. R. du Premier Congrès des Pays Slaves, Warszawa 1930, S. 134—139.

[4]) Clausen, Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt usw. Journ. f. Math. **21** (1840), S. 375—376.

Kriterien, die zuerst von Herrn M. Bauer[5, 6]) zur Untersuchung der Galoisschen Gruppe von Gleichungen verwendet wurden.

§ 1.

Allgemeine algebraische Kriteria.

1. Das erste Bauersche Kriterium kann folgendermaßen formuliert werden:

Hilfssatz 1. *Läßt eine Wurzel der Gleichung*

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

die p-adische Reihenentwicklung

$$x = \varepsilon + a \cdot p^{\varrho} \tag{3}$$

zu, wobei $\varrho = \frac{\varkappa}{\lambda}$, $(\varkappa, \lambda) = 1$ *ist, so ist die Ordnung der Gruppe dieser Gleichung durch* λ *teilbar.*

Beweis. Aus einem Satz von Herrn Ö. Ore[7]) folgt, daß in diesem Falle der mittels einer Wurzel der Gleichung (2) gebildete Körper einen Primidealfaktor $\mathfrak{P}$ von p besitzt, dessen Ordnung e durch λ teilbar ist. Daraus schließen wir, daß im Normalkörper $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtliche Wurzeln der Gleichung (2) bedeuten, die einem Primidealfaktor von $\mathfrak{P}$ entsprechende Trägheitsgruppe eine durch λ teilbare Ordnung hat[8]). Da aber die Trägheitsgruppe in der Galoisschen Gruppe als Teiler aufgeht, so ist der Hilfssatz bewiesen.

Korollar. *Soll die Gleichung* (2) *durch Quadratwurzeln lösbar sein, so müssen die ihr entsprechenden Zahlen nur Potenzen von 2 im Nenner enthalten.*

2. Das zweite Bauersche Kriterium kann man aus dem folgenden berühmten Dedekindschen Satz ablesen, wenn man ihn auch auf kritische Primzahlen erweitert.

Hilfssatz 2. *Ist die linke Seite der Gleichung* (2), *modulo p betrachtet, wobei p eine beliebige Primzahl ist, in die modulo p irreduziblen Polynome von den Graden* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *zerlegbar, so ist die Ordnung ihrer Galoisschen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *durch jede der Zahlen* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *teilbar.*

Beweis. Aus demselben Satz von Herrn Ore[7]) folgt, daß in diesem Falle ein Primidealfaktor $\mathfrak{P}$ von p gibt, dessen Grad f durch den Grad n_i

---

[5]) M. Bauer, Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen. Journ. für Math. **132** (1907), S. 21—32.

[6]) Derselbe, Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt. Math. Ann. **64** (1907).

[7]) Ö. Ore, Newtonsche Polygone in der Theorie der algebraischen Körper. Math. Ann. **99** (1928), S. 99—100, Satz 1.

[8]) P. Bachmann, Zahlentheorie, Bd. 5 (Leipzig 1905), S. 494 (54), 495 (56).

eines beliebigen der modulo p irreduziblen Faktoren von $f(x)$ teilbar ist. Daraus schließen wir, daß im Normalkörper $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämtliche Wurzeln der Gleichung (2) bedeuten, $\mathfrak{P}$ in Primideale zerfällt, deren Grad F durch f und also durch n_i teilbar ist[9]). Da aber F gleich dem Index $(\mathfrak{Z}:\mathfrak{T})$ ist, wobei $\mathfrak{Z}$ die Zerlegungsgruppe und $\mathfrak{T}$ die Trägheitsgruppe dieses Primidealfaktors ist, so folgt daraus, daß die Ordnung von $\mathfrak{Z}$ und also a fortiori die Ordnung der Galoisschen Gruppe der Gleichung (2) durch n_i teilbar ist, w. z. b. w.

Korollar. *Damit die Gleichung* (2) *durch Quadratwurzeln lösbar sei, ist notwendig, daß ihre linke Seite nach jedem Primmodul p in modulo p irreduzible Faktoren zerfällt, deren Grade Potenzen von 2 sind.*

§ 2.

Die Exponentenwerte ϱ für Kreisbogenzweieckengleichungen.

1. Wie Herr Tschakaloff gezeigt hat, verwandelt sich die Gleichung (1) durch Substitution $e^{i\theta} = x$, $y = x^2$ in die Gleichung

$$\left(\frac{y^m-1}{y-1}\right)^2 - \frac{m}{n}\cdot y^{m-n}\cdot\left(\frac{y^n-1}{y-1}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Ist $m-n$ gerade, so zerfällt diese Gleichung in folgende Gleichungen:

$$\frac{y^m-1}{y-1} - \sqrt{\frac{m}{n}}\cdot y^{\frac{m-n}{2}}\cdot\frac{y^n-1}{y-1} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{y^m-1}{y-1} + \sqrt{\frac{m}{n}}\cdot y^{\frac{m-n}{2}}\cdot\frac{y^n-1}{y-1} = 0.$$

Ist aber $m-n$ ungerade, so machen wir in der Gleichung (4) vorläufig die Substitution $y = x^2$ und setzen $m_1 = 2m$, $n_1 = 2n$, $\sqrt{\frac{m_1}{n_1}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$. Dann zerfällt die Gleichung (4) in die Gleichungen von demselben Typ (5). Die Zahlen m_1 und n_1 sind aber in diesem Falle nicht relativ prim, sondern haben 2 als größten gemeinsamen Teiler.

Wir wollen uns begnügen, nur die eine der Gleichungen (5) zu betrachten und sie in der Form

$$y^m - 1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\cdot y^{\frac{m-n}{2}}\cdot(y^n-1) = 0 \tag{6}$$

zu schreiben, indem wir zu ihren Wurzeln die triviale Wurzel $y = 1$ hinzufügen.

Im folgenden wollen wir die Gleichung (6) als Kongruenz nach Primfaktoren von m, n, $m-n$ und 2 als Moduln betrachten.

---

[9]) P. Bachmann, loc. cit., S. 499.

2. Es sei p ein ungerader Primfaktor von m, so daß $m = p^k \cdot m_1$, $(m_1, p) = 1$ ist. Betrachten wir die Gleichung (6) modulo $\sqrt{p}$, so erhalten wir die Kongruenz

$$(y^m - 1) = y^{p^k \cdot m_1} - 1 \equiv (y^{m_1} - 1)^{p^k} \equiv 0 \pmod{\sqrt{p}}.$$

Nehmen wir als die erste Annäherung zur Lösung dieser Kongruenz die Zahl ε, die der *Gleichung* $(y^{m_1} - 1)^{p^k} = 0$ genügt, so erhalten wir für ε folgende Werte:

I. Irrationale m_1-te Einheitswurzeln; die Anzahl solcher Wurzeln ist gleich $(m_1 - 1) \cdot p^k$, wenn m_1 ungerade, und $(m_1 - 2) \cdot p^k$, wenn m_1 gerade ist.

II. Die p^k-fache Wurzel $+1$; hier wird auch die triviale Wurzel $+1$ mitgenommen.

III. Die p^k-fache Wurzel -1; hier wird auch die triviale Wurzel -1 mitgenommen.

Sodann setzen wir

$$y = \varepsilon + a \cdot p^\varrho,$$

wobei a eine zu p prime Zahl ist, in die Gleichung (6) ein; wir schreiben in der so erhaltenen Entwicklung nur diejenigen Glieder hin, die „niedrigste" sein können, d. h. deren Ordnungszahlen in bezug auf p nicht für jeden Wert von ϱ größer als die Ordnungszahlen anderer Glieder sind. Dabei beachten wir, daß die Binomialkoeffizienten $\binom{m}{s}$ $(s \leqq p^k)$ genau durch p^{k-l} teilbar sind, wenn s genau durch p^l teilbar ist. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\binom{m}{1}\varepsilon^{m-1} a\, p^\varrho + \ldots + \binom{m}{p}\varepsilon^{m-p} a^p p^{p\varrho} + \ldots + \binom{m}{p^2}\varepsilon^{m-p^2} \cdot a^{p^2} \cdot p^{p^2\varrho} + \ldots + \binom{m}{p^k}\varepsilon^{m-p^k} \cdot a^{p^k} \cdot p^{p^k\varrho}$$

$$- \sqrt{\frac{m}{n}} \left\{(\varepsilon^n - 1) + \binom{n}{1}\varepsilon^{n-1} a\, p^\varrho + \ldots\right\} \equiv 0 \pmod{\sqrt{p}}.$$

Nun wollen wir zwei Fälle unterscheiden:

I. ε ist eine Irrationalzahl. Dann ist wegen $(m, n) = 1$ oder $= 2$ $\varepsilon^n - 1 \neq 0$, so daß die Ordnungszahlen unserer Glieder sind

$$\boxed{k + \varrho,\ k - 1 + p\,\varrho,\ k - 2 + p^2\,\varrho,\ \ldots,\ 1 + p^{k-1} \cdot \varrho,\ p^k \cdot \varrho,\ k/2}$$

Die Werte von ϱ sind entweder gleich

$$\varrho = \frac{1}{p^{\lambda+1} - p^\lambda} \left(\frac{k}{2} < \lambda \leqq k\right) \tag{7}$$

oder gleich

$$\varrho = \frac{2\lambda - k}{2\, p^\lambda} \left(\frac{k}{2} < \lambda \leqq k\right) \text{ (Fig. 1).} \tag{8}$$

II. $\varepsilon = 1$ (und gleich $\varepsilon = -1$, wenn m und n gerade sind). Dann sind die Ordnungszahlen unserer Glieder gleich

$$\boxed{k + \varrho,\ k - 1 + p\varrho,\ k - 2 + p^2\varrho,\ \ldots,\ 1 + p^{k-1}\varrho,\ p^k,\ \frac{k}{2} + \varrho.}$$

Die Werte von ϱ sind entweder gleich

(9) $$\varrho = \frac{1}{p^{\lambda+1} - p^{\lambda}}$$

oder gleich

(10) $$\varrho = \frac{2\lambda - k}{2(p^{\lambda} - 1)} \quad \text{(Fig. 2).}$$

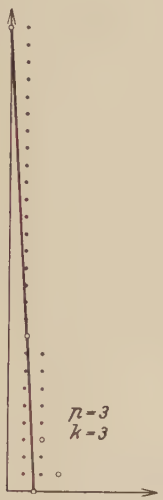


Fig. 1.

Fig. 2.

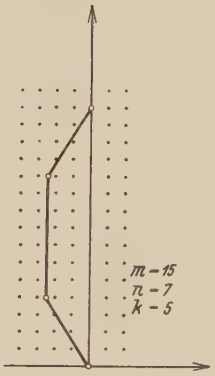


Fig. 3.

3. Nun gehe eine Primzahl q in n auf, so daß $n = q^{k_1} \cdot n_1$, $(n_1, q) = 1$ ist. Wir setzen $y = b\,q^{\varrho}$ in die Gleichung (6) ein, wobei b eine zu q relativ prime Zahl ist:

$$(b^m q^{m\varrho} - 1) - \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot (b^n q^{n\varrho} - 1) \cdot b^{\frac{m-n}{2}} q^{\frac{m-n}{2}\varrho} = 0.$$

Die Ordnungszahlen dieser Glieder sind

$$\boxed{m\varrho,\ 0,\ -\frac{k_1}{2} + \frac{m+n}{2}\varrho,\ -\frac{k_1}{2} + \frac{m-n}{2}\varrho.}$$

Die Werte von ϱ sind

(11) $$\varrho = \pm \frac{k_1}{(m-n)},$$

(12) $$\varrho = 0 \quad \text{(Fig. 3).}$$

Nehmen wir $\varrho = 0$, so ist b eine Wurzel der Kongruenz $(x^n - 1) \equiv 0 \pmod{\sqrt{q}}$, so daß wir $y = \varepsilon + a q^{\varrho}$ $(\varepsilon^n = 1)$ setzen und alle Überlegungen des Art. 2 wiederholen können. Auf diese Weise erhalten wir

I. Für $\varepsilon \neq \pm 1$

$$\varrho = \frac{1}{q^{\lambda+1} - q^{\lambda}}, \tag{13}$$

$$\varrho = \frac{2\lambda - k_1}{2q^{\lambda}}. \tag{14}$$

II. Für $\varepsilon = \pm 1$

$$\varrho = \frac{1}{q^{\lambda+1} - q^{\lambda}}, \tag{15}$$

$$\varrho = \frac{2\lambda - k_1}{2(q^{\lambda} - 1)}. \tag{16}$$

4. Es sei r ein ungerader Primfaktor von $m - n$, so daß $m - n = 2r^{k_2} \cdot s$, $(s, k_2) = 1$ ist. Dann gilt

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{1 + \frac{2r^{k_2}s}{n}} = 1 + \frac{r^{k_2}s}{n} - \frac{r^{2k_2}s^2}{2n^2} + \dots$$

Setzen wir dies in die Gleichung (6) ein, so erhalten wir

$$\left(y^{\frac{m+n}{2}} - 1\right)\left(y^{\frac{m-n}{2}} + 1\right) + \frac{r^{k_2} \cdot s}{n} y^{\frac{m-n}{2}} (y^n - 1) + \dots = 0.$$

Betrachten wir diese Gleichung modulo r, so gilt

$$\left(y^{\frac{m+n}{2}} - 1\right)\left(y^{r^{k_2}s} + 1\right) \equiv 0 \pmod{r}.$$

Der erste Faktor $y^{\frac{m+n}{2}} - 1$ der linken Seite hat modulo r keine mehrfache Wurzeln. Man kann demnach auf diesen Faktor das zweite Kriterium anwenden. Um den Grad der modulo r irreduziblen Faktoren von $y^{\frac{m+n}{2}} - 1$ zu bestimmen, beachten wir, daß nach dem Hilfssatz 3 das Polynom $y^{\frac{m+n}{2}} - 1$ dann und nur dann Faktoren vom Grade f enthält, wenn es mit dem Polynom $y^{r^f - 1} - 1$ einen gemeinsamen Teiler hat. Andererseits haben zwei Polynome $y^{\lambda} - 1$ und $y^{\mu} - 1$ den größten gemeinsamen Teiler $y^{\delta} - 1$, wobei δ der größte gemeinsame Teiler von λ und μ ist. Demnach müssen wir $\frac{m+n}{2}$ in Primfaktoren zerlegen und für jeden solchen Primfaktor π untersuchen, zu welchem Exponent r modulo π gehört. Sodann betrachten wir r modulo eines Produktes von zwei, drei usw. Faktoren von $\frac{m+n}{2}$.

Den zweiten Faktor $y^{r^{k_2} \cdot s} + 1$ kann man modulo r folgendermaßen darstellen:

$$(y^{r^{k_2} \cdot s} + 1) \equiv (y^s + 1)^{r^{k_2}} \pmod{r}.$$

Wir können also $y = \varepsilon + a r^{\varrho}$ setzen, wobei ε eine Wurzel der Gleichung $\varepsilon^n + 1 = 0$ ist. Dann erhalten wir

$$\left(\varepsilon^{\frac{m+n}{2}} + 1 + \frac{m+n}{2}\varepsilon^{\frac{m+n}{2}-1} a r^{\varrho} + \ldots\right)\left(\binom{r^{k_2}\cdot s}{1} \varepsilon^{r^{k_2}\cdot s - 1}\cdot a \cdot r^{\varrho} + \ldots\right.$$
$$\left. + \binom{r^{k_2}\cdot s}{r} \varepsilon^{r^{k_2} s - r}\cdot a^r \cdot r^{r\varrho} + \ldots + \binom{r^{k_2}\cdot s}{r^{k_2}} \varepsilon^{r^{k_2} s - r^{k_2}}\cdot a^{r^{k_2}} \cdot r^{r^{k_2}\varrho} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{r^{k_2} s}{n}\left(\varepsilon^{r^{k_2}} + \binom{r^{k_2} s}{1} \varepsilon^{r^{k_2} s - 1} a r^{\varrho} + \ldots\right)\left(\varepsilon^n - 1 + \binom{n}{1}\varepsilon^{n-1} a r^{\varrho} + \ldots\right) = 0.$$

Die Ordnungszahlen der „niedrigsten" Glieder sind

$$\boxed{k_2 + \varrho,\ k_2 - 1 + r\varrho,\ \ldots,\ r^{k_2}\varrho,\ \{k_2\},\ k_2 + \varrho.}$$

Die Ordnungszahl k_2 tritt dann und nur dann auf, wenn $\varepsilon^n - 1 \neq 0$ ist, d. h. wenn nicht $\varepsilon = -1$ ist. Der Koeffizient bei $r^{k_2+\varrho}$ ist gleich

$$\left(\varepsilon^{\frac{m+n}{2}} + 1\right)\varepsilon^{\frac{m-n}{2}-1}\cdot s\cdot a + \frac{s}{n}\varepsilon^{\frac{m-n}{2}} n\,\varepsilon^{n-1} a$$
$$= \varepsilon^{\frac{m-n}{2}-1} s a\left\{\varepsilon^{\frac{m+n}{2}} + 1 + \varepsilon^n\right\} = \varepsilon^{\frac{m-n}{2}-1} s a\left\{-\varepsilon^n + 1 + \varepsilon^n\right\} = \varepsilon^{\frac{m-n}{2}-1} s a,$$

d. h. ist nicht durch r teilbar.

I. $\varepsilon^n - 1 \neq 0$. Die Werte von ϱ sind

$$\varrho = \frac{1}{r^{\lambda-1}(r-1)}, \tag{17}$$

$$\varrho = \frac{1}{r}. \tag{18}$$

II. $\varepsilon^n - 1 = 0$. Dann sind die Werte von ϱ gleich

$$\varrho = \frac{1}{r^{\lambda-1}(r-1)} \quad (\lambda = 2, 3, \ldots, k_2), \tag{19}$$

$$\varrho = \frac{1}{r-1}. \tag{20}$$

5. Nun gehen wir zur Untersuchung der Gleichung (6) modulo 2 über. Man muß hier zwei Fälle unterscheiden:

A. m und n sind ungerade. Dann ist 2 innerhalb $K\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$ keine kritische Primzahl. Wir haben

$$y^m - 1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\, y^{\frac{m-n}{2}}(y^n - 1) \equiv \left(y^{\frac{m+n}{2}} - 1\right)\left(y^{\frac{m-n}{2}} - 1\right) \pmod 2.$$

Unter den Zahlen $\frac{m+n}{2}$, $\frac{m-n}{2}$ muß wegen $\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2} = m$ die eine gerade, die andere ungerade sein. Wir nehmen an, es sei $\frac{m+n}{2}$ ungerade. Um die Gerade der modulo 2 irreduziblen Teiler von $x^{\frac{m+n}{2}} - 1$ zu be-

stimmen, muß man erkennen, zu welchen Exponenten die Zahl 2 modulo π gehört, wobei die π die Primteiler von $\frac{m+n}{2}$ sind.

B. m und n sind gerade. Da $\frac{m-n}{2}$ ungerade sein muß, so ist die eine der Zahlen m, n genau durch 2, die andere durch eine höhere Potenz von 2, etwa durch $2^{\lambda+1}\,(\lambda > 0)$ teilbar. Es sei z. B. $m = 2^{\lambda+1} m_1$, $n = 2n$, wobei m_1, n_1 ungerade sind. Dann gilt

$$(y^{m_1} - 1)^{2^{\lambda+1}} \equiv 0 \pmod 2,$$

so daß in $y = \varepsilon + a\,2^{\varrho}$ die Größe ε eine m_1-te Einheitswurzel ist. Die Glieder der Entwicklung der linken Seite der Gleichung (6) sind

$$\lambda+1+\varrho,\ \lambda+2\varrho,\ \ldots,\ \lambda-1+2^2\varrho,\ \ldots,\ 1+2^{\lambda}\varrho,\ \ldots,\ 2^{\lambda+1}\varrho,\ \ldots,$$

$$\left\{\frac{\lambda}{2}\right\},\ \frac{\lambda}{2}+1+\varrho,\ \frac{\lambda}{2}+2\varrho.$$

Die Ordnungszahl $\lambda/2$ existiert nur, wenn $\varepsilon^n - 1 \neq 0$ ist.

I. $\varepsilon^n - 1 \neq 0$. Die Werte von ϱ sind

$$\varrho = \frac{1}{2^{\mu-1}}, \tag{21}$$

$$\varrho = \frac{\mu - \frac{\lambda}{2}}{2^{\mu}}. \tag{22}$$

II. $\varepsilon^n - 1 = 0$. Die Werte von ϱ sind

$$\varrho = \frac{1}{2^{\mu-1}}, \tag{23}$$

$$\varrho = \frac{\mu - \frac{\lambda}{2}}{2\,(2^{\mu}-1)} \text{ (Fig. 4).} \tag{24}$$

Fig. 4.

§ 3.

Untersuchung der Gleichung (6) bei ungeraden m, n.

1. Wir nehmen an, die Gleichung (6) besitze einen im Körper $K\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$ irreduziblen Teiler

$$g(y) = 0 \tag{25}$$

vom Grade u. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Gleichung durch Quadratwurzeln lösbar ist. Aus dem Hilfssatz 1 folgt, daß dazu notwendig ist, daß ihre Wurzeln für jeden Primmodul die Zahlen ϱ besitzen, in deren Nennern nur Potenzen von 2 vorkommen. Ist für eine ihrer Wurzeln $\varrho = \frac{r}{s}$, $(r, s) = 1$, so gibt es s konjugierte Wurzeln, die, wie wir sagen wollen, einen s-gliedrigen Wurzelzyklus erster

Art bilden. Ist s eine Potenz von 2, so nennen wir den entsprechenden Wurzelzyklus *günstig*.

Ganz ebenso schließen wir aus dem Hilfssatz 2 folgendes. Hat $g(y)$ einen modulo p irreduziblen Teiler vom Grade f, so sagen wir, daß ihre Wurzeln einen f-gliedrigen Wurzelzyklus zweiter Art bilden. Dann gilt der

Satz 1. *Damit die Gleichung* (25) *durch Quadratwurzeln lösbar sei, ist notwendig, daß ihre Wurzeln lauter günstige Zyklen nach jedem Primmodul bilden. Dann muß sein:*

$$u = 2^{\alpha} + 2^{\alpha'} + \ldots, \tag{26}$$

wobei $2^{\alpha}, 2^{\alpha'}, \ldots$ *die Ordnungen der Wurzelzyklen bedeuten. Für jeden Primmodul muß* u *eine Zerlegung vom Typus (26) besitzen.*

2. Es seien m und n ungerade. Es sei p ein Primfaktor von m, so daß $m = p^k m_1$, $(m_1, p) = 1$ ist. Die Zyklen von (6) modulo p sind wegen (7), (8), (9) und (10) von den Ordnungen

$$p^{\lambda}\frac{p-1}{2},\ p^{\lambda},\ p^{\lambda}\frac{p-1}{2},\ \frac{p^{\lambda}-1}{(p^{\lambda}-1,\ 2\lambda-k)}$$

(wir nehmen in Betracht, daß die Primzahl p im Körper $K\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)$ kritisch ist, so daß die Ordnung $p^{1/2}$ im Rationalitätsbereich vorkommt). Von diesen Ordnungen kann nur die letzte eine Potenz von 2 sein, so daß nur der ihr entsprechende Wurzelzyklus allein günstig sein kann. Wir wollen untersuchen, wann er in der Tat günstig ist. Dann muß die Zahl $\frac{2\lambda-k}{2(p^{\lambda}-1)}$ $\left(\frac{k}{2} < \lambda \leqq k\right)$ nach Reduktion nur Potenzen von 2 im Nenner enthalten. Wir betrachten zwei Fälle:

I. λ enthalte einen ungeraden Faktor t: $\lambda = t\lambda_1$. Dann gilt

$$\frac{2\lambda-k}{2(p^{\lambda}-1)} = \frac{2\lambda-k}{2(p^{\lambda_1}-1)(p^{\lambda_1(t-1)}+p^{\lambda_1(t-2)}+\ldots+p^{\lambda_1}+1)}.$$

Die Zahl $p^{\lambda_1(t-1)} + p^{\lambda_1(t-2)} + \ldots + p^{\lambda_1} + 1$ ist ungerade und bei $p > 2$ größer als $t + 2\lambda$ und also a fortiori als $2\lambda - k$. Demnach kann man diesen ungeraden Faktor des Nenners nicht mit Hilfe des Zählers aufheben, so daß dieser Fall ungünstig ist.

II. λ ist eine Potenz von 2: $\lambda = 2^{\alpha}$. Dann kann man die Zahl $\frac{2\lambda-k}{2(p^{\lambda}-1)}$ folgendermaßen darstellen:

$$\frac{2\lambda-k}{2(p^{2^{\alpha}}-1)} = \frac{2\lambda-k}{2(p^{2^{\alpha-1}}+1)(p^{2^{\alpha-2}}+1)\ldots(p^2+1)(p+1)(p-1)}. \tag{27}$$

Der Nenner besteht aus $\alpha + 1$ Faktoren, die auch ungerade Primteiler enthalten können. Sind mindestens zwei dieser Faktoren von den ungeraden Primfaktoren frei, so gilt:

$$p^{2^{\beta}} + 1 = 2^{\xi},\ p^{2^{\gamma}} \pm 1 = 2^{\eta} \quad (\beta > \gamma,\ \xi > \eta)$$

(das Minuszeichen gilt nur im Falle $\gamma = 0$). Daraus folgt, daß $p^{2^\beta} + 1$ durch $p^{2^\gamma} \pm 1$ teilbar ist. Da aber $p^{2^\beta} - 1 = (p^{2^\gamma})^{2^{\beta-\gamma}} - 1$ durch $p^{2^\gamma} \pm 1$ teilbar ist, so ist auch $2 = (p^{2^\beta} + 1) - (p^{2^\beta} - 1)$ durch $p^{2^\gamma} \pm 1$ teilbar. Das kann nur im Falle

$$p^{2^\gamma} - 1 = 2, \; p = 3, \; \gamma = 0$$

eintreten.

Ist $p = 3$, so ist

$$(3^{2^\alpha} - 1)(3^{2^{\alpha-1}} + 1)(3^{2^{\alpha-2}} + 1) \ldots (3^2 + 1)(3 + 1)(3 - 1)$$

wegen

$$3^{2^s} + 1 \equiv g^s + 1 \equiv 2 \pmod 4$$

genau durch $2^{\alpha+2}$ teilbar. Der Quotient $\frac{3^{2^\alpha} - 1}{2^{\alpha+2}}$ soll als ungerader Faktor des Nenners ein Faktor von $2\lambda - k$ sein, woraus folgt:

$$\frac{3^{2^\alpha} - 1}{2^{\alpha+2}} \leqq 2\lambda - k,$$

oder wegen $2\lambda - k \leqq \lambda = 2^\alpha$:

$$3^{2^\alpha} \leqq 2^{2^\alpha + 2} + 1, \tag{28}$$

woraus folgt:

$$2^\alpha \leqq 2\alpha + 2, \text{ d. h. } \alpha \leqq 2.$$

Der Wert $\alpha = 2$ befriedigt aber die Ungleichung (28) nicht:

$$3^{2^2} > 2^{2 \cdot 2 + 2} + 1.$$

Demnach sind nur die Werte $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ zulässig. Ist $\alpha = 0$, so ist $\lambda = 1$, $k = 1$. Ist $\alpha = 1$, so ist $\lambda = 2$, $k \leqq 3$. Wir haben also hier zwei Möglichkeiten:

$$\text{A) } p^k = 27, \; \varrho = \tfrac{1}{16}; \quad \text{B) } p^k = 9, \; \varrho = \tfrac{1}{8}.$$

Sind alle Faktoren des Nenners in (27) (eventuell bis auf einen) durch ungerade Primfaktoren teilbar, die sämtlich auch im Zähler enthalten sind, so muß $2\lambda - k$ wenigstens α ungerade Faktoren enthalten. Jeder dieser Faktoren ist mindestens gleich 3, so daß

$$2\lambda - k \geqq 3^\alpha$$

ist. Da andererseits wegen $k \geqq \lambda$ die Ungleichung $2\lambda - k \leqq \lambda = 2^\alpha$ gilt, so kommen wir zur Ungleichung

$$2^\alpha \geqq 3^\alpha,$$

die nur im Falle $\alpha = 0$ möglich ist.

III. $\lambda = 1$, $k = 1$. Dann muß $\varrho = \frac{1}{2(p-1)}$ nur Potenzen von 2 im Nenner haben. Daraus folgt, daß p eine sogenannte Gaußsche Primzahl ist, d. h. die Form $2^s + 1$ hat.

3. Nun fragen wir uns nach dem Grade u der irreduziblen Gleichung (25). Da die günstigen Wurzelzyklen für ϱ den Wert (10) haben, d. h. dem Werte $\varepsilon = 1$ entsprechen, während die Kongruenz

$$y^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

die Wurzel $y = 1$ p^k-fach enthält und die Gleichung (6) die triviale Wurzel $y = 1$ hat, so kann u nicht größer als $p^k - 1$ sein. Ist andererseits $k = 1$, so hat ϱ den Wert $\frac{1}{2(p-1)}$, so daß der Grad der irreduziblen Gleichung, deren die diesem Werte von ϱ entsprechende Wurzel genügt, mindestens gleich $p - 1$ ist, da die erzeugende Zahl $\sqrt{\frac{m}{n}}$ des Rationalitätsbereichs die Ordnung $\frac{1}{2}$ in bezug auf p hat. Somit ist $u = p - 1$.

Ist $p = 3$, $k = 2$, so ist $\varrho = \frac{1}{p^k - 1}$. Da aber die Primzahl 3 nicht kritisch ist, so ist auch hier $u \geqq p^k - 1$. Demnach ist in diesen Fällen

$$u = p^k - 1. \tag{29}$$

Ist aber $p = 3$, $k = 3$, so kann man aus der Fig. 2 ablesen, daß die dem Wert $\varepsilon = 1$ entsprechenden Wurzeln einen 8-gliedrigen Zyklus und zwei 9-gliedrige Zyklen bilden. Somit gilt im günstigen Fall:

$$u = 8. \tag{30}$$

Die Formel (29) lehrt uns, daß m keine zwei verschiedene Primfaktoren enthält. Denn ist $m = p^k \cdot p_1^{k_1} \ldots$, so ist

$$u = p^k - 1 = p_1^{k_1} - 1,$$

woraus folgt: $p = p_1$. Ist aber m durch 27 teilbar, so ist $u = 8$. Ist p_1 ein anderer Primfaktor von m, so ist $8 = p_1^{k_1} - 1$, d. h. $p_1^{k_1} = 9$, p_1 ist also nicht von $p = 3$ verschieden. Somit haben wir in allen Fällen

$$m = p^k. \tag{31}$$

4. Nun betrachten wir die Entwicklung von Wurzeln nach Potenzen von q, wobei q ein Primfaktor von n ist. Die dazu gehörigen Wurzelzyklen sind den p-Wurzelzyklen ähnlich; noch außerdem gibt es zwei $\frac{m-n}{2}$-gliedrige q-Wurzelzyklen. Wir wollen hier zwei Fälle unterscheiden:

I. Ist $m - n$ keine Potenz von 2, so sind die $\frac{m-n}{2}$-gliedrigen Zyklen nicht günstig. Die günstigen Zyklen entsprechen also den Wert $\varrho = \frac{2\lambda - k_1}{2(q^\lambda - 1)}$; es ist demnach $u = q^{k_1} - 1$, d. h. $p = q$, was unmöglich ist, da m und n relativ prim sind. Im Falle $p^k = 27$, $u = 8$ ist das auch unmöglich, da hier $q^{k_1} = 9$ ist, m und n sind also nicht relativ prim.

II. $m-n=2^s$. Dann entsprechen die Wurzeln der Gleichung (25) entweder A) den Werten $\varrho=\pm\frac{k}{m-n}$, oder B) sowohl den Werten $\varrho=\frac{2\lambda-k_1}{2(q^\lambda-1)}$ wie auch den Werten $\varrho=\pm\frac{k}{m-n}$.

A. Im ersten Falle ist entweder $u=m-n$ oder $u=\frac{m-n}{2}$. Ist $m\neq 27$, so ist entweder $n=1$ oder $m-1=\frac{m-n}{2}$, was wegen $n\geqq 1$ unmöglich ist. Ist aber $m=27$, so ist entweder $n=m-u=19$ oder $n=m-2u=11$.

1. $n=1$, $k=1$, $p=1+2^s$. Die Gleichung (6) zerfällt modulo 2 folgendermaßen:

$$\left(y^{\frac{p+1}{2}}-1\right)\left(y^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\equiv 0 \pmod 2.$$

Da hier $u=m-1$ ist, so müssen im günstigen Falle alle Wurzelzyklen günstig sein. Wir fassen den Faktor $\varphi(y)=y^{\frac{p+1}{2}}-1$ ins Auge. Er hat modulo 2 keine mehrfache Wurzeln, da

$$\varphi'(y)=\frac{p+1}{2}y^{\frac{p-1}{2}}\equiv y^{\frac{p-1}{2}} \pmod 2$$

im Falle $p\equiv 1 \pmod 4$ zu $\varphi(y)$ prim ist. Es ist bekannt[9]), daß jedes modulo 2 irreduzible Polynom k-ten Grades Teiler des Polynoms $y^{2^k}-y$ und keines anderen Polynoms vom Typ $y^{2^{k_1}}-y$ $(k_1<k)$ ist. Wären alle modulo 2 irreduziblen Teiler des Polynoms $\varphi(y)$ von den Graden 2^w, so würde das kleinste Polynom vom Typ $y^{2^l}-y$, welches durch $\varphi(y)$ teilbar ist, den Exponenten l von der Form 2^t haben. Das Polynom $y^{2^l}-y=y(y^{2^l-1}-1)$ ist aber dann und nur dann durch das Polynom $\varphi(y)=y^{2^{s-1}+1}-1\left(\frac{p+1}{2}=2^{s-1}+1\right)$ teilbar, wenn 2^l-1 durch $2^{s-1}+1$ teilbar ist. Nun ist $2^{2(s-1)}-1$ durch $2^{s-1}+1$ teilbar. Andererseits kann l nicht kleiner als $2s-2$ sein, da man in diesem Falle $l=\varepsilon(s-1)+r$, $\varepsilon=0$ oder $=1$, $r<s-1$ setzen könnte. Dann würde gelten:

$$2^l-1=2^{\varepsilon(s-1)+r}-1\equiv\pm 2^r-1 \pmod{2^{s-1}+1},$$

was die Teilbarkeit von 2^l-1 durch $2^{s-1}+1$ ausschließt, da $2^r\mp 1$ kleiner als $2^{s-1}+1$ ist.

Somit ist $l=2s-2$. Unsere Bedingung verlangt, daß $l=2^t$ ist. Andererseits kann $p=2^s+1$ nur dann eine Primzahl sein, wenn s die Gestalt 2^α hat. Es gilt also

$$2^t=2\cdot 2^\alpha-2,$$

d. h.

$$2^{t-1}=2^\alpha-1.$$

[9]) Vgl. z. B. Bachmann, loc. cit., S. 99 (56).

Diese Gleichung kann nur bei $t - 1 = 0$ gelten. Dann erhalten wir

$$\alpha = 1,\ s = 2^\alpha = 2,\ p = 2^2 + 1 = 5.$$

Dazu kann man auch den Fall $p = 3$ hinzufügen, in welchem $2s - 2 = 0$ ist, Alle anderen Fälle $m = p$, $n = 1$ sind nicht günstig.

2. $m = 9$, $n = 1$. Die Gleichung

$$\frac{x^9 - 1}{x - 1} \pm 3x^4 \frac{x - 1}{x - 1} = 0,$$

d. h.

$$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + (1 \pm 3)x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \tag{32}$$

ist reziprok und darum verwandelt sich mittels der Transformation

$$x + \frac{1}{x} = z$$

in die Gleichung

$$z^4 + z^3 - 3z^2 - 2z + (1 \pm 3) = 0. \tag{33}$$

Sind z_1, z_2, z_3, z_4 die Wurzeln dieser Gleichung, so genügt die Größe $u = z_1 z_2 + z_3 z_4$ der kubischen Gleichung

$$u^3 + 3u^2 + (-6 \mp 12)u - 17 \mp 39 = 0, \tag{34}$$

die dann und nur dann rationale Wurzeln hat, wenn die Gleichung (33) (und also (32)) durch Quadratwurzeln lösbar ist. Nehmen wir in der Gleichung (34) das obere Zeichen, so besitzt diese Gleichung die rationale Wurzel $u = -4$. Daraus schließt man leicht, daß die Gleichung (33) folgende Zerlegung zuläßt:

$$(z^2 - \varepsilon z - 2)(z - \varepsilon^2 z - 2) = 0,$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ ist. Demnach ist dieser Fall günstig, d. h. die Gleichung (32) ist bei oberem Zeichen durch Quadratwurzeln lösbar. Dieser Lösung entspricht aber kein Kreisbogenzweieck, da sämtliche Wurzeln $z = x + \frac{1}{x} = 2\cos\Theta$ der Gleichung (33) imaginär sind.

Bei unterem Zeichen besitzt die Gleichung (34) keine rationale Wurzel.

3. $m = 27$, $n = 19$. Dann haben wir

$$(y^{23} - 1)(y^4 - 1) \equiv 0 \pmod 2.$$

Um zu erkennen, auf welche modulo 2 irreduzible Faktoren das Prolynom $y^{23} - 1$ modulo 2 zerfällt, müssen wir den kleinsten Exponent f finden, bei welchem $y^{2^f} - y$ durch $y^{23} - 1$ teilbar ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß gilt:

$$2^f \equiv 1 \pmod{23}.$$

Man findet leicht: $f = 11$. Daraus schließen wir, daß in diesem Falle die Wurzelzyklen 2. Art modulo 2 die Grade 1, 1, 1, 1, 1, 11, 11 haben. Der Grad $u = 8$ kann aus diesen Graden nicht zusammengestellt werden.

4. $m = 27$, $n = 11$. Die Wurzelzyklen modulo 3 haben die Grade 9, 9, 8, 1, und modulo 11 die Grade 8, 10, 8, 1. Die Gleichung (25) muß im günstigen Fall den Grad $u = 8$ haben. Dann entsprechen ihre Wurzeln modulo 11 einem der 8-gliedrigen Zyklen, für welchen der Wert von ϱ entweder positiv oder negativ ist. Die Gleichung (6) ist aber reziprok; haben die Wurzeln ihres Faktors $g(y)$ modulo 11 etwa positiven Wert von ϱ, so haben die Wurzeln des Polynoms $y^8 g\left(\frac{1}{y}\right)$, welches ebenfalls in der Gleichung (6) als Faktor auftritt, negativen Wert von ϱ und ist also zu $g(y)$ relativ prim. Daraus folgt, daß die Gleichung (6) zwei Faktoren achten Grades mit Koeffizienten aus $K\left(\sqrt{\frac{27}{11}}\right)$ enthält. Das widerspricht aber der Tatsache, daß die Wurzelzyklen der Gleichung (6) modulo 3 die Grade 9, 9, 8, 1 haben. Der Fall $m = 27$, $n = 11$ ist also ungünstig.

B. In diesem Falle müssen die q den Bedingungen von § 2 · 3 gehorchen, so daß wir nur folgende Unterfälle haben:

1. $m = p = 1 + 2^{2^\alpha}$, $n = q = 1 + 2^{2^\beta}$. Dann ist $2^{2^\alpha} = 2^{2^\beta} + 2^s$ woraus folgt:

$$s = 2^\beta,\ 2^{2^\alpha} = 2 \cdot 2^{2^\beta},\ 2^\alpha = 1 + 2^\beta,\ \beta = 0,\ \alpha = 1,\ p = 5,\ q = 3.$$

Diesen Fall erwähnt schon Clausen (loc. cit.).

2. $m = 9$, $n = 9$, $9 - q = 2^s$. Dann ist $q = 5$, d. h. $m = 9$, $n = 5$. Die Gleichung (6) zerfällt modulo 2 folgendermaßen:

$$(y^7 - 1)(y^3 - 1) \equiv 0 \pmod 2.$$

Das Polynom $y^7 - 1$ zerfällt modulo 2 in die modulo 2 irreduzible Polynome von den Graden 1, 3, 3, was der Tatsache widerspricht, daß hier $u = 9 - 1 = 8$ ist.

3. $m = p$, $n = 9$, $2^{2^\alpha} + 1 = 2^3 + 1 + 2^s$, $s = 3$, $\alpha = 2$, $p = 17$. Daraus folgt: $m = 17$, $n = 9$. Die Gleichung (6) zerfällt modulo 2 folgendermaßen:

$$(y^{13} - 1)(y^4 - 1) \equiv 0 \pmod 2.$$

Da 2 modulo 13 zum Exponent 12 gehört, so zerfällt diese Gleichung modulo 2 in die modulo 2 irreduziblen Faktoren von den Graden 12, 1, 1, 1, 1, 1. Das widerspricht aber der Tatsache, daß hier $u = 17 - 1 = 16$ ist.

4. $m = 27$, $n = q$. Dann ist $27 = 2^{2^\beta} + 1 + 2^s$, $2^s + 2^{2^\beta} = 26$. Daraus folgt wegen $26 \equiv 2 \pmod 4$ entweder $s = 1$ oder $2^\beta = 1$.

Die beiden Fälle sind unmöglich, da die Zahl $26 - 2 = 24$ keine Potenz von 2 ist.

5. $m = p$, $n = 27$. Dann ist $2^{2^\alpha} + 1 = 2^s + 27$, $2^{2^\alpha} - 2^s = 26$, $s = 1$, $2^{2^\alpha} = 28$, was wieder unmöglich ist.

Liegt der Fall B vor, so kann n auch aus verschiedenen Primfaktoren bestehen. Das gibt uns folgende Unterfälle:

6. $m = p$, $n = q^{k_1} \cdot q_1 \cdot q_2 \ldots$ In diesem Falle ist $u = p - 1$, d. h. die Gleichung (25) umfaßt alle Wurzelzyklen, welche modulis q, q_1, $q_2 \ldots$ nicht sämtlich günstig sind. Der Fall ist also ungünstig.

7. $m = 3^k$, $n = q^{k_1} \cdot q_1 \cdot q_2 \ldots$ In diesem Falle ist $m < n$ (der kleinste Wert von n ist $5 \cdot 7 = 35$), was unseren Bedingungen widerspricht.

(Eingegangen am 20. Februar 1933.)

Untersuchungen über das logische Schließen*). I.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

Übersicht.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf den Bereich der Prädikatenlogik [bei H.-A.[1]) „engerer Funktionenkalkül" genannt]. Diese umfaßt solche Schlüsse, die in allen Teilen der Mathematik immerzu gebraucht werden. Was noch zu ihnen hinzukommt, sind Axiome und Schlußweisen, die man den einzelnen Zweigen der Mathematik selbst zurechnen kann, z. B. in der elementaren Zahlentheorie die Axiome der natürlichen Zahlen, der Addition, Multiplikation und Potenzierung, sowie der Schluß der vollständigen Induktion; in der Geometrie die geometrischen Axiome.

Neben der klassischen Logik werde ich ferner die intuitionistische Logik behandeln, wie sie z. B. von Heyting[2]) formalisiert worden ist.

Die vorliegenden Untersuchungen über die klassische und intuitionistische Prädikatenlogik zerfallen im wesentlichen in zwei nur lose zusammenhängende Teile.

1. Mein erster Gesichtspunkt war folgender: Die Formalisierung des logischen Schließens, wie sie insbesondere durch Frege, Russell und Hilbert entwickelt worden ist, entfernt sich ziemlich weit von der Art des Schließens, wie sie in Wirklichkeit bei mathematischen Beweisen geübt wird. Dafür werden beträchtliche formale Vorteile erzielt. Ich wollte nun zunächst einmal einen Formalismus aufstellen, der dem wirklichen Schließen möglichst nahe kommt. So ergab sich ein „Kalkül des natürlichen Schließens". („NJ" für die intuitionistische, „NK" für die klassische Prädikatenlogik.) Es zeigte sich dann weiter, daß der Kalkül gewisse besondere Eigenschaften hat, und zwar nimmt im Hinblick auf diese der von den Intuitionisten abgelehnte „Satz vom ausgeschlossenen Dritten" eine Sonderstellung ein.

Den Kalkül des natürlichen Schließens werde ich im II. Abschnitt der vorliegenden Abhandlung entwickeln, und einige Betrachtungen darüber anfügen.

---

*) Diese Arbeit, einschließlich des II. Teils, ist von der Math.-Nat. Fakultät der Universität Göttingen als Inaugural-Dissertation angenommen worden.

[1]) Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. Im folgenden stets als H.-A. zitiert.

[2]) A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik und Mathematik, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. 1930. S. 42—65.

2. Eine nähere Untersuchung der besonderen Eigenschaften des natürlichen Kalküls führte mich schließlich zu einem sehr allgemeinen Satz, den ich im folgenden „Hauptsatz“ nennen will.

Der Hauptsatz[3]) besagt, daß sich jeder rein logische Beweis auf eine bestimmte, übrigens keineswegs eindeutige, Normalform bringen läßt. Die wesentlichsten Eigenschaften eines solchen Normalbeweises lassen sich etwa so ausdrücken: Er macht keine Umwege. Es werden in ihm keine Begriffe eingeführt, welche nicht in seinem Endergebnis enthalten sind und daher zu dessen Gewinnung notwendig verwendet werden müssen.

Der Hauptsatz gilt sowohl für die klassische als auch für die intuitionistische Prädikatenlogik.

Um ihn in bequemer Form aussprechen und beweisen zu können, mußte ich einen besonders dafür passenden logischen Kalkül zugrunde legen. Hierzu erwies sich der natürliche Kalkül nicht als geeignet. Zwar weist er schon die für die Gültigkeit des Hauptsatzes wesentlichen Eigenschaften auf, doch nur in seiner intuitionistischen Form, während der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wie schon bemerkt, im Hinblick auf diese Eigenschaften eine Sonderstellung einnimmt.

Im III. Abschnitt der vorliegenden Abhandlung werde ich also einen weiteren Kalkül des logischen Schließens entwickeln, welcher alle gewünschten Eigenschaften sowohl in seiner intuitionistischen als auch in seiner klassischen Form besitzt. („LJ“ für die intuitionistische, „LK“ für die klassische Prädikatenlogik). An Hand dieses Kalküls wird dann der Hauptsatz ausgesprochen und bewiesen.

Der Hauptsatz gestattet mannigfache Anwendungen. Als Beispiele dafür werde ich im IV. Abschnitt ein Entscheidungsverfahren für die intuitionistische Aussagenlogik entwickeln (IV, § 1), sowie einen neuen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der klassischen Arithmetik mit Ausschluß der vollständigen Induktion geben (IV, § 3).

Der III. und IV. Abschnitt können unabhängig vom II. Abschnitt gelesen werden.

3. Der I. Abschnitt enthält eine Festsetzung der in dieser Abhandlung verwendeten Bezeichnungsweisen.

Im V. Abschnitt beweise ich die Äquivalenz der von mir aufgestellten logischen Kalküle NJ, NK und LJ, LK mit einem den Formalismen von Russell, Hilbert und Heyting angeglichenen (und mit diesen unschwer vergleichbaren) Kalkül. („LHJ“ für die intuitionistische, „LHK“ für die klassische Prädikatenlogik).

---

[3]) Ein wichtiger Spezialfall des Hauptsatzes wurde bereits von Herbrand auf völlig anderem Wege bewiesen. Näheres darüber siehe IV. Abschn., § 2.

4. Der vorliegende I. Teil enthält nur den I. bis III. Abschnitt, der IV. und V. Abschnitt folgen in einem II. Teil nach.

I. Abschnitt.

Bezeichnungsfestsetzung.

Den Begriffen „Gegenstand", „Funktion", „Prädikat", „Aussage", „Satz", „Axiom", „Beweis", „Schluß" usw. in der Logik und Mathematik entsprechen in deren Formalisierung gewisse Zeichen bzw. Zeichenkombinationen. Wir teilen diese ein in:

1. *Zeichen.*

2. *Ausdrücke*, das sind endliche Zeichenreihen.

3. *Figuren*, das sind irgendwie angeordnete endliche Mengen von Zeichen.

Zeichen gelten als spezielle Ausdrücke und Figuren, Ausdrücke als spezielle Figuren.

In der vorliegenden Arbeit werden wir Zeichen, Ausdrücke und Figuren folgender Art betrachten:

1. Zeichen:

Diese zerfallen in Zeichen für Bestimmtes und Variable.

1.1. Zeichen für Bestimmtes:

Zeichen für bestimmte Gegenstände: 1, 2, 3, ...

Zeichen für bestimmte Funktionen: $+$, $-$, $\cdot$.

Zeichen für bestimmte Aussagen: $\bigvee$ („die richtige Aussage"), $\bigwedge$ („die falsche Aussage").

Zeichen für bestimmte Prädikate: $=$, $<$.

Logische Zeichen[4]*:* & „und", $\vee$ „oder", $\supset$ „aus ... folgt", $\supset\subset$ „ist äquivalent", $\neg$ „nicht", $\forall$ „für alle", $\exists$ „es gibt ein".

Wir gebrauchen auch die Benennungen: Und-Zeichen, Oder-Zeichen, Folgt-Zeichen, Äquivalenz-Zeichen, Nicht-Zeichen, All-Zeichen, Es-gibt-Zeichen.

---

[4]) Wir übernehmen die Zeichen $\vee$, $\supset$, $\exists$ von Russell. Die Russellschen Zeichen für „und", „äquivalent", „nicht", „alle", nämlich $\cdot$, $\equiv$, $\sim$, ( ), werden bereits in der Mathematik in anderer Bedeutung gebraucht. Wir nehmen daher das Hilbertsche &, während für Hilberts Äquivalenz-, All- und Nicht-Zeichen $\sim$, ( ), $\bar{\ }$, ebenfalls schon andere Bedeutungen üblich sind. Das Nicht-Zeichen stellt außerdem eine Abweichung von der linearen Anordnung der Zeichen dar, die für manche Zwecke unangenehm ist. Wir verwenden daher für Äquivalenz und Verneinung die Zeichen von Heyting, und als All-Zeichen ein dem $\exists$ entsprechendes Zeichen.

Hilfszeichen:)(, →.

1.2. Variable:

Gegenstandsvariable. Diese teilen wir ein in *freie* Gegenstandsvariable: a, b, c, ..., m und *gebundene* Gegenstandsvariable: n, ..., x, y, z.

Aussagenvariable: A, B, C, ...

Es sollen beliebig viele Variable zur Verfügung stehen; wenn das Alphabet nicht ausreicht, werden Zahlenindizes angefügt, z. B. a_7, C_3.

1.3. Deutsche und griechische Buchstaben dienen uns als „Mitteilungszeichen", sind also keine Zeichen der formalisierten Logik, sondern Variable unserer Betrachtungen über diese. Ihre Bedeutung wird jeweils bei Gebrauch erklärt werden.

2. Ausdrücke.

2.1. Begriff des Aussageausdrucks, kurz *Formel* genannt (induktiv erklärt):

(Der Begriff Formel wird sonst gewöhnlich in allgemeinerer Bedeutung gebraucht; den im folgenden erklärten Spezialfall würde man dann etwa als „rein logische Formel" bezeichnen können.)

2.11. Ein Zeichen für eine bestimmte Aussage ist eine Formel. Das sind die Zeichen $\bigvee$ und $\bigwedge$.

Eine Aussagenvariable mit einer Anzahl von freien Gegenstandsvariablen dahinter (eventuell auch keinen) ist eine Formel. Z. B. $A\,b\,a\,b$.

Die Gegenstandsvariablen heißen die *Argumente* der Aussagenvariablen.

Formeln der genannten zwei Arten nennen wir auch *Elementarformeln.*

2.12. Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $\neg\,\mathfrak{A}$ eine Formel.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Formeln, so sind auch $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Formeln.

(Das Zeichen $\supset\subset$ wollen wir für unsere Betrachtungen nicht zulassen, es ist ja überflüssig, da $\mathfrak{A} \supset\subset \mathfrak{B}$ als Abkürzung für $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})\,\&\,(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$ angesehen werden kann.).

2.13. Aus einer Formel, in der die gebundene Gegenstandsvariable $\mathfrak{x}$ nicht vorkommt, entsteht wieder eine Formel, wenn man $\forall\,\mathfrak{x}$ bzw. $\exists\,\mathfrak{x}$ davor setzt, zugleich darf man eine in der Formel vorkommende freie Gegenstandsvariable an einigen Stellen durch $\mathfrak{x}$ ersetzen.

2.14. Durch Klammern ist dafür zu sorgen, daß der Aufbau einer Formel eindeutig ersichtlich ist. Beispiel einer Formel:

$$\exists\,x\big(((\neg\,A\,b\,x\,a) \vee B\,x) \supset (\forall\,z(A\,\&\,B))\big).$$

Durch besondere Abmachungen kann man Klammern sparen; wir verzichten darauf (mit einer Ausnahme, s. 2.4), da wir nicht viele Formeln hinzuschreiben haben.

2.2. Als *Grad einer Formel* bezeichnen wir die Anzahl der in ihr vorkommenden logischen Zeichen. (Eine Elementarformel hat also den Grad 0.)

Als *äußerstes Zeichen einer Formel*, die keine Elementarformel ist, bezeichnen wir dasjenige logische Zeichen, das bei ihrem Aufbau gemäß 2.12 und 2.13 als letztes hinzugefügt würde.

Als *Teilformeln einer Formel* bezeichnen wir diejenigen Formeln, welche bei ihrem Aufbau gemäß 2.12 und 2.13 auftreten konnten, sie selbst eingeschlossen.

Beispiel: Die Teilformeln von $A \,\&\, \forall x\, B x a$ sind A, $\forall x\, B x a$, $A \,\&\, \forall x\, B x a$, sowie alle Formeln der Gestalt $B\mathfrak{a}a$, wobei für $\mathfrak{a}$ eine beliebige freie Gegenstandsvariable steht (z. B. kann dies auch a sein). Der Grad von $A \,\&\, \forall x\, B x a$ ist 2, das äußerste Zeichen &.

2.3. Begriff der *Sequenz*:

(Dieser wird erst im III. Abschnitt gebraucht, und der Zweck seiner Einführung wird auch erst dort deutlich.)

Eine Sequenz ist ein Ausdruck der Form

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$

wobei für $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ beliebige Formeln stehen dürfen. (Das $\to$ gilt ebenso wie die Kommata als Hilfszeichen und nicht etwa als logisches Zeichen.)

Die Formeln $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ bilden das *Antezedens*, die Formeln $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ das *Sukzedens* der Sequenz. Beide Ausdrücke dürfen leer sein.

2.4. Die Sequenz $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ bedeutet inhaltlich genau dasselbe wie die Formel

$$(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu).$$

(Mit $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\, \mathfrak{A}_3$ meinen wir $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2) \,\&\, \mathfrak{A}_3$, entsprechend für $\vee$.)

Ist das Antezedens leer, so ist die Formel $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu$ gemeint.

Ist das Sukzedens leer, so bedeutet die Sequenz dasselbe wie die Formel $\neg (\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu)$ oder $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \bigwedge$.

Sind beide leer, so bedeutet die Sequenz dasselbe wie $\bigwedge$, also eine falsche Aussage.

Umgekehrt gibt es auch zu jeder Formel eine äquivalente Sequenz, z. B. die, deren Antezedens leer ist und deren Sukzedens nur aus der Formel besteht.

Die Formeln, aus denen eine Sequenz besteht, nennen wir *S-Formeln* (d. h. Sequenzformeln), womit wir zum Ausdruck bringen wollen, daß wir nicht die Formel als solche meinen, sondern verbunden mit ihrer Stellung in der Sequenz. So sagen wir z. B.:

„Eine Formel kommt in einer Sequenz an mehreren Stellen als S-Formel vor“,

was wir auch so ausdrücken können:

„Mehrere verschiedene (was nur heißen soll: an verschiedener Stelle in der Sequenz stehende) S-Formeln sind formal gleich.“

3. Figuren.

Wir brauchen Schlußfiguren und Beweisfiguren.

Solche bestehen aus Formeln oder auch aus Sequenzen; wir wollen im folgenden (3.1 bis 3.3, 3.5) nur von Formeln reden, es gilt aber alles analog für Sequenzen, man hat dann nur das Wort Formel überall durch das Wort Sequenz zu ersetzen.

3.1. Eine *Schlußfigur* läßt sich in der Form schreiben:

$$\frac{\mathfrak{A}_1 \quad \dots \quad \mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{B}} \qquad (\nu \geqq 1),$$

wobei $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}$ Formeln sind. $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_\nu$ heißen dann die *Oberformeln*, $\mathfrak{B}$ heißt die *Unterformel* der Schlußfigur.

(Ganz entsprechend sind also die Begriffe Obersequenz und Untersequenz bei einer aus Sequenzen bestehenden Schlußfigur zu verstehen.)

Wir werden nur spezielle Schlußfiguren zu betrachten haben, die bei den einzelnen Kalkülen angegeben werden.

3.2. Eine Beweisfigur, kurz *Herleitung* genannt, besteht aus einer Anzahl von Formeln (mindestens einer), die unter sich Schlußfiguren bilden in folgender Weise: Jede Formel ist Unterformel von höchstens einer Schlußfigur, jede, außer genau einer, der *Endformel*, ist Oberformel von mindestens einer Schlußfigur, und das System der Schlußfiguren ist zirkelfrei, d. h. es gibt keinen Zyklus (Reihe, zu deren letztem Glied wieder das erste als Nachfolger gilt) von Formeln der Herleitung, von denen jede Oberformel einer Schlußfigur ist, deren Unterformel die nächste in der Reihe ist.

3.3. Solche Formeln einer Herleitung, welche nicht Unterformeln einer Schlußfigur sind, heißen *Anfangsformeln* der Herleitung.

Eine Herleitung heißt *stammbaumförmig*, wenn jede ihrer Formeln eine Oberformel von höchstens einer Schlußfigur ist.

Alsdann sind also alle Formeln außer der Endformel Oberformeln von genau einer Schlußfigur.

Wir werden nur stammbaumförmige Herleitungen zu betrachten haben.

Die Formeln, aus denen eine Herleitung nach der Erklärung besteht, nennen wir *H-Formeln* (d. h. Herleitungsformeln), womit wir zum Aus-

druck bringen wollen, daß wir nicht nur die Formel als solche meinen, sondern verbunden mit ihrer Stellung in der Herleitung. In diesem Sinne werden wir z. B. die Ausdrucksweisen gebrauchen:

„Eine Formel kommt in einer Herleitung als *H*-Formel vor."

„Zwei verschiedene (d. h. nur: an verschiedener Stelle in der Herleitung stehende) *H*-Formeln sind formal gleich, nämlich gleich derselben Formel."

Es bedeutet also: „$\mathfrak{A}$ ist dieselbe *H*-Formel wie $\mathfrak{B}$", daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht nur der Form nach gleich sind, sondern außerdem die gleiche Stelle in der Herleitung haben. Für Gleichheit der Form ohne Rücksicht auf die Stelle benutzen wir die Worte „formal gleich".

Dagegen wollen wir für Gegenstandsvariable keine besondere Bezeichnung, die sie in Verbindung mit einer bestimmten Stelle in einer Formel brächte, einführen, wir sagen also z. B.: „In zwei verschiedenen *H*-Formeln kommt dieselbe Gegenstandsvariable vor."

3.4. Die Schlußfiguren der Herleitung nennen wir *H-Schlußfiguren* (d. h. Herleitungs-Schlußfiguren).

In einer aus Sequenzen bestehenden Herleitung nennen wir die *S*-Formeln der *H*-Sequenzen *H-S-Formeln* (d. h. Herleitungs-Sequenz-Formeln)

3.5. Ein *Faden* in einer Herleitung ist (nach Hilbert) eine Reihe von *H*-Formeln, deren erste eine Anfangsformel und deren letzte die Endformel ist, und von denen jede außer der letzten Oberformel einer *H*-Schlußfigur ist, deren Unterformel die nächste Formel des Fadens ist.

Wir sagen: „Eine *H*-Formel steht *über* (bzw. *unter*) einer anderen *H*-Formel", wenn es einen Faden gibt, in dem die erstere vor (bzw. nach) der letzteren vorkommt.

Wir denken dabei an die Schreibweise der Herleitung als stammbaumförmige Figur mit den Anfangsformeln obenan und der Endformel unten. (Beispiele finden sich im II. Abschnitt, § 4.)

Ferner sagen wir: „Eine *H*-Schlußfigur steht über bzw. unter einer *H*-Formel", wenn alle Formeln der Schlußfigur über bzw. unter dieser *H*-Formel stehen.

Wir bezeichnen eine Herleitung mit der Endformel $\mathfrak{A}$ auch als eine „Herleitung von $\mathfrak{A}$".

Die Anfangsformeln einer Herleitung können *Grundformeln* oder *Annahmeformeln* sein, über deren Natur werden wir bei den einzelnen Kalkülen näheres zu sagen haben.

II. Abschnitt.

Der Kalkül des natürlichen Schließens.

§ 1.

Beispiele natürlichen Schließens.

Wir wollen einen Formalismus aufstellen, der möglichst genau das wirkliche logische Schließen bei mathematischen Beweisen wiedergibt.

Wir zeigen zunächst an einigen Beispielen, wie das wirkliche Schließen etwa verläuft; zu dem Zwecke betrachten wir drei „richtige Formeln" und versuchen deren Richtigkeit auf einem möglichst natürlichen Wege einzusehen.

1.1. Erstes Beispiel:

$(X \vee (Y \,\&\, Z)) \supset ((X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z))$ ist als richtige Formel zu erkennen (H.-A., Seite 28, Formel 19).

Man wird so argumentieren: Es gelte X oder $Y \,\&\, Z$. Wir unterscheiden die zwei Fälle: 1. X gilt, 2. $Y \,\&\, Z$ gilt. Im 1. Falle folgt die Gültigkeit von $X \vee Y$ sowie $X \vee Z$, also auch von $(X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)$. Im 2. Falle gilt $Y \,\&\, Z$, also sowohl y als auch Z. Aus Y folgt $X \vee Y$, aus Z folgt $X \vee Z$. Also gilt auch jetzt $(X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)$. Damit ist dies überhaupt aus $X \vee (Y \,\&\, Z)$ hergeleitet, d. h. es gilt:

$$(X \vee (Y \,\&\, Z)) \supset ((X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)).$$

1.2. Zweites Beispiel:

$$(\exists\, x \forall\, y F x y) \supset (\forall\, y \exists\, x F x y).$$

(H.-A., Formel 36, Seite 60). Man wird so argumentieren: Es gebe ein x, so daß für alle y $F x y$ gilt. Sei a ein solches x. Also gelte für alle y: $F a y$. Sei nun b irgendein beliebiger Gegenstand. Dann gilt $F a b$. Es gibt also ein x, nämlich a, so daß $F x b$ gilt. b war beliebig, also gilt dies für alle Gegenstände, d. h.: Für alle y gibt es ein x, so daß $F x y$ gilt. Damit haben wir die Behauptung.

1.3. Drittes Beispiel:

$(\neg \exists\, x F x) \supset (\forall\, y \neg F y)$ soll als intuitionistisch richtig erkannt werden. Man wird so schließen: Es wird angenommen, es gäbe kein x, für das $F x$ gilt. Hieraus soll gefolgert werden: Für alle y gilt $\neg F y$. Nun sei etwa a irgendein Gegenstand, für den $F a$ doch gelte. Dann folgt: Es gibt ein x, für das $F x$ gilt; nämlich a ist ein solches. Das widerspricht der Annahme $\neg \exists\, x F x$. Also haben wir einen Widerspruch,

d. h. Fa kann nicht gelten. Nun war a völlig beliebig, also folgt: Für alle y gilt $\neg Fy$. Das war zu zeigen.

Beweise der Art, wie sie bei diesen drei Beispielen geführt wurden, sollen nunmehr in einen exakt zu definierenden Kalkül eingeordnet werden (in § 4 wird dann angegeben, wie diese Beispiele in dem Kalkül sich darstellen).

§ 2.

Aufstellung des Kalküls *NJ*.

2.1. Es soll jetzt ein Kalkül für „natürliche", intuitionistische Herleitungen von richtigen Formeln angegeben werden. Die Beschränkung auf das intuitionistische Schließen ist nur vorläufig, die Gründe hierfür und die Erweiterung des Kalküls zum klassischen Schließen (durch Hinzufügung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten) sollen unten erläutert werden (siehe § 5).

Der wesentlichste äußerliche Unterschied zwischen *NJ*-Herleitungen und Herleitungen in den Systemen von Russell, Hilbert, Heyting ist folgender: Bei letzteren werden die richtigen Formeln aus einer Reihe von „logischen Grundformeln" durch wenige Schlußweisen hergeleitet; das natürliche Schließen geht jedoch im allgemeinen nicht von logischen Grundsätzen aus, sondern von Annahmen (s. die Beispiele in § 1), an welche sich logische Schlüsse anschließen. Durch einen späteren Schluß wird dann das Ergebnis wieder von der Annahme unabhängig gemacht.

Wir wollen Kalküle der ersteren Art als *logistische* bezeichnen.

2.2. Nach dieser Vorbemerkung erklären wir den Begriff der *NJ-Herleitung* wie folgt:

(Beispiele in § 4.)

Eine *NJ*-Herleitung besteht aus Formeln in stammbaumförmiger (I, 3.3) Anordnung.

(Durch die Forderung nach stammbaumförmiger Anordnung weichen wir etwas von der Analogie zum wirklichen Schließen ab. Denn 1. findet beim wirklichen Schließen infolge der Linearität des Denkens notwendigerweise eine lineare Aufeinanderfolge der Aussagen statt, und 2. ist es hier üblich, ein bereits erhaltenes Ergebnis mehrmals weiter zu benutzen, während die Stammbaumform nur jeweils einmalige Verwendung einer hergeleiteten Formel gestattet. Beide Abweichungen dienen zur bequemeren Fassung des Herleitungsbegriffs und sind nicht wesentlich.)

Die Anfangsformeln der Herleitung sind Annahmeformeln, von diesen ist jede genau einer H-Schlußfigur zugeordnet (und zwar steht sie alsdann „über" (I, 3.5) deren Unterformel, wie unten noch näher ausgeführt werden wird).

Alle Formeln, die unter einer Annahmeformel, aber noch über der Unterformel der H-Schlußfigur, zu der die Annahmeformel gehört, stehen, die Annahmeformel selbst eingeschlossen, heißen von dieser *abhängig*.

(Der Schluß macht also die nach ihm folgenden Aussagen von der zu ihm gehörigen Annahme unabhängig.)

Die Endformel der Herleitung hängt nach dem Gesagten von keiner Annahmeformel ab.

2.21. Angabe der zulässigen Schlußfiguren.

Die untenstehenden Schlußfigurenschemata sind so zu verstehen:

Aus einem der Schemata erhält man eine NJ-Schlußfigur, indem man für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ beliebige Formeln einsetzt, für $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ bzw. $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ eine beliebige Formel mit $\forall$ bzw. $\exists$ als äußerstem Zeichen, $\mathfrak{x}$ bezeichne die zugehörige gebundene Gegenstandsvariable, für $\mathfrak{F} \mathfrak{a}$ diejenige Formel, welche aus $\mathfrak{F} \mathfrak{x}$ entsteht, indem man die gebundene Gegenstandsvariable $\mathfrak{x}$ überall, wo sie vorkommt, durch die freie Gegenstandsvariable $\mathfrak{a}$ ersetzt.

(Es kann z. B. für $\mathfrak{a}$ eine Variable genommen werden, die in $\mathfrak{F} \mathfrak{x}$ schon vorkommt. Für die Schlußfiguren AE und EB wird diese Möglichkeit allerdings durch die unten folgende Variablenbedingung wieder ausgeschlossen werden, doch für AB und EE bleibt sie bestehen. — Es braucht auch $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{F} \mathfrak{x}$ gar nicht vorzukommen, alsdann ist $\mathfrak{F} \mathfrak{a}$ natürlich mit $\mathfrak{F} \mathfrak{x}$ identisch. — $\mathfrak{F} \mathfrak{a}$ ist offenbar stets eine Teilformel von $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ bzw. $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$, gemäß der Teilformeldefinition unter I, 2.2.)

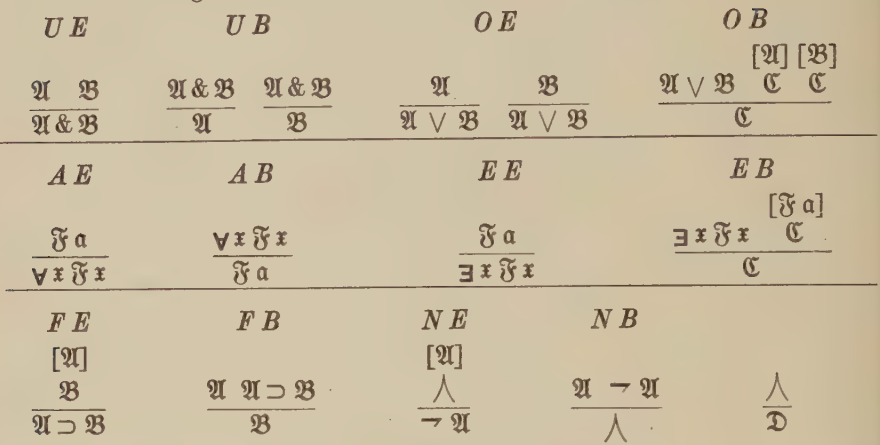
Die in eckigen Klammern stehenden Zeichen haben folgende Bedeutung: Formeln von dieser Gestalt dürfen in beliebiger Anzahl (evtl. keine), doch alle formal gleich, der Schlußfigur als Annahmeformeln zugeordnet sein. Sie müssen alsdann Anfangsformeln der Herleitung, und zwar in solchen Beweisfäden sein, welchen die betreffende Oberformel der Schlußfigur angehört. (D. h. diejenige Oberformel, über der im Schema die eckige Klammer steht. — Diese kann bereits selbst Annahmeformel sein.)

In einer Herleitung muß die Zuordnung zwischen einer H-Schlußfigur und den zugehörigen Annahmeformeln irgendwie kenntlich gemacht sein, etwa durch gemeinsame Numerierung (siehe die Beispiele in § 4).

Die Bezeichnungen der einzelnen Schlußfigurenschemata: UE, UB usw. sollen bedeuten: Eine nach dem Schema gebildete Schlußfigur ist eine Und-(U), Oder-(O), All-(A), Es-gibt-(E), Folgt-(F) bzw. Nicht-

(N)-Zeichen-„Einführung“ (E) bzw. „-Beseitigung“ (B). Näheres hierüber in § 5.

Die Schlußfiguren-Schemata:



Als *Eigenvariable* einer AE bzw. EB bezeichnen wir die in dem betreffenden Schema mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete freie Gegenstandsvariable. (Vorausgesetzt, daß sie existiert, d. h. daß die mit $\mathfrak{x}$ bezeichnete gebundene Gegenstandsvariable in der mit $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bezeichneten Formel vorkommt.)

Die Variablenbedingung:

Eine NJ-Herleitung muß noch folgender Bedingung genügen: (Über deren Sinn vgl. § 3.)

Die Eigenvariable einer AE darf nicht in der im Schema mit $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bezeichneten Formel und nicht in irgendeiner Annahmeformel, von der diese abhängt, vorkommen;

die Eigenvariable einer EB darf nicht in der im Schema mit $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bezeichneten Formel und nicht in der mit $\mathfrak{C}$ bezeichneten Oberformel sowie nicht in irgendeiner Annahmeformel, von der diese abhängt, außer den mit $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ bezeichneten, zur EB gehörigen Annahmeformeln, vorkommen.

Hiermit ist die Definition der „NJ-Herleitung“ beendet.

§ 3.

Der inhaltliche Sinn der NJ-Schlußfiguren.

Wir wollen für einige der Schlußfigurenschemata ihren inhaltlichen Sinn erklären und damit deutlich zu machen versuchen, daß der Kalkül in der Tat das „wirkliche Schließen“ wiedergibt.

FE: In Worten ausgedrückt, ist dies folgender Schluß: Wenn $\mathfrak{B}$ unter Benutzung der Annahme $\mathfrak{A}$ bewiesen ist, so gilt (nunmehr ohne diese Annahme): aus $\mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{B}$. (Natürlich können weitere Annahmen gemacht worden sein, von denen auch dieses Ergebnis zunächst noch abhängig bleibt.)

OB: („Fallunterscheidung".) Wenn man $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bewiesen hat, so kann man eine Fallunterscheidung machen: Man nimmt zunächst an, es gelte $\mathfrak{A}$, und leitet daraus etwa $\mathfrak{C}$ her. Wenn ferner aus der Annahme der Gültigkeit von $\mathfrak{B}$ ebenfalls $\mathfrak{C}$ sich herleiten läßt, dann gilt $\mathfrak{C}$ überhaupt, d. h. nunmehr unabhängig von beiden Annahmen (vgl. 1. 1).

AE: Wenn $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ für „beliebiges $\mathfrak{a}$" bewiesen ist, so gilt $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$ „ganz beliebig" ist, läßt sich genauer so ausdrücken: $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ darf von keiner Annahme abhängen, in welcher die Gegenstandsvariable $\mathfrak{a}$ vorkommt. Und dies, zusammen mit der selbstverständlichen Forderung, daß in $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ das $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ überall, wo es vorkam, durch $\mathfrak{x}$ ersetzt sein muß, ist genau der auf die *AE* bezügliche Teil der obigen „Variablenbedingung".

EB: Man hat $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Dann sagt man: Sei $\mathfrak{a}$ ein solcher Gegenstand, für den $\mathfrak{F}$ gilt. D. h. man nimmt an: Es gelte $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$. (Natürlich muß man für $\mathfrak{a}$ eine Gegenstandsvariable nehmen, die in $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ noch nicht vorkam.) Hat man auf Grund dieser Annahme eine Aussage $\mathfrak{C}$ bewiesen, welche $\mathfrak{a}$ nicht mehr enthält und auch nicht von einer sonstigen $\mathfrak{a}$ enthaltenden Annahme abhängt, so ist $\mathfrak{C}$ unabhängig von der Annahme $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ bewiesen. Mit dem Gesagten wurde der die *EB* betreffende Teil der „Variablenbedingung" ausgesprochen. (Eine gewisse Analogie besteht zwischen *EB* und *OB*, wie ja überhaupt das Es-gibt-Zeichen die Verallgemeinerung des $\vee$, das Allzeichen die des & ist.)

NB: $\mathfrak{A}$ und $\neg\mathfrak{A}$ bedeutet einen Widerspruch, und ein solcher kann nicht zutreffen (Satz vom Widerspruch). Dies wird formal durch die Schlußfigur *NB* wiedergegeben, wobei $\curlywedge$ „den Widerspruch", „das Falsche" bezeichnet.

NE: (reductio ad absurdum.) Wenn aus einer Annahme $\mathfrak{A}$ etwas Falsches ($\curlywedge$) folgt, so ist $\mathfrak{A}$ nicht richtig, d. h. es gilt $\neg\mathfrak{A}$.

Das Schema $\frac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$: Wenn etwas Falsches gilt, so gilt jede beliebige Aussage.

Die übrigen Schlußfigurenschemata sind wohl leicht zu deuten.

§ 4.

Schreibung der drei Beispiele aus § 1 als NJ-Herleitungen.

Das erste Beispiel (1.1):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X}\,1}{X \vee Y}\,OE \quad \dfrac{\dfrac{}{X}\,1}{X \vee Z}\,OE}{(X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)}\,UE \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Y \,\&\, Z}\,1}{Y}\,UB}{X \vee Y}\,OE \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Y \,\&\, Z}\,1}{Z}\,UB}{X \vee Z}\,OE}{(X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)}\,UE}{X \vee (Y \,\&\, Z)}\,OB\,1,2}{(X \vee (Y \,\&\, Z)) \supset ((X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z))}\,FE\,2$$

Bei diesem Beispiel dürfte die stammbaumförmige Anordnung insofern etwas künstlich erscheinen, als durch sie z. B. das Nachfolgen der Fallunterscheidung $X, Y \,\&\, Z$ nach der Feststellung von $X \vee (Y \,\&\, Z)$ verloren geht.

Das zweite Beispiel (1.2):

$$\dfrac{\dfrac{\exists x \forall y F x y}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall y F a y}\,1}{F a b}\,AB}{\exists x F x b}\,EE}{\forall y \exists x F x y}\,AE}{\forall y \exists x F x y}\,EB\,1,2$$

$$(\exists x \forall y F x y) \supset (\forall y \exists x F x y)\,FE\,2$$

Auch hier würde bei linearer Anordnung naturgemäß die Annahme der EB nach deren linker Oberformel folgen, wie es in § 1 bei diesem Beispiel geschehen ist.

Das dritte Beispiel (1.3):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F a}\,2}{\exists x F x}\,EE \qquad \dfrac{}{\neg \exists x F x}\,1}{\perp}\,NB}{\neg F a}\,NE\,2}{\forall y \neg F y}\,AE$$

$$(\neg \exists x F x) \supset (\forall y \neg F y)\,FE\,1$$

§ 5.

Einige Bemerkungen zum Kalkül NJ. Der Kalkül NK.

5.1. Der Kalkül NJ hat manche formale Unschönheiten. Diesen stehen etwa folgende Vorteile gegenüber:

5.11. Die weitgehende Anpassung an das wirkliche Schließen, von der wir ja ausgegangen sind. Daher ist der Kalkül insbesondere zur Formalisierung mathematischer Beweise geeignet.

5.12. Die Herleitungen für richtige Formeln sind in diesem Kalkül fast durchweg kürzer als in den logistischen Kalkülen. Das beruht im wesentlichen darauf, daß bei logistischen Herleitungen ein und dieselbe Formel meist eine Reihe von Malen (als Teil anderer Formeln) auftritt, während dies bei NJ-Herleitungen nur in geringem Maße der Fall ist.

5.13. Die oben angewandte Bezeichnung der einzelnen Schlußfiguren (2.21) läßt erkennen, daß hier eine beachtenswerte Systematik vorliegt. Zu jedem der logischen Zeichen &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\neg$ gehört genau eine Schlußfigur, die das Zeichen — als äußerstes Zeichen einer Formel — „einführt", und eine, die es „beseitigt"; die Duplizität der Schlußfiguren UB und OE bedeutet eine belanglose, rein äußerliche Abweichung. Die Einführungen stellen sozusagen die „Definitionen" der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon, was sich etwa so ausdrücken läßt: Bei der Beseitigung eines Zeichens darf die betreffende Formel, um deren äußerstes Zeichen es sich handelt, nur „als das benutzt werden, was sie auf Grund der Einführung dieses Zeichens bedeutet". Ein Beispiel möge verdeutlichen, wie das gemeint ist: Die Formel $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ durfte eingeführt werden, wenn eine Herleitung von $\mathfrak{B}$ aus der Annahmeformel $\mathfrak{A}$ vorlag. Will man sie nun mit Beseitigung des Zeichens $\supset$ wieder verwenden [natürlich sind auch Verwendungen zur Bildung längerer Formeln, wie etwa $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}$, OE, möglich], so kann man das gerade in der Weise tun, daß man aus einem bewiesenen $\mathfrak{A}$ sofort $\mathfrak{B}$ schließt, denn $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ dokumentiert ja das Bestehen einer Herleitung von $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$. Wohlgemerkt: Es braucht hierbei nicht auf einen „inhaltlichen Sinn" des Zeichens $\supset$ Bezug genommen zu werden.

Durch Präzisierung dieser Gedanken dürfte es möglich sein, die B-Schlüsse auf Grund gewisser Anforderungen als eindeutige Funktionen der zugehörigen E-Schlüsse nachzuweisen.

5.2. Die Negation läßt sich in unserem Kalkül eliminieren, indem man $\neg \mathfrak{A}$ als Abkürzung für $\mathfrak{A} \supset \bigwedge$ ansieht. Dies ist zulässig, denn: Wenn man in einer NJ-Herleitung alle Nicht-Zeichen beseitigt, indem man jedes $\neg \mathfrak{A}$ jeweils durch $\mathfrak{A} \supset \bigwedge$ ersetzt, so entsteht wieder eine NJ-Herleitung (dabei werden die Schlußfiguren NE und NB zu Spezialfällen von FE und FB), und umgekehrt: Wenn man in einer NJ-Herleitung jedes $\mathfrak{A} \supset \bigwedge$ jeweils durch $\neg \mathfrak{A}$ ersetzt, so entsteht ebenfalls wieder eine NJ-Herleitung.

Das Schlußfigurenschema $\frac{\bigwedge}{\mathfrak{D}}$ nimmt eine Sonderstellung unter den Schemata ein, es gehört nicht zu einem logischen Zeichen, sondern zu dem Aussagezeichen $\bigwedge$.

5.3. Der „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“ und der Kalkül NK.

Aus dem Kalkül NJ entsteht ein vollständiger klassischer Kalkül NK durch Hinzufügung des „Satzes vom ausgeschlossenen Dritten“ (tertium non datur), d. h.: Man läßt als Anfangsformeln der Herleitung außer den Annahmeformeln noch „Grundformeln“ der Gestalt $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$, wobei für $\mathfrak{A}$ eine beliebige Formel einzusetzen ist, zu.

Wir haben hiermit rein äußerlich dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten eine Sonderstellung eingeräumt, und zwar deswegen, weil wir diese Formulierung für die „natürlichste“ hielten. Es wäre durchaus möglich, an Stelle des Grundformelnschemas $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ ein neues Schlußfigurenschema zuzulassen, etwa $\dfrac{\neg\neg \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$ (analog zu Hilbert und Heyting). Doch diese Schlußfigur fällt insofern noch immer aus dem Rahmen der NJ-Schlußfiguren heraus, als sie eine neue Negationsbeseitigung darstellt, deren Zulässigkeit keineswegs aus der Art der Nicht-Zeichen-Einführung durch die NE hervorgeht.

III. Abschnitt.

Die Schlußweisenkalküle LJ, LK und der Hauptsatz.

§ 1.

Die Kalküle LJ und LK. (Logistischer intuitionistischer und klassischer Kalkül.)

1.1. Vorbemerkungen zur Aufstellung der Kalküle LJ und LK.

Wir wollen einen Schlußweisenkalkül (für die Prädikatenlogik) aufstellen, der einerseits „logistisch“ ist, in welchem also die Herleitungen keine Annahmeformeln wie beim Kalkül NJ enthalten, der andererseits jedoch von dem Kalkül NJ die Einteilung der Schlußweisen in Einführungen und Beseitigungen der einzelnen logischen Zeichen übernimmt.

Das naheliegendste Verfahren, um aus einer NJ-Herleitung eine logistische Herleitung zu machen, ist dieses: Man ersetzt eine H-Formel $\mathfrak{B}$, welche von den Annahmeformeln $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_u$ abhängt, durch die neue Formel $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_u) \supset \mathfrak{B}$. Dies geschehe mit sämtlichen H-Formeln.

So erhält man Formeln, die schon für sich richtig sind, deren Richtigkeit also nicht mehr von der Gültigkeit gewisser Annahmeformeln abhängt. Nun kommen aber auf diese Weise neue logische Zeichen & und $\supset$ hinzu, diese würden zusätzliche Schlußfiguren für & und $\supset$ erfordern und damit die ganze Einführungs- und Beseitigungssystematik

stören. Aus diesem Grunde haben wir den Begriff der Sequenz (I, 2. 3) eingeführt. Wir schreiben also anstatt einer Formel $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$ die Sequenz

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Diese unterscheidet sich ihrer inhaltlichen Bedeutung nach nicht von der Formel, sondern nur hinsichtlich ihrer formalen Struktur (vgl. I, 2. 4).

Auch jetzt brauchen wir neue Schlußfiguren, welche sich nicht in die Einführungs- und Beseitigungssystematik einfügen; wir haben aber den Vorteil, daß wir diesen eine Sonderstellung einräumen können, da sie sich nicht mehr auf logische Zeichen, sondern auf die Struktur der Sequenzen beziehen. Wir nennen diese daher „Struktur-Schlußfiguren", die anderen „Logische-Zeichen-Schlußfiguren".

In dem klassischen Kalkül *NK* nahm der Satz vom ausgeschlossenen Dritten eine Sonderstellung unter den Schlußweisen ein (II, 5. 3), indem er sich der Einführungs- und Beseitigungssystematik nicht einfügte. Bei dem im folgenden anzugebenden logistischen klassischen Kalkül *LK* wird diese Sonderstellung aufgehoben. Das wird dadurch ermöglicht, daß wir Sequenzen mit mehreren Formeln im Sukzedens zulassen, während der soeben angegebene Übergang vom Kalkül *NJ* her uns nur auf Sequenzen mit einer Formel im Sukzedens führte. (Über die inhaltliche Bedeutung der allgemeinen Sequenzen siehe I, 2. 4.) Die damit erreichte Symmetrie erweist sich als für die klassische Logik angemessener. Dagegen bleibt für den intuitionistischen Kalkül *LJ* die Beschränkung auf höchstens eine Formel im Sukzedens bestehen. (Siehe unten. — Ein leeres Sukzedens bedeutet dasselbe, wie wenn $\wedge$ im Sukzedens stände.)

Hiermit haben wir einige Gesichtspunkte zur Begründung der Aufstellung der folgenden Kalküle angegeben. Im wesentlichen ist ihre Form jedoch durch die Rücksicht auf den nachher zu beweisenden „Hauptsatz" (§ 2) bestimmt und kann daher vorläufig nicht näher begründet werden.

1. 2. Nunmehr erklären wir die Begriffe *LK-Herleitung* und *LJ-Herleitung* wie folgt:

Eine *LJ*- bzw. *LK*-Herleitung besteht aus Sequenzen in stammbaumförmiger (I, 3. 3) Anordnung.

Die Anfangssequenzen der Herleitung sind Grundsequenzen der Form

$$\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D},$$

wobei $\mathfrak{D}$ eine beliebige Formel sein kann.

Jede Schlußfigur der Herleitung geht aus einem der untenstehenden Schemata durch eine Einsetzung folgender Art hervor (vgl. II, 2. 21):

Für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ setzt man beliebige Formeln ein, für $\forall x \mathfrak{F} x$ bzw. $\exists x \mathfrak{F} x$ eine beliebige Formel mit $\forall$ bzw. $\exists$ als äußerstem Zeichen, x bezeichne die zugehörige gebundene Gegenstandsvariable, für $\mathfrak{F} a$ diejenige Formel, welche aus $\mathfrak{F} x$ entsteht, indem man die gebundene Gegenstandsvariable x überall, wo sie vorkommt, durch die freie Gegenstandsvariable a ersetzt.

Für Γ, Δ, Θ, Λ sind beliebige (eventuell leere) Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, einzusetzen.

Ferner gilt für LJ-Schlußfiguren folgende Einschränkung (und dies ist der einzige Punkt, in welchem sich die Begriffe LJ- und LK-Herleitung unterscheiden):

„Im Sukzedens jeder H-Sequenz darf nicht mehr als eine S-Formel vorkommen." —

Die Bezeichnungen der einzelnen Schemata für Logische-Zeichen-Schlußfiguren, UES, UEA usw. sollen bedeuten: Eine nach dem Schema gebildete Schlußfigur ist eine Und-(U), Oder-(O), All-(A), Es-gibt-(E), Nicht-(N) bzw. Folgt-(F)-Zeichen-Einführung (E) im Sukzedens (S) bzw. Antezedens (A).

Die Schlußfiguren-Schemata.

1.21. Schemata für Struktur-Schlußfiguren:

Verdünnung:

im Antezedens: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}$ im Sukzedens: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$;

Zusammenziehung:

im Antezedens: $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}$ im Sukzedens: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$;

Vertauschung:

im Antezedens: $\dfrac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}$ im Sukzedens: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Lambda}$;

Schnitt: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$.

1.22. Schemata für Logische-Zeichen-Schlußfiguren:

UES: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$ $\quad$ OEA: $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$

UEA: $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$ $\dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$ $\quad$ OES: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$

AES: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F} a}{\Gamma \to \Theta, \forall x \mathfrak{F} x}$ $\quad$ EEA: $\dfrac{\mathfrak{F} a, \Gamma \to \Theta}{\exists x \mathfrak{F} x, \Gamma \to \Theta}$

Variablenbedingung: Die in den beiden letzten Schemata mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete Gegenstandsvariable, wir nennen sie die *Eigenvariable* der AES bzw. EEA, darf in der Untersequenz der Schlußfigur nicht vorkommen (also nicht in Γ, Θ und $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$).

$$AEA: \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a},\ \Gamma \to \Theta}{\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x},\ \Gamma \to \Theta} \qquad EES: \frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma \to \Theta,\ \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$$

$$NES: \frac{\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta,\ \neg \mathfrak{A}} \qquad NEA: \frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta}$$

$$FES: \frac{\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \qquad FEA: \frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B},\ \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma,\ \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

1.3. Beispiel einer LJ-Herleitung (nach II, 4.3):

$$\dfrac{\dfrac{Fa \to Fa}{Fa \to \exists x Fx}\,EES \quad \dfrac{\dfrac{}{\exists x Fx \to \exists x Fx}\,NEA}{\dfrac{\neg \exists x Fx,\ \exists x Fx \to}{\exists x Fx,\ \neg \exists x Fx \to}\,\text{Vertauschung}}\,\text{Schnitt}}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Fa,\ \neg \exists x Fx \to}{\neg \exists x Fx \to \neg Fa}\,NES}{\neg \exists x Fx \to \forall y \neg Fy}\,AES}{\to (\neg \exists x Fx) \supset (\forall y \neg Fy)}\,FES}$$

1.4. Beispiel einer LK-Herleitung (Herleitung des „Satzes vom ausgeschlossenen Dritten"):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A,\ \neg A}\,NES}{\to A,\ A \vee \neg A}\,OES}{\to A \vee \neg A,\ A}\,\text{Vertauschung}}{\to A \vee \neg A,\ A \vee \neg A}\,OES}{\to A \vee \neg A}\,\text{Zusammenziehung}$$

§ 2.

Einige Bemerkungen zu den Kalkülen LJ und LK. — Der Hauptsatz.

(Von den Bemerkungen 2.1 bis 2.3 werden wir weiterhin keinen Gebrauch machen.)

2.1. Die Schemata sind nicht alle voneinander unabhängig, d. h. man könnte einige mit Hilfe der übrigen ersetzen. Würden wir jedoch diese weglassen, so wäre der „Hauptsatz" nicht mehr gültig.

2.2. Überhaupt könnte man, wenn man auf den Hauptsatz keinen Wert legte, die Kalküle in mancher Hinsicht vereinfachen. So sei kurz darauf hingewiesen, daß sich im Kalkül LK die Schlußfiguren UES,

OEA, *UEA*, *OES*, *AEA*, *EES*, *NES*, *NEA* und *FEA* durch Grundsequenzen nach folgenden Schemata ersetzen ließen:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \qquad \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \to \mathfrak{F} \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{F} \mathfrak{a} \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \qquad \to \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \text{ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)}$$

$$\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to \text{ (Satz vom Widerspruch)} \qquad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}.$$

Die Äquivalenz der Grundsequenzen mit den Schlußfiguren ist leicht zu zeigen.

Für den Kalkül *LJ* besteht dieselbe Möglichkeit, ausgenommen für die Schlußfiguren *OEA* und *NES*, da ja die *LJ-H*-Sequenzen nicht zwei *S*-Formeln im Sukzedens haben dürfen (vgl. hierzu V. Abschnitt, § 5).

2.3. Der Unterschied zwischen intuitionistischer und klassischer Logik ist bei den Kalkülen *LJ* und *LK* äußerlich ganz anderer Art als bei *NJ* und *NK*. Dort bestand er in Weglassung bzw. Hinzunahme des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, während er hier durch die Sukzedensbedingung ausgedrückt wird. (Daß beide Unterscheidungen äquivalent sind, werden die Äquivalenzbeweise für alle behandelten Kalküle, im V. Abschnitt, ergeben.)

2.4. Der Kalkül *LK* ist, wenn man *FES* und *FEA* wegläßt, spiegelbildlich-symmetrisch in folgendem Sinne: Wenn man alle Sequenzen einer *LK*-Herleitung (in der das Zeichen $\supset$ nicht vorkommt) umgekehrt schreibt, d. h. für $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ jeweils $\mathfrak{B}_\nu, \ldots, \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{A}_\mu, \ldots, \mathfrak{A}_1$ setzt, sowie bei Schlußfiguren mit zwei Obersequenzen die rechte und linke Obersequenz mitsamt ihren Herleitungen vertauscht, ferner jedes vorkommende & durch $\vee$, $\forall$ durch $\exists$, $\vee$ durch & und $\exists$ durch $\forall$ ersetzt (bei Ersetzung von & durch $\vee$ und umgekehrt hat man noch die beiden Erstreckungsbereiche des Zeichens zu vertauschen, also z. B. $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ für $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ zu setzen), so entsteht wieder eine *LK*-Herleitung.

Dies ist unmittelbar aus den Schemata ersichtlich. (Bei deren Anordnung ist auf die Symmetrie besondere Rücksicht genommen worden.)

(Vgl. das Dualitätsprinzip bei H.-A., S. 62.)

2.41. Das Zeichen $\supset$ kann man beim Kalkül *NK* überhaupt in bekannter Weise entbehren, indem man $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ als Abkürzung für $(\neg \mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}$ ansieht; es ist leicht nachzuprüfen, daß sich dann die Schemata für *FES* und *FEA* durch die Schemata für $\vee$ und $\neg$ ersetzen lassen.

Für den Kalkül *NJ* gilt nichts entsprechendes.

2.5. Die für uns wichtigste Tatsache über die Kalküle *LJ* und *LK* ist der folgende

Hauptsatz: Jede *LJ*- bzw. *LK*-Herleitung läßt sich in eine *LJ*- bzw. *LK*-Herleitung mit der gleichen Endsequenz umwandeln, in welcher die als „Schnitt" bezeichnete Schlußfigur nicht vorkommt.

2.51. Der Beweis folgt in § 3.

Um die Bedeutung des Satzes klarer hervortreten zu lassen, beweisen wir einen einfachen Zusatz (2.513).

Dazu führen wir einige (im folgenden oftmals benötigte) Ausdrucksweisen im Zusammenhang mit den Logische-Zeichen-Schlußfiguren ein:

2.511. Diejenige *S*-Formel, welche im Schema das logische Zeichen enthält, nennen wir die *Hauptformel* der Schlußfigur.

Das ist also die *S*-Formel der Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ bei *UES*, *UEA*; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bei *OES*, *OEA*; $\forall x \mathfrak{F} x$ bei *AES*, *AEA*; $\exists x \mathfrak{F} x$ bei *EES*, *EEA*, $\neg \mathfrak{A}$ bei *NES*, *NEA* und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ bei *FES*, *FEA*.

Die in den Schemata mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ bezeichneten *S*-Formeln nennen wir die *Nebenformeln* der betreffenden Schlußfigur.

Sie sind stets Teilformeln der Hauptformel (nach der Teilformeldefinition unter I, 2.2).

2.512. Nun können wir aus den Schlußfigurenschemata die folgenden Tatsachen leicht ablesen:

Die Hauptformel steht immer in der Untersequenz, die Nebenformeln stehen immer in den Obersequenzen einer Logische-Zeichen-Schlußfigur.

Kommt eine Formel in einer Obersequenz einer beliebigen Schlußfigur als *S*-Formel vor, und ist sie hier nicht Nebenformel oder das $\mathfrak{D}$ eines Schnittes, so kommt sie auch in der Untersequenz als *S*-Formel vor.

Aus diesen beiden Tatsachen ergibt sich:

Kommt in einer *LJ*- oder *LK*-Herleitung irgendwo eine Formel als *S*-Formel vor, und verfolgt man den Herleitungsfaden von der betreffenden Sequenz bis zur Endsequenz, so kann in diesem Faden die Formel nur dann verschwinden, wenn sie das $\mathfrak{D}$ eines Schnittes oder die Nebenformel einer Logische-Zeichen-Schlußfigur ist. In letzterem Falle tritt dafür in der nächsten Sequenz die Hauptformel der Schlußfigur auf, von dieser ist jene eine Teilformel. Auf die Hauptformel kann man dann, nach unten fortschreitend, dieselbe Betrachtung anwenden usw. So ergibt sich der folgende

2.513. Zusatz zum Hauptsatz (Teilformeln-Eigenschaft): In einer *LJ*- bzw. *LK*-Herleitung ohne Schnitte sind alle vorkommenden *H*-*S*-Formeln Teilformeln der in der Endsequenz auftretenden *S*-Formeln.

2.514. Anschaulich gesprochen, kann man die beschriebenen Eigenschaften der Herleitung ohne Schnitte etwa so ausdrücken: Die *S*-Formeln werden nach unten zu immer länger, niemals kürzer. Man baut sozu-

sagen das Endergebnis aus seinen Bestandteilen heraus allmählich auf. Der durch die Herleitung dargestellte Beweis macht keine Umwege, es kommen nur solche Begriffe darin vor, welche auch in dem Endergebnis vorkommen (vgl. die Übersicht am Anfang dieser Abhandlung).

Beispiel. Die oben angegebene Herleitung (1.3) für $\rightarrow (\neg \exists x F x) \supset (\forall y \neg F y)$ läßt sich ohne Schnitte etwa so schreiben:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Fa \rightarrow Fa}{Fa \rightarrow \exists x F x}\,EES}{\neg \exists x F x, Fa \rightarrow}\,NEA}{Fa, \neg \exists x F x \rightarrow}\ \text{Vertauschung}$$

und weiter wie oben.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Der Hauptsatz lautete:

Jede LJ- bzw. LK-Herleitung läßt sich in eine LJ- bzw. LK-Herleitung mit gleicher Endsequenz umwandeln, in welcher keine Schnitte vorkommen.

3.1. Beweis des Hauptsatzes für LK-Herleitungen.

Wir führen (zur Erleichterung des Beweises) eine neue Schlußfigur ein, welche eine Abwandlung des Schnittes darstellt, wir nennen sie „Mischung".

Das Schema hierfür lautet:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta \quad \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow \Theta^*, \Lambda}.$$

Dabei sind für Θ und Δ solche Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, einzusetzen, in welchen eine Formel der Gestalt $\mathfrak{M}$, wir nennen sie die „Mischformel", jeweils mindestens einmal (als Glied der Reihe) auftritt; für Θ^* und Δ^* sind dieselben Formelreihen einzusetzen, jedoch mit Weglassung sämtlicher (als Glieder der Reihe) vorkommenden Formeln der Gestalt $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ kann eine beliebige Formel sein). Für Γ und Λ sind, wie üblich, beliebige (eventuell leere) Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, einzusetzen.

Beispiel einer Mischung:

$$\dfrac{A \rightarrow B, \neg A \quad B \vee C, B, B, D, B \rightarrow}{A, B \vee C, D \rightarrow \neg A}.$$

B ist die Mischformel.

Offenbar läßt sich jeder Schnitt in eine Mischung mit anschließenden Verdünnungen und Vertauschungen umwandeln. (Ferner läßt sich um-

gekehrt jede Mischung in einen Schnitt mit vorangehenden Vertauschungen und Zusammenziehungen umwandeln, was wir nicht brauchen.)

Wir betrachten im folgenden nur noch Herleitungen, in denen keine Schnitte, dafür aber Mischungen vorkommen dürfen.

Da sich Herleitungen im alten Sinne in solche umwandeln lassen, genügt es zum Beweis des Hauptsatzes, zu zeigen, daß sich eine solche Herleitung in eine Herleitung ohne Mischungen umwandeln läßt.

Es genügt ferner bereits der folgende

Hilfssatz: Eine Herleitung, die eine Mischung als unterste Schlußfigur hat, und sonst keine Mischungen enthält, läßt sich in eine Herleitung (mit gleicher Endsequenz), in der keine Mischungen vorkommen, umwandeln.

Hieraus folgt der ganze Satz leicht so:

In einer beliebigen Herleitung betrachte man eine Mischung, über deren Untersequenz keine weitere Mischung vorkommt. Die Herleitung für diese Untersequenz ist dann von der im Hilfssatz genannten Art, sie läßt sich also so umwandeln, daß in ihr keine Mischung mehr vorkommt. Dabei bleibt der übrige Teil der Gesamtherleitung unverändert. Dann wiederholt man dieses Verfahren und schafft so der Reihe nach sämtliche Mischungen weg.

Jetzt brauchen wir also nur noch den

Beweis des Hilfssatzes. (Dieser erstreckt sich bis 3.2 ausschließlich.)

Wir haben eine Herleitung zu behandeln, die eine Mischung als unterste Schlußfigur hat und sonst keine Mischungen enthält.

Als „Grad der Herleitung" bezeichnen wir den Grad der Mischformel. (Definiert unter I, 2. 2.)

Als „Rang der Herleitung" bezeichnen wir die Summe der rechten Rangzahl und linken Rangzahl. Diese beiden erklären wir so:

Die linke Rangzahl ist die größte Anzahl von in einem Faden aneinander anschließenden Sequenzen, deren unterste die linke Obersequenz der Mischung ist, und von denen jede im Sukzedens die Mischformel enthält.

Die rechte Rangzahl ist (entsprechend) die größte Anzahl von in einem Faden aneinander anschließenden Sequenzen, deren unterste die rechte Obersequenz der Mischung ist, und von denen jede im Antezedens die Mischformel enthält.

Der mindest mögliche Rang ist offenbar 2.

Zum Beweis des Hilfssatzes machen wir zwei vollständige Induktionen, nach dem Grad γ und dem Rang ϱ der Herleitung. D. h.:

Wir beweisen den Satz für eine Herleitung mit dem Grad γ, und nehmen dabei an, daß er für Herleitungen kleineren Grades (sofern es solche gibt, d. h. sofern γ nicht gleich 0 ist), schon gültig sei, daß also solche Herleitungen sich bereits in Herleitungen ohne Mischungen umwandeln lassen.

Ferner behandeln wir zunächst den Fall, daß der Rang ϱ der Herleitung gleich 2 ist (3.11), und danach den Fall, daß $\varrho > 2$ ist (3.12), wobei wir annehmen, daß der Satz für Herleitungen desselben Grades, jedoch kleineren Ranges, ebenfalls schon gültig sei.

Im folgenden sollen, wie bisher, große deutsche Buchstaben stets als Mitteilungszeichen für Formeln, große griechische Buchstaben als Mitteilungszeichen für (evtl. leere) Reihen von Formeln dienen.

Bei der Umwandlung der Herleitung werden gelegentlich „identische Schlußfiguren" auftreten, d. h. Schlußfiguren mit gleicher Ober- und Untersequenz. Da wir solche in unserem Kalkül nicht zugelassen haben, sind sie in jedem Falle sofort wegzuschaffen, was trivialerweise dadurch möglich ist, daß man eine der beiden Sequenzen fortläßt.

Die Mischformel zu der am Ende der Herleitung stehenden Mischung bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$. Sie hat den Grad γ.

3.10. Umbennung von freien Gegenstandsvariablen als Vorbereitung zur Umwandlung der Herleitung.

Wir wollen erreichen, daß die Herleitung folgende Eigenschaften hat:

3.101. Für jede AES (bzw. EEA) gilt: Ihre Eigenvariable kommt in der Herleitung nur in Sequenzen über der Untersequenz der AES (bzw. EEA) vor, und kommt ferner in keiner anderen AES oder EEA als deren Eigenvariable vor.

3.102. Dies gelingt durch die folgende Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen:

Wir nehmen eine AES bzw. EEA vor, über deren Untersequenz keine weiteren Schlußfiguren dieser Art oder höchstens solche, die wir schon in der anzugebenden Weise behandelt haben, stehen.

Deren Eigenvariable ersetzen wir in allen Sequenzen über der Untersequenz dieser Schlußfigur durch ein und dieselbe bisher in der Herleitung noch nicht vorkommende freie Gegenstandsvariable. — Hierbei bleibt die AES bzw. EEA selbst korrekt, wie leicht ersichtlich. (Die Eigenvariable kam ja in ihrer Untersequenz nicht vor.) Ferner bleibt die übrige Herleitung korrekt auf Grund der gleich folgenden Hilfsbehauptung.

Indem wir dieses Verfahren für jede einzelne AES und EEA der Reihe nach durchführen, bleibt also die Herleitung jedesmal korrekt und hat zum Schluß offenbar die gewünschte Eigenschaft (3.101). Ferner sind,

was wesentlich ist, Grad und Rang der Herleitung, sowie ihre Endsequenz, unverändert geblieben.

3.103. Wir führen jetzt den noch ausstehenden Beweis der folgenden Hilfsbehauptung:

(Wir fassen diese etwas allgemeiner, als für die vorliegende Anwendung nötig wäre, da wir sie an anderer Stelle (3.11 3.33) noch einmal gebrauchen werden.)

„Eine LK - Grundsequenz oder -Schlußfigur geht in eine Grundsequenz oder Schlußfigur derselben Art über, wenn man eine freie Gegenstandsvariable, die nicht die Eigenvariable der Schlußfigur ist, überall wo sie in der Grundsequenz bzw. Schlußfigur vorkommt, durch ein und dieselbe freie Gegenstandsvariable ersetzt, vorausgesetzt, daß diese ebenfalls nicht die Eigenvariable der Schlußfigur ist."

Dies ist trivial außer für AES, AEA, EES und EEA. Doch auch in diesen Fällen ist alles in Ordnung: Die Variablenbedingung nämlich ist nicht gefährdet, da man nicht die Eigenvariable einsetzen darf, und nichts für die Eigenvariable einsetzen darf. (Aus diesem Grunde sind beide Einschränkungen notwendig.) Ferner geht die aus $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ entstehende Formel wieder aus der aus $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ entstehenden Formel durch Einsetzen von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{x}$ hervor. —

Nach dem vorbereitenden Schritt (3.10) folgt nun die eigentliche Umwandlung der Herleitung zwecks Wegschaffung der in ihr vorkommenden Mischung.

Wie schon bemerkt, unterscheiden wir die beiden Fälle $\varrho = 2$ (3.11) und $\varrho > 2$ (3.12).

3.11. Es sei $\varrho = 2$.

Wir werden eine Anzahl von Einzelfällen unterscheiden. Davon sind die Fälle 3.111, 3.112, 3.11 3.1, 3.11 3.2 besonders einfacher Natur, hier läßt sich nämlich die Mischung sofort ganz wegschaffen. Die übrigen Fälle (3.11 3.3) sind die wichtigeren, bei ihrer Behandlung kommt der Grundgedanke der ganzen Umwandlung zum Ausdruck. Hier wenden wir die Induktionsannahme bezüglich γ an, d.h. wir führen jeden der Fälle auf die Erledigung von Herleitungen kleineren Grades zurück.

3.111. Die linke Obersequenz der Mischung am Ende der Herleitung sei eine Grundsequenz. Dann lautet die Mischung:

$$\frac{\mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \qquad \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda}.$$

Man wandelt sie um zu:

$$\frac{\Delta \to \Lambda}{\mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda}$$ evtl. mehrmalige Vertauschung und Zusammenziehung.

Der Herleitungsteil über $\Delta \to \Lambda$ bleibt derselbe. Wir haben jetzt bereits eine Herleitung ohne eine Mischung.

3.112. Die rechte Obersequenz der Mischung sei eine Grundsequenz. Dieser Fall erledigt sich symmetrisch zum vorigen, man hat nur die beiden Schemata „spiegelbildlich" zu betrachten. (Vgl. 2.4.)

3.113. Weder die linke noch die rechte Obersequenz der Mischung sei eine Grundsequenz. Dann sind beide also Untersequenzen von Schlußfiguren. Da $\varrho = 2$ ist, so ist die rechte und die linke Rangzahl gleich 1, d. h.: in den direkt über der linken Obersequenz der Mischung stehenden Sequenzen kommt die Mischformel $\mathfrak{M}$ nicht im Sukzedens, in den direkt über der rechten Obersequenz stehenden Sequenzen kommt $\mathfrak{M}$ nicht im Antezedens vor.

Nun gilt allgemein: Kommt eine Formel im Antezedens bzw. Sukzedens der Untersequenz einer Schlußfigur vor, so ist sie entweder Hauptformel oder das $\mathfrak{D}$ einer Verdünnung, oder aber sie kommt auch in mindestens einer Obersequenz der Schlußfigur im Antezedens bzw. Sukzedens vor.

Das ist unmittelbar aus den Schlußfigurenschemata (1.21, 1.22) abzulesen.

Betrachtet man nun die Voraussetzungen der folgenden drei Fälle, so ist leicht ersichtlich, daß diese sämtliche innerhalb des Falles 3.113 bestehenden Möglichkeiten erschöpfen.

3.11 3.1. Die linke Obersequenz der Mischung sei Untersequenz einer Verdünnung. Das Ende der Herleitung lautet also:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{M}} \quad \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta, \Lambda}.$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta, \Lambda}$$ evtl. mehrmalige Verdünnung und Vertauschung.

Der Herleitungsteil über $\Delta \to \Lambda$ fällt weg.

3.11 3.2. Die rechte Obersequenz der Mischung sei Untersequenz einer Verdünnung. Dieser Fall ist symmetrisch zum vorigen zu erledigen.

3.11 3.3. Die Mischformel $\mathfrak{M}$ kommt im Sukzedens der linken und im Antezedens der rechten Obersequenz der Mischung lediglich als Hauptformel je einer Logische-Zeichen-Schlußfigur vor.

Je nachdem ob das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ (eine Formel ohne logische Zeichen kann keine Hauptformel sein) &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\supset$ ist, unterscheiden wir die Fälle 3.11 3.31 bis 3.11 3.36.

3.11 3.31. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei &. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{A} \qquad \Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}}\ UES \qquad \dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}\ UEA}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{Mischung}$$

(bzw. entsprechend für die andere Form von UEA, Erledigung ganz analog.) Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2^* \to \Theta_1^*,\ \Theta_2}\ \text{Mischung}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{evtl. mehrmalige Verdünnung und Vertauschung.}$$

Auf den Herleitungsteil mit der untersten Sequenz $\Gamma_1, \Gamma_2^* \to \Theta_1^*, \Theta_2$ läßt sich nun die Induktionsannahme bezüglich γ anwenden, denn er hat einen kleineren Grad als γ. ($\mathfrak{A}$ enthält ja weniger logische Zeichen als $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$.) Also läßt sich auch die ganze Herleitung in eine von Mischungen freie Herleitung umwandeln.

3.11 3.32. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\vee$. Dieser Fall ist symmetrisch zum vorigen zu erledigen.

3.11 3.33. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\forall$. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \forall \mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\ AES \qquad \dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{b},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}{\forall \mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}\ AEA}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{Mischung.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1,\ \mathfrak{F}\mathfrak{b} \qquad \mathfrak{F}\mathfrak{b},\ \Gamma_2 \to \Theta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2^* \to \Theta_1^*,\ \Theta_2}\ \text{Mischung}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{evtl. mehrmalige Verdünnung und Vertauschung.}$$

Über die linke Obersequenz der Mischung, $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$, schreibt man denselben Herleitungsteil, der vorher über $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ stand, doch ersetzt man darin die freie Gegenstandsvariable $\mathfrak{a}$ überall wo sie vorkommt durch $\mathfrak{b}$. Aus der Hilfsbehauptung 3.103 zusammen mit 3.101 geht nun bereits hervor, daß der Herleitungsteil über $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$ hierbei wieder in einen korrekten Herleitungsteil übergegangen ist. (Auf Grund von 3.101 kann ja weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{b}$ die Eigenvariable einer in diesem Herleitungsteil stehenden Schlußfigur sein.) Dieselbe Betrachtung läßt sich auch für den Teil einschließlich der Sequenz $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$ anwenden, da diese aus $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ ebenfalls durch Einsetzen von $\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{a}$ hervorgeht. Letzteres sieht man folgendermaßen ein: Auf Grund der Variablenbedingung für die AES konnte $\mathfrak{a}$ in Γ_1 und Θ_1 nicht vorkommen, sowie nicht in $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Nun entstand ferner $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ durch Einsetzen von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$

aus $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ durch Einsetzen von $\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{x}$. Daher entsteht auch $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ durch Einsetzen von $\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{a}$.

Die Mischformel $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ in der neuen Herleitung hat einen kleineren Grad als γ, also läßt sich die Mischung nach Induktionsannahme wegschaffen.

3.11 3.34. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\exists$. Dieser Fall ist symmetrisch zum vorigen zu erledigen.

3.11 3.35. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\neg$. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \neg\,\mathfrak{A}}\,NES \qquad \dfrac{\Gamma_2 \to \Theta_2, \mathfrak{A}}{\neg\,\mathfrak{A}, \Gamma_2 \to \Theta_2}\,NEA}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{Mischung.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \to \Theta_2, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1}{\Gamma_2, \Gamma_1^* \to \Theta_2^*, \Theta_1}\ \text{Mischung}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Verdünnung.}$$

Die neue Mischung läßt sich nach Induktionsannahme wegschaffen.

3.11 3.36. Das äußerste Zeichen von $\mathfrak{M}$ sei $\supset$. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FES \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\,FEA}{\Gamma_1, \Gamma, \Delta \to \Theta_1, \Theta, \Lambda}\ \text{Mischung.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A}, \Gamma_1, \Delta^* \to \Theta_1^*, \Lambda}\ \text{Mischung}}{\Gamma, \Gamma_1^*, \Delta^{**} \to \Theta^*, \Theta_1^*, \Lambda}\ \text{Mischung}}{\Gamma_1, \Gamma, \Delta \to \Theta_1, \Theta, \Lambda}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Verdünnung.}$$

(Die Sterne sind natürlich so gemeint: Δ^* und Θ_1^* entstehen aus Δ und Θ_1 durch Weglassen aller S-Formeln der Gestalt $\mathfrak{B}$; Γ_1^*, Δ^{**} und Θ^* entstehen aus Γ_1, Δ^* und Θ durch Weglassen aller S-Formeln der Gestalt $\mathfrak{A}$.)

Wir haben diesmal zwei Mischungen, doch beide Mischformeln sind von kleinerem Grade als γ. Nun wenden wir die Induktionsannahme erst auf die obere Mischung an (d. h. auf den Herleitungsteil, dessen unterste Schlußfigur sie ist). Diese läßt sich also wegschaffen. Danach können wir ebenso die untere Mischung beseitigen.

3.12. Es sei $\varrho > 2$.

Wir unterscheiden zunächst zwei Hauptfälle: Die rechte Rangzahl sei größer als 1 (3.121), oder die rechte Rangzahl sei gleich 1 und daher die linke größer als 1 (3.122). Der zweite Fall wird sich im wesentlichen symmetrisch zum ersten erledigen lassen.

3.121. Die rechte Rangzahl sei größer als 1.

D. h.: Die rechte Obersequenz der Mischung ist Untersequenz einer Schlußfigur, wir bezeichnen diese mit $\mathfrak{Sf}$, und in mindestens einer Obersequenz von $\mathfrak{Sf}$ kommt $\mathfrak{M}$ im Antezedens vor.

Der Grundgedanke des Umwandlungsverfahrens ist folgender: Während der Fall $\varrho = 2$ im allgemeinen auf die Erledigung von Herleitungen kleineren Grades zurückgeführt wurde, werden wir jetzt eine Zurückführung auf die Erledigung von Herleitungen des gleichen Grades, aber kleineren Ranges, unternehmen, so daß wir dann die Induktionsannahme bezüglich ϱ anwenden können.

Lediglich der erste Fall, 3.121.1, macht eine Ausnahme, hier läßt sich nämlich die Mischung sofort ganz wegschaffen.

In den übrigen Fällen wird die Zurückführung auf Herleitungen kleineren Ranges in folgender Weise erreicht: Man verschiebt sozusagen die Mischung um eine Stufe nach oben, über die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}$ hinweg, genau gesagt (als besonders deutliches Beispiel betrachte man etwa den Fall 3.121.231): Die linke Obersequenz der Mischung (im folgenden stets mit $\Pi \to \Sigma$ bezeichnet), die zunächst neben der Untersequenz von $\mathfrak{Sf}$ steht, wird statt dessen neben die Obersequenzen von $\mathfrak{Sf}$ geschrieben, welche nun Obersequenzen von neuen Mischungen werden; und die Untersequenzen dieser Mischungen dienen dann als Obersequenzen einer neuen, an Stelle von $\mathfrak{Sf}$ tretenden Schlußfigur, durch die wir sofort oder nach Zufügung weiterer Schlußfiguren wieder zu der alten Endsequenz gelangen. Zu den neuen Mischungen gehört nun offenbar jeweils ein Rang, der kleiner als ϱ ist, denn die linke Rangzahl bleibt ungeändert und die rechte vermindert sich um mindestens 1.

Bei der genauen Durchführung dieses Grundgedankens ergeben sich noch verschiedene Besonderheiten, welche entsprechende Fallunterscheidungen und Sonderbehandlungen notwendig machen.

3.1211. $\mathfrak{M}$ komme im Antezedens der linken Obersequenz der Mischung vor. Das Ende der Herleitung lautet:

$$\frac{\Pi \to \Sigma \qquad \Delta \to \Lambda}{\Pi,\ \Delta^* \to \Sigma^*,\ \Lambda}\text{, in } \Pi \text{ kommt also } \mathfrak{M} \text{ vor.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\frac{\Delta \to \Lambda}{\Pi,\ \Delta^* \to \Sigma^*,\ \Lambda}$$ evtl. mehrmalige Verdünnung, Zusammenziehung und Vertauschung.

3.12 1.2. $\mathfrak{M}$ komme im Antezedens der linken Obersequenz der Mischung nicht vor. (Von dieser Voraussetzung werden wir erstmalig unter 3.12 1.222 Gebrauch machen.)

3.12 1.21. $\mathfrak{Sf}$ sei eine Verdünnung, Zusammenziehung oder Vertauschung im Antezedens. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma}{\Pi, \Xi^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \dfrac{\Psi \to \Theta}{\Xi \to \Theta}\ \mathfrak{Sf}}{}\ \text{Mischung.}$$

Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Psi \to \Theta}{\Pi, \Psi^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{Mischung}}{\Psi^*, \Pi \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung}}{\Xi^*, \Pi \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{s. u.}}{\Pi, \Xi^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung.}$$

Die unbezeichnete Schlußfigur ist von der gleichen Art wie $\mathfrak{Sf}$, sofern die im Schema von $\mathfrak{Sf}$ (1.21) mit $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ bezeichneten S-Formeln nicht gleich $\mathfrak{M}$ waren. War das $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{E}$ gleich $\mathfrak{M}$, so ist sie eine identische Schlußfigur (Ψ^* ist gleich Ξ^*).

Die Herleitung für die Untersequenz der neuen Mischung hat dieselbe linke Rangzahl wie die alte Herleitung, während ihre rechte Rangzahl um 1 kleiner ist. Also läßt sich die Mischung nach Induktionsannahme ganz wegschaffen.

3.12 1.22. $\mathfrak{Sf}$ sei eine Schlußfigur mit einer Obersequenz, doch keine Verdünnung, Zusammenziehung oder Vertauschung im Antezedens. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma}{\Pi, \Xi^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_2}\ \dfrac{\Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Xi, \Gamma \to \Omega_2}\ \mathfrak{Sf}}{}\ \text{Mischung.}$$

Dabei seien in Γ diejenigen S-Formeln zusammengefaßt, welche auch im Schema der Schlußfigur (1.21, 1.22) mit Γ bezeichnet sind. Ψ kann also leer sein oder aus einer Nebenformel der Schlußfigur bestehen, Ξ kann leer sein oder aus der Hauptformel der Schlußfigur bestehen.

Man wandelt das Ende der Herleitung zunächst um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Pi, \Psi^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_1}\ \text{Mischung}}{\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung u. Verdünnung.}}{\Xi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}$$

Die unterste Schlußfigur ist offenbar eine Schlußfigur von derselben Art wie $\mathfrak{Sf}$. (Man nimmt Γ^*, Π als das Γ der Schlußfigur, und rechnet Σ^* zu dem Θ der Schlußfigur.)

Etwas Aufmerksamkeit ist lediglich wegen der Variablenbedingung erforderlich (wenn $\mathfrak{Sf}$ eine AES oder EEA ist): Diese bleibt erfüllt auf Grund von 3.10 1, denn hiernach kann die etwaige Eigenvariable von $\mathfrak{Sf}$ in Π und Σ nicht vorgekommen sein.

In der neuen Herleitung läßt sich die Mischung nach Induktionsannahme wegschaffen.

Wir erhalten also eine mischungsfreie Herleitung mit folgender Schlußfigur am Ende:

$$\frac{\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}{\Xi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}.$$

Die Endsequenz ist im allgemeinen noch nicht diejenige, welche wir haben wollen.

Nun verfahren wir weiter wie folgt:

3.12 1.221. Ξ enthalte $\mathfrak{M}$ nicht.

Dann fügen wir noch evtl. mehrmalige Vertauschung an und erhalten die Endsequenz der ursprünglichen Herleitung.

3.12 1.222. Ξ enthalte $\mathfrak{M}$. Dann ist also Ξ die Hauptformel von $\mathfrak{Sf}$ und gleich $\mathfrak{M}$. Nun fügen wir an:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \mathfrak{M}, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}{\Pi, \Gamma^*, \Pi^* \to \Sigma^*, \Sigma^*, \Omega_2}\ \text{Mischung}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_2}\ \text{evtl. mehrmalige Zusammenziehung und Vertauschung.}$$

Dies ist wiederum die Endsequenz der ursprünglichen Herleitung. (Über $\Pi \to \Sigma$ schreiben wir noch einmal die zugehörige Herleitung.)

Wir haben nun abermals eine Mischung in der Herleitung. Die zugehörige linke Rangzahl ist die gleiche wie bei der ursprünglichen Herleitung. Die rechte Rangzahl ist nun gleich 1. Denn direkt über der rechten Obersequenz steht die Sequenz

$$\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1.$$

In deren Antezedens kommt $\mathfrak{M}$ nicht mehr vor. Denn Γ^* enthält $\mathfrak{M}$ nicht, Π ebenfalls nicht wegen 3.12 1.2, und Ψ enthält höchstens eine Nebenformel von $\mathfrak{Sf}$, diese kann nicht gleich $\mathfrak{M}$ sein, da ja die Hauptformel von $\mathfrak{Sf}$ gleich $\mathfrak{M}$ ist.

Also läßt sich auch diese Mischung nach Induktionsannahme wegschaffen.

3.12 1.23. $\mathfrak{Sf}$ sei eine Schlußfigur mit zwei Obersequenzen, also eine UES, OEA oder FEA.

(Mit Rücksicht auf die intuitionistische Anwendung (3.2) behandeln wir die einzelnen Möglichkeiten ausführlicher, als es für den klassischen Fall nötig wäre.)

3.12 1.231. $\mathfrak{Sf}$ sei eine UES. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\, UES}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\ \text{Mischung.}$$

($\mathfrak{M}$ kommt in Γ vor.) Man wandelt es um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A}}\ \text{Mischung} \qquad \dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{B}}\ \text{Mischung}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\, UES.$$

Beide Mischungen lassen sich nach der Induktionsannahme wegschaffen.

3.12 1.232. $\mathfrak{Sf}$ sei eine OEA. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}\, OEA}{\Pi, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{Mischung.}$$

($(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^*$ bedeute $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ oder gar nichts, je nachdem ob $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ungleich $\mathfrak{M}$ ist oder gleich $\mathfrak{M}$.)

$\mathfrak{M}$ kommt in Γ sicher vor. (Denn sonst wäre $\mathfrak{M}$ gleich $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, und die rechte Rangzahl wäre gleich 1, entgegen 3.121.)

Man wandelt das Ende der Herleitung zunächst um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\Pi, \mathfrak{A}^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{Mischung}}{\mathfrak{A}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \begin{matrix}\text{evtl. mehrmalige Ver-}\\ \text{tauschg. u. Verdünng.}\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\Pi, \mathfrak{B}^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{Mischung}}{\mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \begin{matrix}\text{evtl. mehrmalige Ver-}\\ \text{tauschg. u. Verdünng.}\end{matrix}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\, OEA.$$

Beide Mischungen lassen sich nach der Induktionsannahme wegschaffen.

Alsdann ist das Verfahren dasselbe wie unter 3.12 1.221 und 3.12 1.222. D. h. wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ungleich $\mathfrak{M}$ ist oder gleich $\mathfrak{M}$; im ersten Falle fügen wir evtl. mehrmalige Vertauschung an und erhalten so die Endsequenz der ursprünglichen Herleitung, im zweiten Falle fügen wir eine Mischung mit $\Pi \to \Sigma$ als linker Obersequenz an, und erhalten durch anschließende (evtl.) mehrmalige Zusammenziehung und Vertauschung wiederum die Endsequenz der ursprünglichen Herleitung. Die betreffende Mischung läßt sich wegschaffen, da die zugehörige rechte Rangzahl gleich 1 ist. (Alles wie unter 3.12 1.222.)

3.12 1.233. $\mathfrak{Sf}$ sei eine FEA. Dann lautet das Ende der Herleitung:

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\, FEA}{\Pi, (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})^*, \Gamma^*, \Delta^* \to \Sigma^*, \Theta, \Lambda}\ \text{Mischung.}$$

3.12 1.233.1. $\mathfrak{M}$ komme in Γ und Δ vor.

Dann wandelt man das Ende der Herleitung zunächst um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A}}\,\text{Mischung} \quad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\Pi, \mathfrak{B}^*, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\,\left\{\begin{array}{l}\text{Mischung}\\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Verdünnung}\end{array}\right.}{\mathfrak{B}, \Pi, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\,FEA}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^*, \Pi, \Delta^* \to \Sigma^*, \Theta, \Sigma^*, \Lambda}$$

Beide Mischungen lassen sich nach der Induktionsannahme wegschaffen. Danach folgt das gleiche Verfahren wie unter 3.12 1.221 und 3.12 1.222. (Es können lediglich im ersten Falle außer Vertauschungen noch Zusammenziehungen notwendig werden.)

3.12 1.23 3. 2. $\mathfrak{M}$ komme nicht in Γ und in Δ zugleich vor. In einem von beiden muß $\mathfrak{M}$ wegen 3.121 vorkommen. Wir führen den Fall, daß $\mathfrak{M}$ in Δ, doch nicht in Γ vorkommt, aus, der andere erledigt sich analog.

Man wandelt das Ende der Herleitung um zu:

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\Pi, \mathfrak{B}^*, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\,\left\{\begin{array}{l}\text{Mischung}\\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Verdünnung}\end{array}\right.}{\mathfrak{B}, \Pi, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\,FEA}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Pi, \Delta^* \to \Theta, \Sigma^*, \Lambda}$$

Die Mischung läßt sich nach Induktionsannahme wegschaffen. Danach folgt das gleiche Verfahren wie unter 3.12 1.221 und 3.12 1.222. (Im zweiten Falle, also wenn $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ gleich $\mathfrak{M}$ ist, ist die zu der neuen Mischung gehörige rechte Rangzahl wie immer gleich 1, da ja $\mathfrak{M}$ sowohl in $\mathfrak{B}$, Π, Δ^* aus den üblichen Gründen nicht vorkommt, als auch nicht in Γ gemäß der Voraussetzung des behandelten Falles.)

3.122. Die rechte Rangzahl sei gleich 1. Dann ist die linke Rangzahl größer als 1.

Dieser Fall ist im wesentlichen spiegelbildlich zu 3.121 zu erledigen. Man muß nur auf die Schlußfiguren ohne symmetrisches Gegenstück, nämlich FES und FEA, achten. Nun wurden unter 3.12 1.22 die Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ mit einer Obersequenz in das allgemeine Schema:

$$\frac{\Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Xi, \Gamma \to \Omega_2}$$

eingeordnet. Das spiegelbildliche Schema lautet:

$$\frac{\Omega_1 \to \Gamma, \Psi}{\Omega_2 \to \Gamma, \Xi},$$

und diesem fügt sich auch eine FES ohne weiteres ein. (Γ vertritt jetzt die in den Schemata 1.21, 1.22 mit Θ bezeichneten Formeln.)

3.12 2.1. Dagegen wollen wir den Fall, daß die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}$ eine FEA ist, gesondert durchführen. Die Behandlung ist zwar ganz ähnlich wie unter 3.12 1.233, doch nicht völlig spiegelbildlich. Also:

Das Ende der Herleitung lautet:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\, FEA \qquad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Lambda^*, \Pi}\ \text{Mischung}$$

3.12 2.11. $\mathfrak{M}$ komme in Θ und Λ vor.

Dann wandelt man das Ende der Herleitung um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Sigma \to \Pi}{\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \mathfrak{A}^*, \Pi}\ \text{Mischung}}{\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi, \mathfrak{A}}\ \left|\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Vertau-}\\ \text{schung und Verdünnung}\end{array}\right. \qquad \dfrac{\mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda \quad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{B}, \Delta, \Sigma^* \to \Lambda^*, \Pi}\ \text{Mischung}\ FEA}{\dfrac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma^*, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi, \Lambda^*, \Pi}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Lambda^*, \Pi}\ \left|\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Zusammen-}\\ \text{ziehung und Vertauschung}\end{array}\right.}$$

Beide Mischungen lassen sich nach der Induktionsannahme wegschaffen.

3.12 2.12. $\mathfrak{M}$ komme nicht in Θ und in Λ zugleich vor. In einem von beiden muß $\mathfrak{M}$ vorkommen. Wir führen den Fall, daß $\mathfrak{M}$ in Λ, doch nicht in Θ vorkommt, aus, der andere erledigt sich analog.

Man wandelt das Ende der Herleitung um zu:

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \dfrac{\mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda \quad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{B}, \Delta, \Sigma^* \to \Lambda^*, \Pi}\ \text{Mischung}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta, \Lambda^*, \Pi}\ FEA$$

Die Mischung läßt sich nach der Induktionsannahme wegschaffen. —

3.2. Beweis des Hauptsatzes für LJ-Herleitungen.

Um eine LJ-Herleitung in eine LJ-Herleitung ohne Schnitte umzuwandeln, wendet man genau das gleiche Verfahren an wie für LK-Herleitungen.

Da eine LJ-Herleitung eine spezielle LK-Herleitung ist, so ist es klar, daß sich die Umwandlungen durchführen lassen. Wir haben uns nur noch davon zu überzeugen, daß bei jedem Umwandlungsschritt aus einer LJ-Herleitung auch wieder eine LJ-Herleitung wird; d. h. daß die H-Sequenzen der umgewandelten Herleitung jeweils höchstens eine S-Formel im Sukzedens haben, vorausgesetzt, daß dies zuvor der Fall war.

Wir betrachten also die einzelnen Umwandlungsschritte daraufhin.

3.21. Die Ersetzung der Schnitte durch Mischungen. Ein LJ-Schnitt lautet:

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{T} \quad \mathfrak{V}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Lambda},$$

wobei A höchstens eine S-Formel enthält. Dieser war umzuwandeln zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Lambda}\ \text{Mischung}}{\Gamma, \Delta \to \Lambda}\ \left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Vertauschung und}\\ \text{Verdünnung im Antezedens.}\end{array}\right.$$

Bei dieser Ersetzung entsteht also wieder eine LJ-Herleitung.

3.22. Durch Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen (3.10) geht eine LJ-Herleitung trivialerweise wieder in eine solche über.

3.23. Die eigentliche Umwandlung (3.11 und 3.12).

Wir haben an jedem einzelnen der Fälle 3.111 bis 3.12 2.12 nachzuweisen, daß durch die dort angegebenen Umwandlungen keine Sequenzen mit mehr als einer S-Formel im Sukzedens neu auftreten.

3.231. Zunächst die Fälle 3.11:

In den Fällen 3.111, 3.11 3.1, 3.11 3.31, 3.11 3.35 und 3.11 3.36 kommen in jedem Sequenz-Sukzedens der neuen Herleitung nur solche Formeln vor, die bereits in einem Sequenz-Sukzedens der alten Herleitung vorkamen.

In dem Falle 1.11 3.33 gilt im wesentlichen das gleiche, doch kommt noch eine Ersetzung von freien Gegenstandsvariablen hinzu, diese ändert natürlich nichts an der Anzahl der Sukzedensformeln einer Sequenz.

Die Fälle 3.112, 3.11 3.2, 3.11 3.32 und 3.11 3.34 wurden symmetrisch zu den Fällen 3.111, 3.11 3.1, 3.11 3.31 und 3.11 3.33 behandelt. D. h.: Um den einen Fall aus dem anderen zu erhalten, hat man die Schemata von rechts nach links statt von links nach rechts zu lesen (sowie logische Zeichen zu ändern, was hier keine Rolle spielt). In dem einen Falle steht also genau das im Antezedens, was in dem anderen Falle im Sukzedens steht. Nun gilt für die Antezedentia in den Fällen 3.111, 3.11 3.1, 3.11 3.31 und 3.11 3.33 dasselbe wie für die Sukzedentia, nämlich: Es kommen in jedem Sequenz-Antezedens der neuen Herleitung nur solche Formeln vor, die bereits in einem Sequenz-Antezedens der alten Herleitung vorkamen.

Damit sind die hierzu spiegelbildlichen Fälle 3.112, 3.11 3.2, 3.11 3.32 und 3.11 3.34 erledigt.

3.232. Nun die Fälle 3.12:

3.23 2.1. In den Fällen 3.121 gilt allgemein: Σ^* ist leer, denn in $\Pi \to \Sigma$ darf Σ nur eine Formel enthalten, und diese muß gleich $\mathfrak{M}$ sein.

Nunmehr sieht man leicht, daß wieder in jedem Sequenz-Sukzedens der neuen Herleitung nur solche Formeln vorkommen, die bereits in einem Sequenz-Sukzedens der alten Herleitung vorkamen.

3.23 2.2. In den Fällen 3.122 ist es etwas schwieriger einzusehen, daß aus einer LJ-Herleitung immer wieder eine LJ-Herleitung wird. Wir

haben, wie schon oben bei der Betrachtung spiegelbildlicher Fälle, unser Augenmerk auf die Antezedentia in den Schemata 3.121 zu richten.

Wir nehmen eine weitere Unterteilung vor.

3.2321. Der zu 3.1211 spiegelbildliche Fall ist trivial, es kommen ja in jedem Sequenz-Antezedens der neuen Herleitung (im Falle 3.1211) wiederum nur solche Formeln vor, die bereits in einem Sequenz-Antezedens der alten Herleitung vorkamen.

3.2322. In den zu 3.1212 spiegelbildlichen Fällen lautet die Mischung am Ende der Herleitung:

$$\frac{\Omega \to \mathfrak{M} \quad \Sigma \to \Pi}{\Omega, \Sigma^* \to \Pi},$$

dabei enthält Π höchstens eine S-Formel, und $\Omega \to \mathfrak{M}$ ist Untersequenz einer LJ-Schlußfigur, von der mindestens eine Obersequenz $\mathfrak{M}$ als Sukzedensformel hat. Betrachten wir nun die Schlußfigurenschemata 1.21, 1.22, so ist leicht ersichtlich, daß eine solche Schlußfigur nur Verdünnung, Zusammenziehung oder Vertauschung im Antezedens, oder OEA, UEA, EEA, AEA, FEA sein kann. Lassen wir zunächst OEA und FEA beiseite, so fallen alle diese Möglichkeiten unter den zu 3.1212.122 spiegelbildlichen Fall, und offenbar sind Ψ und Ξ dabei immer leer. (Γ entspricht dem Θ der Schlußfigur.) Man hat also den zu 3.1212.1221 spiegelbildlichen Fall. Nun ist ferner Γ gleich $\mathfrak{M}$, also Γ^* leer, und Π enthält höchstens eine Formel. Demnach kommt in der Tat in der neuen Herleitung nie mehr als eine Formel im Sukzedens einer Sequenz vor.

Der Fall OEA ist spiegelbildlich zu 3.1212.2312. Wieder ist Γ gleich $\mathfrak{M}$, Γ^* leer, Π enthält höchstens eine Formel, also ist alles in Ordnung.

Nun bleibt noch der Fall FEA, d. h. 3.1222.12. Bei einer LJ-FEA ist das Θ des Schemas (1.22) leer. Also liegt der unter 3.1222.12 ausgeführte Fall vor. Λ^* ist ebenfalls leer, und Π enthält höchstens eine Formel, also entsteht auch hier aus einer LJ-Herleitung wieder eine LJ-Herleitung.

(Eingegangen am 21. Juli 1933.)

Note on an arithmetical property of recurring series.

Von

Morgan Ward in Pasadena.

1. In 1921, Siegel[1]) proved by the use of Thue's theorem a result equivalent to the following:

"If the sequence

$$(U) \qquad U_0, U_1, U_2, \ldots$$

is a rational solution of the difference equation

$$(1.1) \qquad \Omega_{n+3} = P\Omega_{n+2} - Q\Omega_{n+1} + \Omega_n, \quad P, Q \text{ rational integers,}$$

then only a finite number of terms of the sequence can vanish unless the polynomial

$$(1.2) \qquad F(x) = x^3 - Px^2 + Qx \pm 1$$

associated with (1.1) is of one or the other of the forms

$$(x \pm 1)(x^2 + 1) \qquad \text{or} \qquad (x \pm 1)(x^2 \pm x + 1)".$$

I wish to show here that as a simple consequence of the fundamental results of Delaunay[2]) and Nagell[3]) concerning the solution of the cubic diophantine equation

$$(1.3) \qquad \Phi(u, v) = Au^3 + Bu^2v + Cuv^2 + Dv^3 = 1,$$

A, B, C, D rational integers,

that in general at most *three* terms of the sequence (U) can vanish provided that the discriminant of the associated polynomial is negative[4]).

2. For let us assume that the polynomial $F(x)$ is irreducible in the field of rationals, has a negative discriminant, and that the sequence (U) contains $N \geqq 1$ vanishing terms. Without affecting N, we may assume that the constant Term of $F(x)$ is $+1$, and that the first non-vanishing term of (U) is U_0, and that U_1 and U_2 are co-prime integers.

If $(X), (Y), (Z)$ denote those particular solutions of (1.1) with the initial values $1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1$ respectively, then it is easily shown that $U_n = U_0X_n + U_1Y_n + U_2Z_n$, $\alpha^n = X_n + Y_n\alpha + Z_n\alpha^2$, $n = 0, 1, \ldots,$

[1]) Tohoku Journal 20 (1921), S. 26—31.

[2]) Compt. Rend. 171 (1920), S. 136.

[3]) Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 10—29.

[4]) If the discriminant of $F(x)$ is positive, so that all the roots of $F(x) = 0$ are real, the finiteness of the number of zeros in the sequence (U) is trivial, and extends to the case when P, Q, U_0, U_1, U_2 are real numbers and the constant term of $F(x)$ is not unity.

where α is any root of $F(x) = 0$. Since $U_0 = 0$, $(U_1, U_2) = 1$, $U_n = 0$ when and only when $Y_n = U_2 T_n$, $Z_n = -U_1 T_n$, T_n an integer. Thus $U_n = 0$ when and only when the norm of the algebraic integer $X_n + T_n(U_2\alpha - U_1\alpha^2)$ is unity; that is when and only when

$$A X_n^3 + B X_n^2 T_n + C X_n T_n^2 + D T_n^3 = 1 \tag{2.1}$$

where

$$A = 1, \qquad C = Q U_2^2 + (3 - PQ) U_1 U_2 + (Q^2 - 2P) U_1^2,$$

$$B = P U_2^2 + (2Q - P^2) U_1, \quad D = U_2^3 - P U_2^2 U_1 + Q U_2 U_1^2 - U_1^3.$$

Hence $u = X_n$, $v = T_n$ is a solution of the diophantine equation (1.2).

Owing to our hypotheses upon $F(x)$, the form $\Phi(u, v)$ is irreducible and has a negative discriminant. Therefore, by Nagell's main theorem[5]), the diophantine equation has at most three integral solutions unless the form $\Phi(u, v)$ is equivalent to $u^3 + u v^2 + v^3$ or $u^3 - u^2 v + u v^2 + v^3$, when it has exactly four solutions, or to $u^3 - u^2 v + v^3$ when it has exactly five solutions.

Since $F(x)$ is irreducible, we cannot have $X_n = X_{n'}$, $T_n = T_{n'}$ unless $n = n'$. Hence the sequence (U) has in general at most three vanishing terms, and never more than five if the discriminant of $F(x)$ is negative.

3. It is possible to obtain a result analagous to Siegel's for the quartic difference equation

$$\Omega_{n+4} = P\Omega_{n+3} - Q\Omega_{n+2} + R\Omega_{n+1} \pm \Omega_n, \quad P, Q, R \text{ rational integers} \tag{3.1}$$

by a similar use of Thue's theorem; namely,

"If the sequence

$$V_0, V_1, V_2, \ldots \tag{V}$$

is a rational solution of the difference equation (3.1), and if a is a fixed positive integer, then there are only a finite number of *pairs* of terms

$$V_{n_1}, V_{n_1+a};\ V_{n_2}, V_{n_2+a};\ V_{n_3}, V_{n_3+a};\ \ldots \qquad n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

of the sequence (V) can vanish, provided that the associated polynomial

$$G(x) = x^4 - P x^3 + Q x^2 - R x \pm 1 \tag{3.2}$$

is irreducible, and that its roots cannot be obtained by solving a chain of quadratic equations".

We may assume that V_0, V_a is the first pair of terms of (V) to vanish, and that V_1, V_2, V_3 are co-prime rational integers.

---

[5]) Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 10.

Let $(X), (Y), (Z), (W)$ denote now the four particular solutions of (3.1) with the initial values $1,0,0,0$; $0,1,0,0$; $0,0,1,0$; $0,0,0,1$; respectively. Then it may be shown by induction that

$$V_n = V_0 X_n + V_1 Y_n + V_2 Z_n + V_3 W_n,$$
$$V_{n+a} = V_a X_n + V_{a+1} Y_n + V_{a+2} Z_n + V_{a+3} W_n,$$
$$\alpha^n = X_n + Y_n \alpha + Z_n \alpha^2 + W_n \alpha^3,$$

where α denotes any root of $G(x) = 0$.

Thus $V_n = V_{n+a} = 0$ when and only when

$$V_1 Y_n + V_2 Z_n + V_3 W_n = 0, \quad V_{a+1} Y_n + V_{a+2} Z_n + V_{a+3} W_n = 0,$$

or

$$Y_n = T_n L, \quad Z_n = T_n M, \quad W_n = T_n N, \tag{3.3}$$

where

$$L = V_2 V_{a+3} - V_3 V_{a+2}, \quad M = V_3 V_{a+1} - V_1 V_{a+3},$$
$$N = V_1 V_{a+2} - V_2 V_{a+1},$$

and T_n is a rational fraction in its lowest terms.

It is impossible for L, M, N all to vanish; for then $Y_n = Z_n = W_n = 0$ and $\alpha^n = X_n$, or since (3.2) is irreducible,

$$\alpha_1^n = \alpha_2^n = \alpha_3^n = \alpha_4^n = X_n$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ are the roots of $G(x) = 0$. Thus

$$\pm 1 = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^n = \alpha_1^{4n} = \alpha_2^{4n} = \alpha_3^{4n} = \alpha_4^{4n}$$

and $G(x)$ is cyclotomic, so that its roots may be obtained by solving two quadratic equations.

Accordingly, L, M, N have a greatest common divisor D, and we may write $L = DL'$, $M = DM'$, $N = DN'$, where $(L', M', N') = 1$. Since Y_n, Z_n, W_n are integers, the denominator of T_n must divide L, M, N and hence D. We may therefore replace (3.3) by

$$Y_n = S_n L', \quad Z_n = S_n M', \quad W_n = S_n N'$$

where S_n is an integer $\neq 0$. Thus $V_n = V_{n+a} = 0$ when and only when

$$\alpha^n = X_n + S_n \beta, \quad \text{or} \quad \alpha_i^n = X_n + S_n \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

where

$$\beta_i = L' \alpha_i + M' \alpha_i^2 + N' \alpha_i^3.$$

Let

$$H(u, v) = (u - \beta_1 v)(u - \beta_2 v)(u - \beta_3 v)(u - \beta_4 v)$$
$$= u^4 + H_1 u^3 v + \ldots + H_4.$$

Then $H_1, \ldots, H_4$ are rational integers, and, from what we have just shown, $V_n = V_{n+a} = 0$ when and only when $u = X_n, v = -S_n$ is a solution of the diophantine equation $H(u, v) = \pm 1$.

By Thue's theorem, this equation has only a finite number of solutions provided that the polynomial $H(u, v)$ is irreducible. In view of

the irreducibility of $G(x)$, everything will be proved then if we can show that $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ are all distinct.

We cannot have $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$, for then $\alpha_1^n = \alpha_2^n = \alpha_3^n = \alpha_4^n$ which we have seen to be impossible. Suppose that $\beta_1 = \beta_2$. Since $G(x)$ is irreducible, we then have necessarily $\beta_3 = \beta_4$, or since $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ are distinct,

$$L' + M'(\alpha_1 + \alpha_2) + N'(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = 0,$$
$$L' + M'(\alpha_3 + \alpha_4) + N'(\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4^2) = 0.$$

Let $\alpha_1\alpha_2 = \Phi_1$, $\alpha_3\alpha_4 = \Phi_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \Theta_1$, $\alpha_3 + \alpha_4 = \Theta_2$. On adding the equations above, we obtain

$$N'(\Phi_1 + \Phi_2) + N(P^2 - 2Q) + M'P + 2L' = 0.$$

Hence $\Phi_1 + \Phi_2$ is rational. Since $\Phi_1\Phi_2 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \pm 1$ is rational, we obtain the roots of $G(x) = 0$ by solving the chain of quadratic equations

$$\Phi^2 - (\Phi_1 + \Phi_2)\Phi + \Phi_1\Phi_2 = 0,$$
$$N'\Theta^2 + M'\Theta + (L' - N'\Phi) = 0,$$
$$\alpha^2 - \Theta\alpha + \Phi = 0,$$

contradicting our initial hypothesis obout $G(x)$.

It is clear that the method may be extended to obtain theorems about triplets of vanishing terms in a solution of a linear difference equation of order five, and so on.

Pasadena, September 1933.

(Eingegangen am 28. Oktober 1933.)

Über das Maximum des absoluten Betrages von

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx.$$

Von

Gerhard Grüss in Berlin.

Verschiedene Aufgaben der technischen Physik geben zu der im folgenden untersuchten Frage Anlaß, um wieviel sich das Integralmittel des Produktes zweier Funktionen vom Produkt der Integralmittel der beiden Faktoren höchstens unterscheiden kann, d. h. zu einer Abschätzung von

$$\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \right|.$$

Wenn es sich z. B. darum handelt, die Wärmeabgabe eines Heizkörpers während einer Zeitspanne $t_1 \leqq t \leqq t_2$ zu messen, müßte eigentlich das Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,g(t)\,dt$ bestimmt werden, worin $f(t)$ die Temperaturdifferenz des Wassers zwischen Vor- und Rücklauf bedeutet und $g(t)$ die in der Zeiteinheit ein- und ausströmende Wassermenge. Nun ist es aber meßtechnisch einfacher, $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$ und $\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt$ für sich zu bestimmen, und damit ist die oben angedeutete Frage unmittelbar gegeben.

Von allgemeinerer Bedeutung, weil in den mannigfachsten Zusammenhängen wiederkehrend, ist das folgende Beispiel. Die Funktion $g(t) = 1 + p(t)$ bedeutet einen zeitlich veränderlichen Korrektionsfaktor für die Funktion $f(t)$, d. h. statt des vom Meßinstrument gelieferten fehlerhaften Wertes $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$ interessiert eigentlich das Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,(1 + p(t))\,dt$, und es fragt sich, wie weit dieser Wert durch das

Produkt der Integrale $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$ und $\int_{t_1}^{t_2} (1 + p(t))\,dt$ approximiert werden kann[1]).

Von den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ soll zunächst nur vorausgesetzt werden, daß sie im Bereich $a \leqq x \leqq b$ eigentlich integrabel im Sinne Riemanns sind. Indem man $\xi = \frac{x-a}{b-a}$ als neue Veränderliche einführt, erhält man

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f(a + \xi(b-a))\,d\xi = \int_0^1 f^*(\xi)\,d\xi$$

usf. Wenn man also nach der Substitution wieder ξ durch x, f^* durch f usf. ersetzt, besteht die Aufgabe darin, den Ausdruck

$$D(f,g) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx$$

abzuschätzen. Man betrachte nun zunächst den durch die Annahmen

(1) $$f(x) = g(x)$$

und

(2) $$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

charakterisierten Sonderfall, und es sei

(3) $$\varphi \leqq f(x) \leqq \Phi \qquad \text{für } 0 \leqq x \leqq 1.$$

Dann ist

(4) $$f(x) = \varphi + (\Phi - \varphi)\,\vartheta(x),$$

und die Funktion $\vartheta(x) = \frac{f(x)-\varphi}{\Phi-\varphi}$ (der Fall $\Phi = \varphi$ kann offensichtlich hier wie stets im folgenden außer acht gelassen werden) ist im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ integrabel, und es gilt

(5) $$0 \leqq \vartheta(x) \leqq 1.$$

Nun ist

(6) $$D(f,f) = \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

$$= \varphi^2 + 2\varphi(\Phi - \varphi)\int_0^1 \vartheta(x)\,dx + (\Phi-\varphi)^2 \int_0^1 \vartheta^2(x)\,dx,$$

---

[1]) So ging auch die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung von der Praxis aus. Mein Bruder, H. Grüss, Physiker im Wernerwerk M der Siemens und Halske A. G., vermutete die Richtigkeit der Abschätzungsformel (18). Vgl. Der Chemie-Ingenieur, Bd. II, Teil III, S. 215.

und wenn man (2) und (5) beachtet:

$$(7) \qquad \int_0^1 \vartheta^2(x)\,dx \leqq \int_0^1 \vartheta(x)\,dx = -\frac{\varphi}{\Phi-\varphi}.$$

Aus (6) und (7) folgt

$$(8) \qquad D(f,f) \leqq -\varphi\Phi = \tfrac{1}{4}\{(\Phi-\varphi)^2-(\Phi+\varphi)^2\} \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi)^2.$$

Um eine von der Voraussetzung (2) unabhängige Schranke für $D(f,f)$ zu finden, setze man im Fall $\int_0^1 f(x)\,dx = F \neq 0$ $f_1(x) = f(x) - F$. Dann ist $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$ und $\varphi - F \leqq f_1(x) \leqq \Phi - F$ für $0 \leqq x \leqq 1$. Also folgt aus (8)

$$(9) \qquad D(f_1,f_1) \leqq (\Phi-F)(F-\varphi) = \tfrac{1}{4}\{(\Phi-\varphi)^2-(\Phi+\varphi-2F)^2\} \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi)^2$$

Nun ist aber

$$0 \leqq D(f_1,f_1) = \int_0^1 (f(x)-F)^2\,dx = \int_0^1 f^2\,dx - F^2 = D(f,f),$$

wie überhaupt $D(f+\text{const},\ g+\text{Const}) = D(f,g)$ gilt. Also liefert (9)

$$(10) \qquad 0 \leqq D(f,f) \leqq (\Phi-F)(F-\varphi),$$

d. h.

$$(11) \qquad \int_0^1 f^2\,dx \leqq (\varphi+\Phi)\int_0^1 f\,dx - \varphi\Phi$$

und endlich als eine von dem Wert $F = \int_0^1 f\,dx$ unabhängige Schranke für $D(f,f)$

$$(12) \qquad D(f,f) \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi)^2.$$

Die Abschätzung von $D(f,f)$ durch die Ungleichung (10) ist im allgemeinen genauer als die durch die Schranke (12); (10) und (12) stimmen nur überein, wenn $F = \frac{1}{2}(\varphi+\Phi)$ ist.

Nun mögen zwei verschiedene im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ eigentlich integrable Funktionen $f(x)$ und $g(x)$: $\varphi \leqq f(x) \leqq \Phi$, $\gamma \leqq g(x) \leqq \Gamma$ gegeben sein. Dann ist

$$(13) \qquad D(f,g) = \int_0^1 fg\,dx - \int_0^1 f\,dx \int_0^1 g\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\left\{\int_0^1 [(f+g)^2-(f-g)^2]\,dx - 4\int_0^1 f\,dx \int_0^1 g\,dx\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\int_0^1 f\,dx = F$, $\int_0^1 g\,dx = G$ und schätzt $\int_0^1 (f+g)^2\,dx$ mit Hilfe der Ungleichheit (12) ab, so erhält man

$$D(f,g) \leqq \tfrac{1}{4}\left\{\tfrac{1}{4}(\Phi+\Gamma-\varphi-\gamma)^2 + \left(\int_0^1 (f+g)\,dx\right)^2 - \int_0^1 (f-g)^2\,dx - 4FG\right\},$$

$$(14)\quad D(f,g) \leqq \tfrac{1}{16}(\Phi+\Gamma-\varphi-\gamma)^2 + \tfrac{1}{4}\left\{(F-G)^2 - \int_0^1 (f-g)^2\,dx\right\}.$$

Nun ist aber

$$(15)\quad \int_0^1 (f-g)^2\,dx \geqq \left(\int_0^1 (f-g)\,dx\right)^2 = (F-G)^2,$$

also liefert (14)

$$(16)\quad D(f,g) \leqq \tfrac{1}{16}(\Phi+\Gamma-\varphi-\gamma)^2 = \tfrac{1}{4}\{(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma) + \tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi-\Gamma+\gamma)^2\}.$$

Wenn nun speziell $\Phi-\varphi = \Gamma-\gamma$ gilt, ist die Ungleichung (16) mit

$$(17)\quad D(f,g) \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma)$$

identisch; aber auch wenn $\Phi-\varphi \neq \Gamma-\gamma$ ist, läßt sich die Abschätzung (17) beweisen; sie stellt dann eine Verbesserung gegenüber (16) dar. Dazu setze man

$$p = +\sqrt{\frac{\Gamma-\gamma}{\Phi-\varphi}},\quad q = +\sqrt{\frac{\Phi-\varphi}{\Gamma-\gamma}} \quad\text{und}\quad f_1(x) = p\cdot f(x),\quad g_1(x) = q\cdot g(x)$$

und erhält

$$\varphi_1 = p\varphi \leqq f_1(x) \leqq p\Phi = \Phi_1,\quad \gamma_1 = q\gamma \leqq g_1(x) \leqq q\Gamma = \Gamma_1,$$

also

$$\Phi_1-\varphi_1 = \Gamma_1-\gamma_1 = +\sqrt{(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma)}.$$

Daher liefert (17)

$$D(f_1,g_1) = pq\,D(f,g) = D(f,g) \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi_1-\varphi_1)(\Gamma_1-\gamma_1)$$

oder

$$(17)\quad D(f,g) \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma)$$

unabhängig von der Voraussetzung $\Phi-\varphi = \Gamma-\gamma$. Während $D(f,f) \geqq 0$ ist, wie oben gezeigt wurde, kann natürlich $D(f,g)$ auch negativ sein; man sieht aber sofort, daß die rechte Seite von (17) eine Schranke für $|D(f,g)|$ ist; denn wenn man etwa $f(x)$ durch $-f(x)$ ersetzt, liefert (17)

$$D(-f,g) = -D(f,g) \leqq \tfrac{1}{4}(-\varphi+\Phi)(\Gamma-\gamma),$$

also

$$D(f,g) \geqq -\tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma).$$

Wenn

$$f(x) = \begin{cases} \varphi & 0 \leqq x < \tfrac{1}{2} \\ \Phi & \tfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases},\quad g(x) = \begin{cases} \gamma & 0 \leqq x < \tfrac{1}{2} \\ \Gamma & \tfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

ist, erhält man $D(f,g) = \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$. Also ist folgender Satz bewiesen:

Für irgend zwei im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ *eigentlich integrable Funktionen* $f(x)$ *und* $g(x)$ $(\varphi \leqq f(x) \leqq \Phi,\ \gamma \leqq g(x) \leqq \Gamma)$ *gilt*

$$|D(f,g)| \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma). \tag{18}$$

Der Faktor $\frac{1}{4}$ *kann durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.*

Beim Übergang von Gleichung 13 zu Ungleichung 14 wurde zur Abschätzung von $\int_0^1 (f+g)^2\,dx$ die Formel 12 benutzt; verwendet man an ihrer Stelle die im allgemeinen genauere Formel 11, so gelangt man zu einer Schranke für $D(f,g)$, die im allgemeinen kleiner ist als $\frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$, dafür aber außer von φ, Φ, γ, Γ noch von den Integralwerten F und G abhängt. Von dem anfangs charakterisierten Standpunkt der Anwendungen aus gesehen ist diese Verbesserung der Abschätzung von $D(f,g)$ durchaus sinnvoll, weil ja die Integrale F und G durch die Messungen gegeben sind.

Aus (11) und (13) folgt

$$D(f,g) \leqq \tfrac{1}{4}\Big\{(\varphi + \Phi + \gamma + \Gamma)(F+G) - (\varphi+\gamma)(\Phi+\Gamma) - \int_0^1 (f-g)^2\,dx - 4FG\Big\},$$

und wenn man wieder (15) beachtet, erhält man

$$D(f,g) \leqq \sigma = \tfrac{1}{4}\{(\varphi+\gamma+\Phi+\Gamma)(F+G) - (\varphi+\gamma)(\Phi+\Gamma) - (F+G)^2\}. \tag{19}$$

Nun ist

$$\frac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma) - \sigma = \frac{1}{4}\Big(F+G-\frac{\varphi+\gamma+\Phi+\Gamma}{2}\Big)^2 - \frac{1}{16}(\Phi-\varphi-\Gamma+\gamma)^2,$$

also $\sigma < \frac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma)$, wenn $F+G \neq \frac{1}{2}(\varphi+\gamma+\Phi+\Gamma)$ und $\Phi-\varphi = \Gamma-\gamma$ gilt. Wenn die letzte Bedingung nicht erfüllt ist, setze man wieder

$$f_1(x) = p f(x) = +\sqrt{\frac{\Gamma-\gamma}{\Phi-\varphi}}\, f(x), \quad g_1(x) = q\,g(x) = +\sqrt{\frac{\Phi-\varphi}{\Gamma-\gamma}}\, g(x). \tag{20}$$

Dann folgt aus (19)

$$D(f_1,g_1) = D(f,g) \leqq \sigma_1 = \tfrac{1}{4}\{(p[\varphi+\Phi]+q[\gamma+\Gamma])(pF+qG) - (p\varphi+q\gamma)(p\Phi+q\Gamma) - (pF+qG)^2\}, \tag{21a}$$

und da $\Phi_1 - \varphi_1 = \Gamma_1 - \gamma_1 = \sqrt{(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma)}$ ist, gilt

$$\sigma_1 \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi_1-\varphi_1)(\Gamma_1-\gamma_1) = \tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma), \tag{22}$$

und das Gleichheitszeichen in (22) trifft nur zu, wenn

$$F_1 + G_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \Phi_1 + \gamma_1 + \Gamma_1) \tag{23a}$$

gilt.

Ersetzt man in (21a) $f(x)$ durch $-f(x)$, so erhält man

$$D(-f, g) = -D(f, g) \leqq \sigma_2 = \tfrac{1}{4}\{(-p[\varphi + \Phi] + q[\gamma + \Gamma])(-pF + qG) - (-p\Phi + q\gamma)(-p\varphi + q\Gamma) - (-pF + qG)^2\}, \tag{21b}$$

und es ist dann und nur dann nicht $\sigma_2 < \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$, wenn

$$-F_1 + G_1 = \tfrac{1}{2}(-\varphi_1 - \Phi_1 + \gamma_1 + \Gamma_1) \tag{23b}$$

gilt.

Die aus (21a) und (21b) *folgende Abschätzung von* $|D(f, g)|$

$$-\sigma_2 \leqq D(f, g) \leqq \sigma_1 \tag{24}$$

ist also immer dann genauer als die der Formel (18), *wenn die Gleichungen* (23a) *und* (23b) *nicht erfüllt sind, d. h. wenn*

$$\frac{\varphi + \Phi - 2F}{\Phi - \varphi} \pm \frac{\gamma + \Gamma - 2G}{\Gamma - \gamma} \neq 0$$

ist[2]).

Bisher wurde von den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nur vorausgesetzt, daß sie im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel seien. Es liegt daher nahe zu fragen, ob die Abschätzung von $D(f, g)$ nicht verbessert, insbesondere: ob der Faktor $\frac{1}{4}$ in der Ungleichheit (18) nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann, wenn man $f(x)$ und $g(x)$ strengeren Voraussetzungen unterwirft. Daß es hierfür allerdings nicht genügt, $f(x)$ und $g(x)$ als stetig vorauszusetzen, geht aus dem oben angeführten Beispiel sofort hervor. Dagegen kann man, wie im folgenden noch gezeigt werden soll, eine spezielle Klasse stetiger Funktionen angeben, die eine wesentlich schärfere Abschätzung der Differenz der Integralmittelwerte gestattet[3]).

---

[2]) Auf eine noch wirksamere Verschärfung der Abschätzung 18 hat mich freundlicherweise Herr M. Krafft in Marburg brieflich aufmerksam gemacht. Es ist

$$D(f, g) \leqq \tfrac{1}{4}\sqrt{(\Phi - \varphi)^2 - (\Phi + \varphi - 2F)^2} \cdot \sqrt{(\Gamma - \gamma)^2 - (\Gamma + \gamma - 2G)^2}. \tag{*}$$

Da die rechte Seite gleich $\sqrt{(\Phi - F)(F - \varphi)(\Gamma - G)(G - \gamma)}$ ist, erhält man die Ungleichung (*) sofort aus der Formel (10), wenn man beachtet, daß $(D(f, g))^2 \leqq D(f, f) \cdot D(g, g)$ ist, was sehr leicht aus der Schwarzschen Ungleichheit folgt.

[3]) Für die Klasse der positiven konvexen Funktionen läßt sich auf Grund der Ergebnisse von Blaschke, Frank und Pick (Frank und Pick, Distanzschätzungen im Funktionenraum I, Math. Annalen 76, 1915, S. 354 ff. und Blaschke und Pick, Distanzschätzungen im Funktionenraum II, Math. Annalen 77, 1916, S. 277 ff.) eine Schranke für $D(f, g)$ bestimmen, die nach Art der Abschätzung 24 von den Integralwerten F und G abhängt. Z. B. wird in der erstgenannten Arbeit bewiesen, daß eine beliebige positive konvexe Funktion $f(x)$, die durch die Bedingung $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 1$

Um ein Kriterium für die Zugehörigkeit einer im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktion zu jener Klasse zu erhalten, betrachte man bei beliebig vorgegebenem, ganzzahligem $n > 0$ das Differenzenschema der Funktion $f(x)$, das zu den äquidistanten Abszissen $x_\lambda = \frac{\lambda}{n}\,(\lambda = 0, 1, \ldots n)$ gehört, also das Schema

$$\begin{array}{lllllll}
x_0 = 0 & f_0 = f(0) & = \Delta^0 f_0 & & & & \\
 & & & \Delta^1 f_0 & & & \\
x_1 = \frac{1}{n} & f_1 = f\left(\frac{1}{n}\right) & = \Delta^0 f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & & \Delta^1 f_1 & & \ddots & \\
x_2 = \frac{2}{n} & f_2 = f\left(\frac{2}{n}\right) & = \Delta^0 f_2 & & \Delta^2 f_1 & & \\
 & & & \Delta^1 f_2 & \vdots & \ddots & \\
x_3 = \frac{3}{n} & f_3 = f\left(\frac{3}{n}\right) & = \Delta^0 f_3 & \vdots & & & \Delta^n f_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
x_{n-1} = \frac{n-1}{n} & f_{n-1} = f\left(\frac{n-1}{n}\right) & = \Delta^0 f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} & \ddots & \\
 & & & \Delta^1 f_{n-1} & & & \\
x_n = 1 & f_n = f(1) & = \Delta^0 f_n & & & &
\end{array}$$

Die Funktion $f(x)$ soll dann und nur dann zur Klasse der „vollmonotonen Funktionen" gehören, wenn entweder $\Delta^\lambda f_0 \geqq 0$ oder $\Delta^\lambda f_0 \leqq 0$ gilt für alle $\lambda = 0, 1, 2, \ldots n$[4]). Die Bezeichnung „vollmonoton" ist aus folgendem Grunde gerechtfertigt. Da

$$\Delta^{\lambda-1} f_\nu = \Delta^\lambda f_{\nu-1} + \Delta^{\lambda-1} f_{\nu-1} \quad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda + \nu \leqq n+1)$$

gilt, besteht das Differenzenschema einer „vollmonotonen" Funktion entweder aus lauter nicht negativen oder aus lauter nicht positiven Zahlen,

---

normiert ist, von der Funktion $g(x) = 1$ höchstens den sphärischen Abstand $\pi/6$ haben kann; dabei ist der sphärische Abstand ϑ zweier normierter Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ durch die Gleichung $\cos\vartheta = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ erklärt. Es ist also

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \cos\frac{\pi}{6} \text{ oder } \frac{4}{3}\left(\int_0^1 f\,dx\right)^2 \geqq 1 = \int_0^1 f^2\,dx \geqq \left(\int_0^1 f\,dx\right)^2,$$

so daß sich $0 \leq D(f,f) \leq \frac{1}{3}\left(\int_0^1 f\,dx\right)^2 = \frac{1}{3}F^2$ ergibt. Da, wie oben bemerkt wurde, $|D(f,g)| \leq \sqrt{D(f,f)\cdot D(g,g)}$ gilt, erhält man sofort $|D(f,g)| \leq \frac{1}{3}FG$ für beliebige positive konvexe Funktionen. Wahrscheinlich lassen sich aus den weiteren Sätzen von Frank, Pick und Blaschke noch andere Abschätzungen für $D(f,g)$ gewinnen, doch soll hier darauf nicht eingegangen werden. Den Hinweis auf jene Noten verdanke ich Herrn M. Krafft.

[4]) Da es sich hier nur darum handelt, $D(f,g)$ abzuschätzen, und da $D(f+\text{const}, g) = D(f,g)$ ist, kann durch Addition einer passenden Konstanten über das Vorzeichen von $f(0)$ frei verfügt werden; es kommt also nur auf $sgn\,\Delta^\lambda f_0$ an für $\lambda \geqq 1$. — Die funktionentheoretischen Eigenschaften der vollmonotonen Funktionen sollen an anderer Stelle näher untersucht werden.

während bei einer monotonen Funktion im allgemeinen nur die Glieder der ersten Differenzenspalte nicht negativ bzw. nicht positiv sind.

Es soll nun gezeigt werden, daß für zwei vollmonotone Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Ungleichheit

$$|D(f,g)| \leqq \tfrac{4}{45}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma) \tag{25}$$

besteht.

Zum Beweise betrachte man zunächst zwei spezielle vollmonotone Funktionen, nämlich die Polynome

$$\left\{\begin{array}{ll} & f^*(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda x^\lambda \\ \text{wobei} & a_\lambda \geqq 0 \text{ gilt für } \lambda = 0, 1, 2, \ldots n \\ \text{oder} & a_\lambda \leqq 0 \text{ gilt für } \lambda = 0, 1, 2, \ldots n, \\ \text{und} & \\ & g^*(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} b_\lambda x^\lambda, \\ \text{wobei} & b_\lambda \geqq 0 \text{ gilt für } \lambda = 0, 1, 2, \ldots n \\ \text{oder} & b_\lambda \leqq 0 \text{ gilt für } \lambda = 0, 1, 2, \ldots n. \end{array}\right. \tag{26}$$

Dann ist

$$D(f^*,g^*) = \int_0^1 \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} a_\lambda b_\mu x^{\lambda+\mu}\,dx - \int_0^1 \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda x^\lambda\,dx \cdot \int_0^1 \sum_{\mu=0}^{n} b_\mu x^\mu\,dx$$

$$= \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} a_\lambda b_\mu \left(\frac{1}{\lambda+\mu+1} - \frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{\mu+1}\right) = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \ldots,$$

also wegen (26)

$$|D(f^*,g^*)| = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} |a_\lambda|\,|b_\mu| \left(\frac{1}{\lambda+\mu+1} - \frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{\mu+1}\right),$$

und da

$$\frac{1}{\lambda+\mu+1} - \frac{1}{\lambda+1}\cdot\frac{1}{\mu+1} \leqq \frac{4}{45} \quad \text{für } \lambda, \mu = 1, 2, \ldots$$

$$|D(f^*,g^*)| \leqq \tfrac{4}{45} \sum_{\lambda=1}^{n} |a_\lambda| \sum_{\mu=1}^{n} |b_\mu|.$$

Nun ist aber

$$|f^*(1) - f^*(0)| = \Phi^* - \varphi^* = \left|\sum_1^n a_\lambda\right| = \sum_1^n |a_\lambda|$$

und

$$|g^*(1) - g^*(0)| = \Gamma^* - \gamma^* = \left|\sum_1^n b_\mu\right| = \sum_1^n |b_\mu|$$

und daher, wie behauptet wurde,

$$|D(f^*,g^*)| \leqq \tfrac{4}{45}(\Phi^*-\varphi^*)(\Gamma^*-\gamma^*). \tag{27}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß dieselbe Ungleichheit nicht nur für derartige Polynome, sondern für beliebige vollmonotone Funktionen richtig ist. Dazu wird zunächst folgendes bewiesen:

Wenn $f(x)$ vollmonoton ist, gibt es ein Polynom $p(x) = \sum_0^n a_\lambda x^\lambda$ mit nur nicht negativen bzw. mit nur nicht positiven Koeffizienten derart, daß

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$

wenn nur n genügend groß ist.

Man benutze nämlich zur Approximation von $f(x)$ das Polynom

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}. \tag{28}$$

Daß $p(x)$ die Funktion $f(x)$ bei hinreichend großem n im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ beliebig nahe approximiert, ist bekannt[5]). Man braucht also nur noch zu zeigen, daß die Koeffizienten von $p(x)$ der Bedingung genügen, sämtlich nicht negativ bzw. sämtlich nicht positiv zu sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda x^\lambda = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \binom{n}{\nu} \sum_{\alpha=0}^{n-\nu} x^{\nu+\alpha} (-1)^\alpha \binom{n-\nu}{\alpha} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\lambda=\nu}^{n} f_\nu \binom{n}{\nu} x^\lambda (-1)^{\lambda-\nu} \binom{n-\nu}{\lambda-\nu} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{n} x^\lambda \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\nu} \binom{n}{\nu} f_\nu \binom{n-\nu}{\lambda-\nu}, \\ a_\lambda &= \binom{n}{\lambda} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} (-1)^\varkappa \binom{n}{\lambda-\varkappa} \frac{\binom{n-\lambda+\varkappa}{\varkappa}}{\binom{n}{\lambda}} f_{\lambda-\varkappa}, \end{aligned}$$

also schließlich

$$a_\lambda = \binom{n}{\lambda} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} (-1)^\varkappa \binom{\lambda}{\varkappa} f_{\lambda-\varkappa} = \binom{n}{\lambda} \Delta^\lambda f_0,$$

d. h. die Koeffizienten des die Funktion $f(x)$ approximierenden Polynoms (28) sind bis auf positive Faktoren die Glieder der ersten Zeile des Differenzenschemas und daher für vollmonotone Funktionen sämtlich nicht negativ bzw. nicht positiv. Übrigens ist noch leicht einzusehen, daß $p(0) = f(0)$ und $p(1) = f(1)$ gilt.

---

[5]) Vgl. etwa G. Polya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I, S. 66. Springer 1925. Die Polynome $p(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ wurden von S. Bernstein eingeführt.

Nun seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei beliebige vollmonotone Funktionen, und es werde

$$p(x) = \sum_0^n f_\nu \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}, \quad f(x) - p(x) = f_1(x)$$

$$q(x) = \sum_0^n g_\nu \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}, \quad g(x) - q(x) = g_1(x)$$

gesetzt, so daß, wenn nur n genügend groß ist,

$$|f_1(x)| < \varepsilon, \quad |g_1(x)| < \varepsilon \text{ gilt für } 0 \leqq x \leqq 1.$$

Dann ist

$$D(f,g) = D(p+f_1, q+g_1) = D(p,q) + D(f_1,q) + D(p,g_1) + D(f_1,g_1)$$

also

$$|D(f,g)| \leqq |D(p,q)| + |D(f_1,q) + D(p,g_1) + D(f_1,g_1)|. \tag{29}$$

Wenn nun

$$\left.\begin{aligned} M_f &= \max(\Phi, -\varphi) = |f|\max \\ M_g &= \max(\Gamma, -\gamma) = |g|\max \end{aligned}\right\} \; 0 \leqq x \leqq 1$$

gesetzt wird, gilt für genügend großes n

$$|D(f_1,q) + D(p,g_1) + D(f_1 g_1)| \leqq 2\varepsilon(M_f + M_g + 3\varepsilon). \tag{30}$$

Weiter ist nach (27) und weil $f(0) = p(0)$, $f(1) = p(1)$, $g(0) = q(0)$, $g(1) = q(1)$ gilt

$$|D(p,q)| \leqq \tfrac{4}{45}|p(1) - p(0)|\,|q(1) - q(0)| = \tfrac{4}{45}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma),$$

also nach (29) und (30)

$$|D(f,g)| \leqq \tfrac{4}{45}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma) + 2\varepsilon(M_f + M_g + 3\varepsilon),$$

und da der zweite Summand rechterhand beliebig verkleinert werden kann, gilt auch

$$|D(f,g)| \leqq \tfrac{4}{45}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma), \tag{25}$$

was bewiesen werden sollte.

Die in der letzten Ungleichheit für $|D(f,g)|$ gegebene Schranke läßt sich durch keine kleinere ersetzen, wenn $f(x)$ und $g(x)$ beliebige vollmonotone Funktionen bedeuten; denn für $f(x) = g(x) = x^2$ ist $D(f,g) = \frac{4}{45}$.

Zum Schluß mögen noch zwei einfache Anwendungen der Ungleichung

$$|D(f,g)| \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma) \tag{18}$$

gezeigt werden. Die erste liefert einen Beweis für die allerdings schon bekannte Tatsache, daß für die Koeffizienten a_n und b_n der Fourierentwicklung einer Funktion von beschränkter Schwankung

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ilt. Es ist nämlich

$$a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_{\lambda\frac{2\pi}{n}}^{(\lambda+1)\frac{2\pi}{n}} f(x) \cos n x \, d x,$$

lso

$$|a_n| \leqq \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left| \int_{\lambda\frac{2\pi}{n}}^{(\lambda+1)\frac{2\pi}{n}} f(x) \cos n x \, d x \right|.$$

Andererseits folgt aus der Ungleichung (18)

$$\left| \frac{n}{2\pi} \int_{\lambda\frac{2\pi}{n}}^{(\lambda+1)\frac{2\pi}{n}} f(x) \cos n x \, d x - 0 \right| \leqq \frac{1}{4} (\Phi_\lambda - \varphi_\lambda) \cdot 2,$$

venn für

$$\frac{\lambda 2\pi}{n} \leqq x \leqq (\lambda+1)\frac{2\pi}{n} \quad \varphi_\lambda \leqq f(x) \leqq \Phi_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1)$$

rfüllt ist. Also ergibt sich

$$|a_n| \leqq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2} \sum_{0}^{n-1} (\Phi_\lambda - \varphi_\lambda),$$

nd da $\sum (\Phi_\lambda - \varphi_\lambda) \leqq \sigma$ gilt, wenn $f(x)$ von beschränkter Schwankung st, erhält man $|a_n| \leqq \frac{\sigma}{n}$ und ganz entsprechend $|b_n| \leqq \frac{\sigma}{n}$.

Zweitens betrachte man ein beliebiges, im Grundbereich $a \leqq x \leqq b$ normiertes und orthogonales Funktionensystem $f_n(x)$

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) \, d x = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Die Ungleichung (18) liefert

$$0 \leqq \frac{1}{b-a} \int_a^b f_n^2 \, d x - \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b f_n(x) \, d x \right)^2 \leqq \frac{1}{4} (\Phi_n - \varphi_n)^2,$$

venn Φ_n und φ_n obere und untere Grenze von $f_n(x)$ im Grundbereich bedeuten. Nun folgt aber aus der Besselschen Ungleichung

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) \, d x = 0;$$

also erhält man

$$\liminf_{n \to \infty} (\Phi_n - \varphi_n) \geqq \frac{2}{\sqrt{b-a}},$$

d. h. die Funktionen eines im Grundbereich $a \leqq x \leqq b$ normierten Orthogonalsystems oszillieren fast alle zwischen Grenzen, deren Abstand größer ist als $\frac{2}{\sqrt{b-a}} - \alpha$, wie klein auch die Konstante α sein mag. Der asymptotische Minimalabstand von oberer und unterer Grenze der Funktionen des Systems hängt also nur von der Größe des Grundbereiches ab. Wenn übrigens eine der Funktionen $f_n(x)$, etwa f_0, eine Konstante ist, dann folgt ja aus der Orthogonalitätsbedingung $\int_a^b f_n(x)\,dx = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$, so daß auch

$$\Phi_n - \varphi_n \geqq \frac{2}{\sqrt{b-a}}$$

für alle $n \geqq 1$ gilt. Jetzt liefert die Ungleichung (12 b) sogar

$$-\varphi_n \Phi_n \geqq \frac{1}{b-a} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

(Eingegangen am 30. Dezember 1933.)

Beiträge zur Theorie der Verbände.

Von

Fritz Klein in Wuppertal.

Einleitung.

In der folgenden Untersuchung zeige ich erstens (§ 1 und § 2), daß die beiden einen Verband charakterisierenden Verknüpfungen, obwohl sie vollkommen dual beschaffen und gewissermaßen Spiegelbilder voneinander sind, nicht notwendigerweise als gleich ursprünglich aufgefaßt werden müssen, sondern daß man eine der beiden Verknüpfungen — welche man nimmt, ist wegen der Dualität der Verknüpfungen gleichgültig — als die primäre der andern gegenüberstellen kann. Mit einem ähnlichen Problem — es handelt sich dabei um gewisse distributive Verbände — habe ich mich in einer früheren Arbeit[1]) beschäftigt. An zweiter Stelle gehe ich auf das Problem der Erzeugung eines Verbandes aus einigen seiner Elemente ein (§ 3). Während das erste Problem seine vollständige Lösung gefunden hat, muß ich mich bei dem zweiten auf die Mitteilung einiger Teilergebnisse beschränken. Die Methode, die in dieser Arbeit wie auch in den vorhergehenden Untersuchungen über diesen Gegenstand Anwendung gefunden hat, ist die axiomatische, die sich bestens bewährt hat. Ich bemerke noch, daß die vorliegende Arbeit die Kenntnis der früheren[2]) mit Ausnahme von A. V. III nicht unbedingt voraussetzt.

§ 1.

Abstrakte Mengen mit einer ursprünglichen und einer abgeleiteten Elementverknüpfung.

1. Grundgegebenheit ist eine abstrakte Menge M, deren Elemente einer durch $=$ symbolisierten Gleichheitsbeziehung und einer durch $\circ$ symbolisierten Verknüpfung im Sinne von A. V. III, § 1 fähig sind. Der

[1]) Vgl. die in der folgenden Fußnote mit A. V. III bezeichnete Arbeit.

[2]) Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik, Jahresber. d. D. Math. Ver. **38** (1929), S. 35—40;

Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen, Math. Annalen **105** (1931), S. 308—323 (Abkürzung: A. V. I);

Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen, Math. Annalen **106** (1932), S. 114—130 (Abk.: A. V. II);

Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen, Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 39—60 (Abk.: A. V. III).

näheren Beschreibung der Verknüpfung $\circ$ dient ein System von zusätzlichen *Axiomen*[3]), deren erste folgendermaßen lauten:

$I_\circ$. Sind a und b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es ein Element c aus M, so daß gilt $a \circ b = c$.

$II_\circ$. Für zwei beliebige Elemente a und b aus M gilt

$$a \circ b = b \circ a.$$

$III_\circ$. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Erklärung 1. Eine Menge mit einer den Axiomen $I_\circ$, $II_\circ$ und $III_\circ$ genügenden Elementverknüpfung heiße eine $III_\circ$-Menge.

Satz 1. In jeder $III_\circ$-Menge M gibt es höchstens ein Element h' derart, daß für alle Elemente a aus M gilt

$$a \circ h' = h' \circ a = a,$$

und höchstens ein Element h'' derart, daß für alle Elemente a aus M gilt

$$a \circ h'' = h'' \circ a = h''.$$

Es mag nur bemerkt werden, daß der Beweis dieses Satzes sich allein auf die Axiome $I_\circ$ und $II_\circ$ stützt.

Erklärung 2. Die Elemente h' und h'' des Satzes 1 mögen *Hauptelemente* oder *ausgezeichnete* Elemente[4]) der Menge M in bezug auf die Verknüpfung $\circ$ genannt werden; insbesondere heiße h' Hauptelement erster Art und h'' Hauptelement zweiter Art.

Satz 2. In jeder $III_\circ$-Menge ist die Verknüpfung $\circ$ hinsichtlich einer beliebigen *endlichen* Anzahl von Elementen sowohl kommutativ als auch assoziativ, so daß das Ergebnis der auf die n Elemente $a_1, \ldots, a_n$ ausgeübten Verknüpfung $\circ$ in der Form $a_1 \circ \ldots \circ a_n$, also ohne Klammern geschrieben werden kann.

2. Es sei M eine $III_\circ$-Menge. Die *Axiome*, die wir nun untersuchen, lauten:

$IV, 1_\circ$. Ist a ein beliebiges Element aus M, so gibt es mindestens einmal zwei Elemente x und y aus M, so daß gilt $a = x \circ y$.

$IV, 2_\circ$. Ist a ein beliebiges Element aus M, so gibt es mindestens einmal drei Elemente b, x und y aus M, so daß gilt

$$a = b \circ x, \; b = a \circ y.$$

[3]) Axiome werden durch römische Ziffern kenntlich gemacht. Daß sich die Axiome auf die Verknüpfung $\circ$ beziehen, wird dadurch angezeigt, daß den römischen Ziffern das Verknüpfungssymbol $\circ$ als unterer Index angeheftet wird. Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, darf der Index auch fortgelassen werden.

[4]) In den früheren Arbeiten sind diese Elemente auch als Einheitselemente bezeichnet worden.

IV, 3_o. Sind a, b, x und y vier Elemente aus M, so gilt mit $a = b \circ x$ und $b = a \circ y$ auch $a = b$.

IV, 4_o. Ist a ein beliebiges Element aus M, so gibt es mindestens ein Element x aus M, so daß gilt $a = a \circ x$.

IV, 5_o. Ist a ein beliebiges Element aus M, so gibt es mindestens ein Element b aus M, so daß gilt $a = b \circ b$.

IV, 6_o. Sind a und b zwei Elemente aus M, so gilt mit $a = b \circ b$ auch $b = a \circ a$.

Dazu werde erstens bemerkt:

1) Mit IV, 2 ist auch IV, 1 in Kraft.

2) Mit IV, 4 ist auch IV, 2 in Kraft.

3) Mit IV, 5 ist auch IV, 1 in Kraft.

4) Mit IV, 2 und IV, 3 ist auch IV, 4 in Kraft.

5) Mit IV, 5 und IV, 6 ist auch IV, 2 in Kraft.

Zweitens werde bemerkt:

1) Es gibt III-Mengen, für die IV, 1 nicht in Kraft ist.

Beweis. M sei die Menge der natürlichen Zahlen; $a \circ b$ werde als die gewöhnliche Summe von a und b gedeutet. Dann läßt sich das Element $a = 1$ nicht in der Form $x \circ y$ darstellen.

2) Es gibt III-Mengen, für die IV, 1 in Kraft ist, aber nicht IV, 2.

Beweis. M sei die Menge der positiven Zahlen; $a \circ b$ werde als die gewöhnliche Summe von a und b gedeutet.

3) Es gibt III-Mengen, für die IV, 1; IV, 2 und IV, 4 in Kraft sind, aber nicht IV, 3; IV, 5 und IV, 6.

Beweis. M sei die Menge der positiven rationalen Zahlen; $a \circ b$ werde als das gewöhnliche Produkt von a und b gedeutet.

4) Es gibt III-Mengen, für die IV, 1; IV, 2; IV, 4 und IV, 5 in Kraft sind, aber nicht IV, 3 und IV, 6.

Beweis. M sei die Menge der positiven Zahlen; $a \circ b$ werde als das gewöhnliche Produkt von a und b gedeutet.

5) Es gibt III-Mengen, für die IV, 1; IV, 2; IV, 4; IV, 5 und IV, 6 in Kraft sind, aber nicht IV, 3.

Beweis. M sei die Menge der Restklassen mod 3; $a \circ b$ bedeute die aus den Klassen a und b durch Addition entstandene Klasse. Dann wird dem Axiom IV, 3 nicht für

$$a \equiv 2, \quad b \equiv 1 \qquad \text{mod } 3$$

genügt.

6) Es gibt III-Mengen, für die IV, 1 bis IV, 4 in Kraft sind, aber nicht IV, 5 und IV, 6.

Beweis. M sei die Menge der natürlichen Zahlen; $a \circ b$ werde als das gewöhnliche Produkt von a und b gedeutet.

7) Es gibt III-Mengen, für die IV, 1 bis IV, 5 in Kraft sind, aber nicht IV, 6.

Beweis. M sei die Menge der reellen Zahlen, die nicht kleiner als 1 sind; $a \circ b$ werde als das gewöhnliche Produkt von a und b gedeutet.

Satz 3. In bezug auf eine III_0-Menge M ist die Gesamtheit der Axiome IV, 1_0 bis IV, 6_0 gleichwertig mit dem folgenden *Axiom*:

IV_0. Für jedes Element a aus M gilt $a \circ a = a$.

Beweis. Einerseits folgt nämlich IV aus IV, 5; IV, 6 und IV, 3. Andererseits folgen aus IV sofort IV, 1; IV, 2; IV, 4; IV, 5 und IV, 6. Ferner folgt IV, 3; denn aus

$$a = b \circ x, \quad b = a \circ y$$

ergibt sich nach II, III und IV

$$a \circ b \circ x \circ y = a, \quad a \circ b \circ x \circ y = b.$$

Erklärung 3. Eine dem Axiom IV_0 genügende III_0-Menge heiße eine IV_0-Menge.

Satz 4. Jede aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehende IV_0-Menge enthält das Hauptelement zweiter Art.

Beweis. Für die aus den n Elementen $a_1, \ldots, a_n$ bestehende IV_0-Menge ist $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$ das Hauptelement zweiter Art.

Demgegenüber enthält eine IV_0-Menge nicht notwendigerweise das Hauptelement erster Art, wie sich folgendermaßen ergibt. Es sei M eine Menge von natürlichen Zahlen derart, daß M mit den Zahlen a und b auch die Zahl $v(a, b)$ als Element enthält, unter $v(a, b)$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b verstanden. Eine solche Menge von natürlichen Zahlen werde als eine v-Menge bezeichnet. Man zeigt leicht, daß $v(a, b)$ als $a \circ b$ gedeutet und somit eine v-Menge als eine IV_0-Menge aufgefaßt werden kann[5]). Insbesondere ist die aus den Zahlen 2, 3 und 6 bestehende v-Menge eine IV_0-Menge ohne ein Hauptelement erster Art.

Satz 5. Sind M_1 und M_2 Untermengen einer IV_0-Menge und selbst IV_0-Mengen, so ist auch der Durchschnitt $D[M_1, M_2]$ von M_1 und M_2, falls er nicht leer ist, eine IV_0-Menge.

Der einfache Beweis bleibe dem Leser überlassen. Es mag nur bemerkt werden, daß die Menge $D[M_1, M_2]$ wirklich leer sein kann, wie daraus folgt, daß jedes Element einer IV_0-Menge M für sich allein eine IV_0-Menge darstellt und zwei derartige Untermengen von M elementfremd

[5]) Entsprechend heiße eine Menge M von natürlichen Zahlen eine t-Menge, wenn M mit den Zahlen a und b auch die Zahl $t(a, b)$ als Element enthält, unter $t(a, b)$ den größten gemeinschaftlichen Teiler von a und b verstanden. Eine t-Menge kann ebenfalls als eine IV_0-Menge aufgefaßt werden.

sind[6]). Diese Feststellung gibt zugleich die Richtung für den weiteren Ausbau des Axiomensystems an; wir werden nämlich durch das Axiom $V, 1_o$ für gewisse Untermengen M_1 und M_2 von M die Existenz eines von der Nullmenge verschiedenen Durchschnitts fordern

Satz 6. Es seien a, x_1, x_2, y_1 und y_2 Elemente einer IV_o-Menge. Dann gilt mit

$$a \circ x_1 = x_1 \text{ und } a \circ x_2 = x_2$$

auch

$$a \circ x_1 \circ x_2 = x_1 \circ x_2$$

und mit

$$a \circ y_1 = a \text{ und } a \circ y_2 = a$$

auch

$$a \circ y_1 \circ y_2 = a.$$

Erklärung 4. Ist a ein Element einer IV_o-Menge M, so werde die Menge aller Elemente x aus M, für die $a \circ x = x$ gilt, mit $m'(a)$ und die Menge aller Elemente y aus M, für die $a \circ y = a$ gilt, mit $m''(a)$ bezeichnet.

Satz 7. Die jedem Element a einer IV_o-Menge zugeordneten Mengen $m'(a)$ und $m''(a)$ sind selbst IV_o-Mengen; zugleich ist a Hauptelement erster Art von $m'(a)$ und Hauptelement zweiter Art von $m''(a)$ in bezug auf die Verknüpfung $\circ$.

Satz 8. Der in bezug auf zwei beliebige Elemente a und b einer IV_o-Menge gebildete Durchschnitt $D[m'(a), m'(b)]$ enthält das Hauptelement erster Art von D, also ein Element c von der Beschaffenheit, daß für alle Elemente x von D gilt

$$x \circ c = c \circ x = x.$$

Dabei ist $c = a \circ b$.

Beweis. Wegen

$$a \circ c = c, \quad b \circ c = c$$

ist c eine Lösung des Systems

$$a \circ x = x, \quad b \circ x = x;$$

D ist somit nicht leer. Überdies ist c Hauptelement erster Art von D, denn es gilt für alle x von D

$$c \circ x = (a \circ b) \circ x = a \circ (b \circ x) = a \circ x = x.$$

3. Die beiden letzten *Axiome*, deren Einwirkung untersucht werden soll, lauten:

$V, 1_o$. In bezug auf je zwei Elemente a und b einer IV_o-Menge hat das Gleichungssystem

$$a \circ y = a, \quad b \circ y = b$$

---

[6]) Vgl. die im Anschluß an die Axiome $V, 1_o$ und V_o unter 3) gemachte Bemerkung.

mindestens eine Lösung y, d. h. der in bezug auf zwei beliebige Elemente a und b einer IV_o-Menge gebildete Durchschnitt $D[m''(a), m''(b)]$ ist nicht leer.

V_o. Der in bezug auf zwei beliebige Elemente a und b einer IV_o-Menge gebildete Durchschnitt $D[m''(a), m''(b)]$ enthält das Hauptelement zweiter Art von D, also ein Element d von der Beschaffenheit, daß für alle Elemente y von D gilt

$$y \circ d = d \circ y = d.$$

Hinsichtlich der *Abhängigkeit* bzw. *Unabhängigkeit* dieser Axiome werde folgendes bemerkt:

1) Mit V_o ist auch $V, 1_o$ in Kraft.

2) Wenn für zwei beliebige Elemente a und b einer IV_o-Menge der Durchschnitt $D[m''(a), m''(b)]$ endlich und nicht leer ist, so ist nach Satz 4 auch V_o in Kraft.

3) Es gibt IV_o-Mengen, für die $V, 1_o$ nicht in Kraft ist und somit auch nicht V_o. Das zeigt die soeben herangezogene, aus den Zahlen 2, 3 und 6 bestehende v-Menge, wenn wieder $a \circ b$ als $v(a, b)$ gedeutet wird. Hier hat das System

$$a \circ y = a, \quad b \circ y = b$$

für

$$a = 2, \quad b = 3$$

keine Lösung, d. h. $D[m''(a), m''(b)]$ ist leer.

4) Es gibt IV_o-Mengen, für die $V, 1_o$ in Kraft ist, aber nicht V_o. Davon überzeugen wir uns folgendermaßen. Es sei M eine Menge von Mengen derart, daß M mit den Mengen a und b auch die Menge $V(a, b)$ als Element enthält, unter $V(a, b)$ die Vereinigung der Mengen a und b verstanden. Eine solche Menge von Mengen werde als eine V-Menge[6a]) bezeichnet. Ebenso wie eine v-Menge kann auch eine V-Menge als eine IV_o-Menge aufgefaßt werden, da $V(a, b)$ als $a \circ b$ gedeutet werden kann; $a \circ x = a$ besagt hiernach, daß x eine Untermenge von a ist[7]). Nunmehr sei O der Anfangspunkt eines Strahles s; K sei ein von O verschiedener Punkt auf s, und zwar sei die Maßzahl der Strecke OK irrational; L_1 und L_2 seien zwei weitere, nicht zwischen O und K liegende Punkte auf s

[6a]) Die V-Menge ist nicht mit der V_o-Menge zu verwechseln, die in Erklärung 5 eingeführt wird.

[7]) Entsprechend heiße eine Menge M von Mengen eine D-Menge, wenn M mit den Mengen a und b auch die Menge $D(a, b)$ als Element enthält, unter $D(a, b)$ den Durchschnitt der Mengen a und b verstanden. Eine D-Menge kann ebenfalls als eine IV_o-Menge aufgefaßt werden. $a \circ x = a$ besagt bei dieser Deutung, daß x eine Obermenge von a ist.

(vgl. Fig. 1). Jedem auf der Strecke OK liegenden rationalen[8]) Punkt P werde die Menge der zwischen O und P befindlichen rationalen Punkte einschließlich der Punkte O und P zugeordnet. Diese Punktmengen fassen wir als Elemente einer Menge M auf. Außerdem habe M noch drei weitere

Fig. 1.

Punktmengen zu Elementen, nämlich, wenn ϱ die Menge der rationalen Punkte der Strecke OK ist, die durch Vereinigung von ϱ und L_1 bzw. von ϱ und L_2 bzw. von ϱ, L_1 und L_2 gebildeten Mengen, die der Reihe nach mit ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 bezeichnet werden mögen. Offenbar ist M eine V-Menge. Dann sind bei der eben dargelegten Deutung der Verknüpfung $\circ$ die Axiome $I_\circ$ bis $IV_\circ$ und $V, 1_\circ$ in Kraft; so wird dem Axiom $V, 1_\circ$ genügt, weil zwei beliebige Elemente von M stets den Punkt O gemeinsam haben. $V_\circ$ ist jedoch nicht in Kraft; bedeutet nämlich a die Menge ϱ_1 und b die Menge ϱ_2, so enthält $D[m''(a), m''(b)]$ kein Hauptelement zweiter Art, da es auf OK keinen rationalen Punkt gibt, der am weitesten rechts liegt[9]).

Erklärung 5. Eine dem Axiom $V_\circ$ genügende $IV_\circ$-Menge heiße eine $V_\circ$-Menge.

Erklärung 6. Es sei M eine $V_\circ$-Menge; a und b seien Elemente aus M. Daß d das Hauptelement zweiter Art von $D[m''(a), m''(b)]$ in bezug auf die Verknüpfung $\circ$ ist, werde durch

$$a \odot b = d$$

ausgedrückt.

Satz 9. Das Symbol $\odot$ stellt eine Verknüpfung im Sinn von A. V. III, § 1 dar.

Satz 10. Es sei M eine $V_\circ$-Menge. Sind a und b zwei Elemente aus M, so gilt mit $a \circ b = a$ auch $a \odot b = b$ und mit $a \odot b = a$ auch $a \circ b = b$.

Beweis. α) Gilt $a \circ b = a$, so ist b eine Lösung des Systems

$$a \circ x = a, \quad b \circ x = b; \tag{1}$$

b ist also Element von $D[m''(a), m''(b)]$. Insbesondere folgt aus der zweiten Hälfte von (1), daß b Hauptelement zweiter Art von D in bezug auf die Verknüpfung $\circ$ ist, so daß also $a \odot b = b$ stattfindet.

---

[8]) Ein Punkt auf s heiße rational, wenn seine Entfernung von O durch eine rationale Zahl gemessen wird.

[9]) Der Beweis stützt sich also wesentlich auf den Umstand, daß M zwar eine V-Menge, aber keine D-Menge ist.

β) Gilt $a \odot b = a$, so ist a Hauptelement zweiter Art von $D[m''(a), m''(b)]$ in bezug auf die Verknüpfung $\circ$ und somit eine Lösung von (1), so daß also $a \circ b = b$ stattfindet.

Satz 11. Ist M eine $V_\circ$-Menge, so ist M auch eine $V_\odot$-Menge, wenn $\odot$ die in Erklärung 6 beschriebene Verknüpfung bedeutet.

Beweis. Unmittelbar aus der Erklärung 6 folgt, daß die Axiome $I_\odot$, $II_\odot$ und $IV_\odot$ in Kraft sind. Auch $III_\odot$ ist in Kraft, da jeder der Ausdrücke $(a \odot b) \odot c$ und $a \odot (b \odot c)$ das Hauptelement zweiter Art von $D[m''(a), m''(b), m''(c)]$ in bezug auf die Verknüpfung $\circ$ darstellt. Daß $V_\odot$ in Kraft ist, ergibt sich folgendermaßen. Ist a ein Element aus M, so werde die Menge aller Elemente x aus M, für die $a \odot x = x$ gilt, mit $n'(a)$ und die Menge aller Elemente y aus M, für die $a \odot y = a$ gilt, mit $n''(a)$ bezeichnet. Wegen Satz 10 stimmt dann $m'(a)$ mit $n''(a)$ und $m''(a)$ mit $n'(a)$ überein, so daß $D[m'(a), m'(b)]$ und $D[n''(a), n''(b)]$ dieselbe Menge D darstellen. Da ferner nach demselben Satz das Hauptelement erster Art von D in bezug auf $\circ$ Hauptelement zweiter Art von D in bezug auf $\odot$ ist, gilt tatsächlich $V_\odot$.

Der damit bewiesene Hauptsatz stellt fest, daß die ursprüngliche Verknüpfung $\circ$ und die abgeleitete Verknüpfung $\odot$ wesentlich dieselben Eigenschaften besitzen. Das legt die Aufstellung eines Axiomensystems nahe, das mit der Vorzugsstellung der Verknüpfung $\circ$ aufräumt und statt dessen beide Verknüpfungen gleichmäßig berücksichtigt. Das soll in dem folgenden Paragraphen geschehen.

§ 2.

Abstrakte Mengen mit zwei ursprünglichen Elementverknüpfungen.

1. Grundgegebenheit dieses Paragraphen ist eine abstrakte Menge M, deren Elemente einer durch $=$ symbolisierten Gleichheitsbeziehung und zweier durch $\cup$ und $\cap$ symbolisierten Verknüpfungen im Sinn von A. V. III, § 1 fähig sind. Weiter seien die Verknüpfungen so beschaffen, daß M eine IV-Menge sowohl in bezug auf $\cup$ als auf $\cap$ ist. Demgemäß lauten die vier ersten zusätzlichen *Axiome* folgendermaßen:

I. Sind a und b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es ein Element c aus M, so daß gilt

$$a \cup b = c,$$

und ein Element d aus M, so daß gilt

$$a \cap b = d.$$

II. Für zwei beliebige Elemente a und b aus M gilt

$$a \cup b = b \cup a, \quad a \cap b = b \cap a.$$

III. Für drei beliebige Elemente a, b und c aus M gilt

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c), \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c).$$

IV. Für jedes Element a aus M gilt

$$a \cup a = a, \quad a \cap a = a.$$

Zur Herstellung eines Zusammenhangs zwischen den beiden Verknüpfungen sind weitere Festsetzungen erforderlich; eine verhältnismäßig lose Bindung spricht das folgende *Axiom* aus, das dem Satz 10 nachgebildet ist.

V. Sind a und b zwei Elemente aus M, so gilt mit $a \cup b = a$ auch $a \cap b = b$ und mit $a \cap b = a$ auch $a \cup b = b$.

Erklärung 7. Eine Menge mit zwei den Axiomen I bis V genügenden Elementverknüpfungen heiße ein *Verband* in bezug auf die beiden Verknüpfungen. Eine dem Axiom I genügende Untermenge eines Verbandes heiße ein *Unterverband* des betreffenden Verbandes. Unter der *Ordnung* eines Verbandes werde die Anzahl seiner Elemente verstanden; je nachdem die Ordnung endlich oder unendlich ist, werde der Verband als endlich oder unendlich bezeichnet.

Satz 12. Ist M ein Verband in bezug auf die Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ und zugleich ein Verband in bezug auf die Verknüpfungen $\cup$ und $\frown$, so sind die Verknüpfungen $\cap$ und $\frown$ identisch.

Beweis. Zu zeigen ist, daß, wenn $a \cap b = d$ und $a \frown b = d'$ ist, $d = d'$ ist.

α) Aus $a \cap b = d$ folgen die Gleichungen

$$a \cap d = d, \quad b \cap d = d.$$

Mehrfache Anwendung von V ergibt

$$a \cup d = a, \quad b \cup d = b;$$
$$a \frown d = d, \quad b \frown d = d.$$

Faßt man die beiden letzten Gleichungen zusammen, so erhält man

$$a \frown b \frown d = d,$$
$$d' \frown d = d,$$

also

$$d' \cup d = d'.$$

β) In gleicher Weise ergibt sich, wenn man von $a \frown b = d'$ ausgeht,

$$d \cup d' = d,$$

woraus in Verbindung mit α) die Behauptung folgt.

Satz 13. Für zwei beliebige Elemente a und b eines Verbandes gilt

$$(a \cup b) \cap a = a, \quad (a \cap b) \cup a = a.$$

Beweis. Man wende V auf die Identitäten

$$(a \cup b) \cup a = a \cup b, \quad (a \cap b) \cap a = a \cap b$$

an.

Der folgende Satz stellt die Gleichwertigkeit der in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen betrachteten Axiomensysteme fest und bringt damit das erste der eingangs angedeuteten Probleme zum Abschluß.

Satz 14. Ist M eine V_o-Menge und bedeutet $\odot$ die in M konstruierte Verknüpfung im Sinn der Erklärung 6, so ist M ein Verband in bezug auf die Verknüpfungen o und $\odot$. Umgekehrt ist, wenn M ein Verband in bezug auf die Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ ist, M sowohl eine $V_\cup$-Menge als auch eine $V_\cap$-Menge.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen 3, 9, 10 und 11 des § 1. Was den zweiten Teil der Behauptung anbetrifft, so reicht es wegen der Dualität der Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ aus, darzulegen, daß M eine $V_\cup$-Menge ist. Offenbar genügt dafür der Nachweis, daß für M das Axiom $V_\cup$ in Kraft ist. Zu zeigen ist also, daß es zu zwei beliebigen Elementen a und b aus M ein Element d aus M gibt derart, daß d eine Lösung des Systems

$$a \cup y = a, \quad b \cup y = b \tag{2}$$

ist und daß alle Lösungen y von (2) auch die Gleichung $d \cup y = d$ befriedigen. Ersichtlich hat das Element $a \cap b$ diese Eigenschaft. Erstens ist nämlich nach der zweiten Hälfte von Satz 13 das Element $a \cap b$ eine Lösung von (2). Zweitens gilt für jedes y, das (2) befriedigt,

$$a \cap y = y, \quad b \cap y = y,$$

also auch

$$a \cap b \cap y = y,$$

d. h.

$$(a \cap b) \cup y = a \cap b.$$

2. Der Begriff des Verbandes ist nicht eine interne Angelegenheit irgendeiner mathematischen Disziplin; vielmehr durchdringt er wie der Begriff der Gruppe das ganze Gewebe mathematischer Gesetzmäßigkeit. Hier ist nicht der Ort, das in allen Einzelheiten auszuführen; wir beschränken uns auf die Angabe einiger Beispiele.

Eine Menge von Mengen, die sowohl eine V-Menge als auch eine D-Menge ist (vgl. § 1), heiße eine (V, D)-Menge. Es werde ausdrücklich bemerkt, daß auch die Nullmenge als Element zulässig ist bzw. unter Umständen als Element gefordert werden muß. Eine (V, D)-Menge stellt einen Verband dar, wenn $a \cup b$ als $V(a, b)$ und $a \cap b$ als $D(a, b)$ aufgefaßt wird. Natürlich kann man auch $a \cup b$ als $D(a, b)$ und $a \cap b$ als $V(a, b)$ deuten; entsprechendes gilt übrigens für die weiteren Beispiele. Die Elemente einer (V, D)-Menge können sowohl abstrakte als auch konkrete Mengen sein; dabei verstehe ich unter einer konkreten Menge eine solche, deren Elemente über die Anforderungen der Mengenlehre hinaus bestimmt sind. Derartige Verbände liefert vor allem die

Algebra; die Elemente können Ringe, Körper, Moduln, Ideale, Gruppen und andere Bereiche sein.

Eine Menge von natürlichen Zahlen, die sowohl eine v-Menge als auch eine t-Menge ist (vgl. § 1), heiße eine (v, t)-Menge. Eine (v, t)-Menge stellt einen Verband dar, wenn $a \cup b$ als $v(a, b)$ und $a \cap b$ als $t(a, b)$ aufgefaßt wird. Der umfassendste Verband dieser Art wird von der Menge aller natürlichen Zahlen gebildet. Zu Elementen einer (v, t)-Menge können übrigens auch Polynome genommen werden; doch gehen wir darauf nicht näher ein.

Ein weiteres Beispiel liefert die projektive Geometrie. Es sei der Sinn der Ausdrücke „verbinden" und „schneiden" durch ein Axiomensystem der projektiven Geometrie festgelegt. Dann heiße eine Menge M von projektiven Räumen eine P'-Menge, wenn M mit den Räumen a und b auch den Raum $P'(a, b)$ als Element enthält, unter $P'(a, b)$ den projektiven Raum verstanden, der die Räume a und b verbindet, oder anders ausgedrückt, den projektiven Raum, der durch a und b „bestimmt" wird. Entsprechend heiße eine Menge M von projektiven Räumen eine P''-Menge, wenn M mit den Räumen a und b auch den Raum $P''(a, b)$ als Element enthält, unter $P''(a, b)$ den projektiven Raum verstanden, in dem sich die Räume a und b schneiden, oder anders ausgedrückt, den projektiven Raum, der a und b „gemeinsam" ist. Eine Menge von projektiven Räumen, die sowohl eine P'-Menge als auch eine P'-Menge ist, heiße eine (P', P'')-Menge. Auch der „Leerraum", der der eben erwähnten Nullmenge entspricht, ist als Element zulässig oder muß gegebenenfalls als Element gefordert werden. Sind beispielsweise a und b zwei zueinander windschiefe Geraden des dreidimensionalen Raumes, so bedeutet $P'(a, b)$ den Gesamtraum und $P''(a, b)$ den Leerraum. Eine (P', P'')-Menge stellt einen Verband dar, da $a \cup b$ als $P'(a, b)$ und $a \cap b$ als $P''(a, b)$ aufgefaßt werden kann[10]).

Durch Angabe konkreter Verbände, wozu die obigen Realisierungen vielfache Möglichkeiten bieten, zeigt man leicht die Richtigkeit der folgenden Aussage[11]).

Satz 15. Es gibt Verbände von jeder vorgegebenen Ordnung.

§ 3.

Erzeugende Elemente.

Wie nicht anders erwartet werden kann, ist das Problem der Erzeugung eines Verbandes aus möglichst wenigen seiner Elemente noch

[10]) Vgl. K. Menger, Bemerkungen zu Grundlagenfragen. IV; Jahresber. d. D. Math. Ver. 37 (1928), S. 309 ff.

[11]) Eine passende Realisierung stellt z. B. die beim Beweis von Satz 18 zur Verwendung gelangende Menge dar.

viel weiter von einer Lösung entfernt als das entsprechende Problem der Gruppentheorie. Das wenige, was darüber bekannt ist, soll im folgenden mitgeteilt werden. Wir beginnen mit einer Erklärung.

Erklärung 8. Eine endliche oder unendliche Menge von Elementen

$$a, b, c, \ldots \tag{3}$$

eines Verbandes M heiße eine *Basis* von M, wenn jedes Element von M, aber kein weiteres Element, als Verknüpfungsergebnis der Elemente (3) dargestellt, d. h. dadurch erzeugt werden kann, daß auf die Elemente (3) endlich oft die Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ ausgeübt werden. Die Elemente (3) selbst mögen *Erzeugende* von M genannt werden. Eine Basis N von M heiße *echt*, wenn keine echte Teilmenge von N eine Basis von M ist.

Offenbar besitzt jeder Verband mindestens eine Basis, nämlich die Gesamtheit seiner Elemente. Diese Basis möge als die *triviale* bezeichnet werden.

Satz 16. Jeder von zwei Elementen erzeugte Verband ist endlich und entweder von der zweiten oder vierten Ordnung.

Beweis. Gilt $a \cup b = a$, also auch $a \cap b = b$, so bilden bereits die erzeugenden Elemente a und b einen Verband. Gilt dagegen $a \cup b \neq a$ und $a \cup b \neq b$, so bilden die Elemente

$$a, b, a \cup b, a \cap b$$

einen Verband, wie man leicht unter Verwendung von Satz 13 feststellt.

Satz 17. Jeder Verband dritter Ordnung besitzt außer der trivialen Basis keine weitere.

Beweis. Wäre eine aus zwei Elementen bestehende Basis vorhanden, so müßte der Verband nach dem vorhergehenden Satz von der zweiten oder vierten Ordnung sein.

Satz 18. Für jedes n gibt es von n Elementen erzeugte Verbände, und sogar solche n-ter Ordnung.

Beweis. Es sei g eine von 1 verschiedene positive ganze Zahl. Dann bilden die n Zahlen

$$g, g^2, \ldots, g^n$$

eine (v, t)-Menge, die, als Verband aufgefaßt, die verlangte Eigenschaft besitzt.

Dieser Satz besagt natürlich nicht, daß jeder von einer endlichen Anzahl von Elementen erzeugte Verband endlich ist; vielmehr gilt folgendes:

Satz 19. Es gibt unendliche Verbände, die von 4 Elementen erzeugt werden.

Beweis. Wir gehen von der aus dem Leerraum, einer festen Ebene E und den Punkten und Geraden von E bestehenden (P', P'')-Menge aus und verstehen unter $x \cup y$ das Element $P'(x, y)$ und unter $x \cap y$ das Element $P''(x, y)$. Mit M werde der von den 4 in E liegenden

Punkten a_0, b_0, c_0, d erzeugte Unterverband bezeichnet; dabei werde vorausgesetzt, daß von den erzeugenden Punkten niemals drei auf derselben Geraden liegen und c_0 sich innerhalb des Dreiecks $a_0 b_0 d$ befindet. Dann ist M ein unendlicher Verband; wählt man nämlich die Bezeichnung

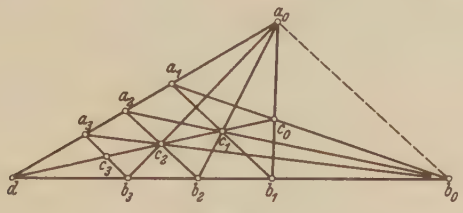


Fig. 2.

so, daß a_μ der Schnittpunkt der Geraden $a_0 d$ und $b_0 c_{\mu-1}$, daß b_μ der Schnittpunkt der Geraden $b_0 d$ und $a_0 c_{\mu-1}$, daß c_μ der Schnittpunkt der Geraden $c_0 d$ und $a_\mu b_\mu$ ist (vgl. Fig. 2), gelten demgemäß die Rekursionsgleichungen

$$a_\mu = (a_0 \cup d) \cap (b_0 \cup c_{\mu-1}),$$
$$b_\mu = (b_0 \cup d) \cap (a_0 \cup c_{\mu-1}),$$
$$c_\mu = (c_0 \cup d) \cap (a_\mu \cup b_\mu),$$

so sind die in M als Teilmengen enthaltenen Folgen

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$
$$b_0, b_1, b_2, \ldots,$$
$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

abzählbar unendlich.

Ob es auch unendliche Verbände gibt, die bereits von drei Elementen erzeugt werden — von zwei Elementen erzeugte Verbände sind nach Satz 16 stets endlich —, ist ungewiß. Aus einer Untersuchung Dedekinds[12]) geht lediglich hervor, daß es von drei Elementen erzeugte Verbände gibt, deren Ordnung größer als 28 ist.

[12]) Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Ges. Werke II, S. 236—271.

Wuppertal, den 12. 12. 1933.

(Eingegangen am 30. Dezember 1933.)

Nachtrag. In das Literaturverzeichnis zur Theorie der Verbände ist noch aufzunehmen: G. Birkhoff, On the combination of subalgebras, Proceedings of the Cambr. Phil. Soc. **29** (1933), S. 441—464. In der Birkhoffschen Arbeit, die ich während der Drucklegung der vorliegenden kennen gelernt habe, wird u. a. auch das Problem der Erzeugung eines Verbandes aus vier Elementen erörtert.

On equal sums of like powers.

By

K. Subba Rao.

Introduction.

If there exists a positive solution of

$$\sum_{s=1}^{m} x_s^k = \sum_{t=1}^{n} y_t^k \tag{1}$$

where the x's and the y's are positive integers, I write

$$(m) \overset{k}{=} (n).$$

If the equation (1) has an infinity of non-trivial positive integral solutions, I write[1])

$$(m) \overset{k}{=} (n) \quad i.\ o.$$

Further, I denote[1a]) by $\beta = \beta(k)$ the least number β such that

$$\sum_{s=1}^{\alpha} x_s^k = \sum_{t=1}^{\beta} y_t^k \qquad (\alpha < \beta) \tag{2}$$

has at least one non-trivial solution ($x_s, y_t > 0$). Also

$$a_1, a_2, \ldots \overset{k}{=} b_1, b_2, \ldots$$

means that

$$a_1^k + a_2^k + \ldots = b_1^k + b_2^k + \ldots$$

Again, I define $\gamma = \gamma(k)$ as the least number γ such that

$$\sum_{s=1}^{\alpha} x_s^k = \sum_{t=1}^{\gamma} y_t^k \qquad (\alpha < \gamma) \tag{3}$$

has an infinity of non-trivial positive integral solutions.

---

[1]) $i.\ o.$ = infinitely often. A non-trivial solution of (1) implies, in particular, that

$$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 1.$$

[1a]) The function $\beta(k)$ has been introduced by S. W. P. Steen, Proc. London Math. Soc. (Ser. 2), 29 (1929), 331—341 (333—334).

It is known that $\gamma(3) = \gamma(4) = 3$ [2]). S. Sastry has recently shown that [3])

$$\gamma(5) \leqq 4. \tag{4}$$

In fact, Euler conjectured that

$$(1) \overset{k}{=} (k-1) \qquad (k > 2)$$

is impossible. If the conjecture of Euler is true, $\gamma(5)$ cannot be < 4. Hence we should have

$$\gamma(5) = 4. \tag{5}$$

In this paper, I prove

Theorem 1: $\beta(8) \leqq 7.$

Theorem 2: $(1) \overset{8}{=} (17)$ *i. o.*

Theorem 3:
$$(8) \overset{8}{=} (8)$$
$$(7) \overset{8}{=} (8)$$
$$(6) \overset{8}{=} (8)$$
$$(5) \overset{8}{=} (8)$$
$$(4) \overset{8}{=} (8)$$
$$(7) \overset{8}{=} (7)$$
$$(6) \overset{8}{=} (7)$$
$$(5) \overset{8}{=} (7).$$

The last two of these equations obviously imply Theorem 1.

Theorem 4: $\gamma(6) \leqq 8$ [4]).

§ 1. We have

$$19,\ 18,\ 10,\ 9,\ 8 \overset{8}{=} 20,\ 15,\ 5,\ 4,\ 2,\ 2,\ 2$$
$$15,\ 14,\ 14,\ 14,\ 9,\ 9 \overset{8}{=} 17,\ 10,\ 5,\ 4,\ 4,\ 4,\ 3$$

which examples prove Theorem 1.

We have the identity

$$\begin{aligned}(16x^8+1)^8 = {} & (16x^8-1)^8 + (16x^7)^8 + (8x^5)^8 + (8x^5)^8 + (8x^5)^8 \\ & + (8x^5)^8 + (8x^5)^8 + (8x^5)^8 + (8x^5)^8 + (4x^3)^8 + (4x^3)^8 + (4x^3)^8 \\ & + (4x^3)^8 + (4x^3)^8 + (4x^3)^8 + (4x^3)^8 + (2x)^8.\end{aligned}$$

---

[2]) See Dickson's History of the Theory of Numbers, Vol. 2.

[3]) He shows

$$(2) \overset{5}{=} (4) \text{ } i.\ o.$$

Which proves (4). This result is announced in "The Mathematics Student" (published in Madras, India) for sept. 1933, Vol 1, p. 107.

[4]) I should add that I have not been able to improve this result, though it is likely that

$$\gamma(6) = 4.$$

The right hand side contains seventeen eighth powers and Theorem 2 is proved. It is probable that the number 17 on the right hand side of Theorem 2 can be replaced by 8.

The following examples prove Theorem 3:

$$12, 10, 10, 7, 7, 7, 3, 1 \overset{8}{=} 11, 11, 11, 6, 6, 5, 5, 4$$
$$15, 15, 14, 11, 8, 7, 7, 2 \overset{8}{=} 16, 13, 13, 13, 10, 6, 5, 3$$
$$14, 14, 13, 12, 12, 7, 7, 1 \overset{8}{=} 16, 10, 10, 10, 9, 5, 5, 3$$
$$13, 12, 11, 10, 2, 2, 2, 2 \overset{8}{=} 14, 8, 8, 8, 8, 8, 5, 3$$
$$19, 15, 14, 14, 14, 14, 13, 6 \overset{8}{=} 20, 12, 11, 8, 7, 4, 4, 3$$
$$19, 19, 19, 13, 6, 5, 5, 2 \overset{8}{=} 21, 18, 15, 11, 10, 9, 7, 1$$
$$19, 19, 14, 11, 11, 4, 2, 2 \overset{8}{=} 20, 15, 15, 15, 15, 8, 6, 6$$
$$17, 10, 4, 4, 4, 3, 3 \overset{8}{=} 16, 15, 11, 6, 6, 5, 2, 2$$
$$17, 11, 11, 11, 4, 4, 1 \overset{8}{=} 15, 14, 14, 13, 13, 12, 9, 3$$
$$19, 19, 13, 11, 10, 9, 4 \overset{8}{=} 20, 17, 15, 6, 2, 1, 1, 1$$
$$18, 17, 8, 6, 1, 1, 1 \overset{8}{=} 19, 13, 11, 5, 4, 4, 2, 2$$
$$20, 12, 11, 9, 9, 8, 7 \overset{8}{=} 19, 17, 14, 13, 10, 6, 5, 4$$
$$40, 34, 30, 19, 12, 10, 9 \overset{8}{=} 38, 38, 26, 22, 20, 20, 15, 5$$
$$14, 11, 11, 11, 9, 1 \overset{8}{=} 13, 13, 12, 10, 5, 4, 3, 3$$
$$14, 11, 10, 8, 5, 5 \overset{8}{=} 12, 12, 12, 12, 9, 9, 6, 3$$
$$14, 14, 14, 9, 9, 3 \overset{8}{=} 16, 11, 6, 6, 5, 5, 2, 2$$
$$21, 13, 12, 12, 11, 6 \overset{8}{=} 20, 18, 14, 14, 10, 9, 3, 1$$
$$22, 15, 15, 15, 15, 13 \overset{8}{=} 21, 19, 18, 10, 8, 3, 1, 1$$
$$22, 11, 10, 9, 9, 6 \overset{8}{=} 20, 20, 15, 14, 8, 8, 7, 3$$
$$17, 13, 13, 13, 2 \overset{8}{=} 16, 15, 15, 6, 5, 4, 4, 1$$
$$22, 17, 14, 11, 1 \overset{8}{=} 21, 20, 10, 8, 6, 5, 4, 3$$
$$16, 6, 5, 5 \overset{8}{=} 14, 14, 13, 12, 10, 4, 4, 3$$
$$12, 11, 10, 9, 9, 7, 4 \overset{8}{=} 13, 8, 6, 6, 5, 3, 1$$
$$20, 18, 13, 13, 6, 4, 4 \overset{8}{=} 21, 12, 5, 2, 2, 2, 2$$
$$21, 21, 17, 17, 9, 8, 6 \overset{8}{=} 22, 19, 19, 13, 3, 2, 1$$
$$19, 19, 18, 18, 15, 12, 11 \overset{8}{=} 22, 16, 9, 5, 2, 1, 1$$
$$15, 14, 14, 14, 9, 9 \overset{8}{=} 17, 10, 5, 4, 4, 4, 3$$
$$20, 8, 8, 6, 3, 1 \overset{8}{=} 19, 17, 14, 10, 10, 4, 4$$
$$19, 14, 7, 7, 2, 2 \overset{8}{=} 18, 17, 12, 9, 6, 5, 4$$
$$21, 17, 17, 17, 13, 12 \overset{8}{=} 20, 19, 19, 11, 11, 2, 1$$
$$22, 17, 13, 13, 12, 3 \overset{8}{=} 21, 20, 11, 11, 9, 8, 6$$
$$19, 18, 10, 9, 8 \overset{8}{=} 20, 15, 5, 4, 2, 2, 2.$$

Theorem 4: We have

$$(6) \qquad (12t^6+1)^6-(12t^6-1)^6=(12t^5)^6+1080(2t^3)^6+144t^6.$$

From (6), we have

$$(84t^6+7)^6=(84t^6-7)^6+(84t^5)^6+1080(14t^3)^6+144\times 7^6t^6.$$

But

$$1080=19^6+18^6+13^6-21^6-7^6-2^6,$$

and

$$144\times 7^6=16^6+7^6+6^6-2^6-1^6.$$

Hence we have

$$\begin{aligned}&(84t^6+7)^6+(294t^3)^6+(98t^3)^6+(28t^3)^6+(2t)^6+t^6\\ &=(84t^6-7)^6+(84t^5)^6+(266t^3)^6+(252t^3)^6+(182t^3)^6+(16t)^6\\ &\qquad\qquad+(7t)^6+(6t)^6,\end{aligned}$$

that is,

$$(6)\overset{6}{=}(8) \quad i.\ o.$$

which proves Theorem 4.

(Eingegangen am 7. Januar 1934.)

Über zwei Gleichgewichtsfiguren rotierender inhomogener Flüssigkeit.

Von

Karl Maruhn in Leipzig.

Einleitung.

Im Anschluß an seine grundlegenden Untersuchungen über Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten [1]) zeigte Lichtenstein, daß auch Gleichgewichtsfiguren in der Umgebung einer die Gleichgewichtsbedingungen nur annähernd erfüllenden Konfiguration existieren [2]). Beispiele hierfür bildeten die Laplacesche Theorie des Erdmondes, eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur und eine ringförmige Konfiguration.

Nachdem nun Lichtenstein die für homogene Flüssigkeiten geltenden Existenzsätze auch für nichthomogene Flüssigkeiten aufstellen konnte [3]), lag die Frage nahe, ob auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen über die Dichte Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von Figuren existieren, die nur annähernd den Gleichgewichtsbedingungen genügen. Es zeigt sich, daß dies tatsächlich der Fall ist, wenn auch hier dadurch, daß nur zwei der in der allgemeinen Behandlung erforderlichen drei Symmetrieebenen vorliegen, eine kleine Schwierigkeit entsteht. Dies läßt

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. a) Erste Abhandlung. Allgemeine Existenzsätze, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 229—284; b) Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen, ebenda 7 (1920), S. 126—231; c) Dritte Abhandlung. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde, ebenda 36 (1933), S. 481—562.

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes, Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 130—159; Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit, ebenda 12 (1922), S. 201—218; Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper, ebenda 13 (1922), S. 82—118. Es sei in diesem Zusammenhange auf die kürzlich erschienene Monographie Lichtensteins: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933, hingewiesen, wo sich alles Wesentliche zusammengestellt findet.

[3]) Vgl. l. c. [1]) die unter c) genannte Arbeit.

sich aber durch Festlegung der Rotationsgeschwindigkeit leicht überwinden.

Wir werden in dieser Arbeit die Existenz einer ringförmigen Gleichgewichtsfigur ohne Zentralkörper in der Nachbarschaft eines Kreisringkörpers und eines „Mondkörpers" in der Nachbarschaft einer Kugel, der um einen punktförmigen Zentralkörper kreist, dartun.

Die Methoden sind durchweg die gleichen wie in den unter [1]) und [2]) genannten Arbeiten. Aus diesem Grunde konnte ich mich an einigen Stellen mit Andeutungen begnügen.

Vermutlich dürfte sich auch das Problem zweier flüssiger Doppelsterne auf ähnliche Art erledigen lassen.

Erstes Kapitel.

Eine ringförmige Gleichgewichtsfigur.

§ 1.

Problemstellung.

In dem kartesischen Koordinatensystem x, y, z fassen wir die Ebene $\mathfrak{E}: y = 0$ ins Auge und in ihr ein (ebenfalls kartesisches) ebenes Koordinatensystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ mit dem Ursprung O, das mit dem ersten System durch die Beziehungen

$$x = L + \mathfrak{x}, \quad z = \mathfrak{z} \tag{1}$$

verbunden ist. Im x, y, z-System hat O daher die Koordinaten $L, 0, 0$.

Um O sei eine Kreisfläche K (Rand Σ) vom Radius $R\,(R < L)$ beschrieben, und es bezeichne r den Abstand eines Punktes P in K von O. Der Kreisringkörper T (Randfläche S), der entsteht, wenn man K um die z-Achse rotieren läßt, mag, wie wir jetzt annehmen wollen, mit einer, nicht notwendig homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt sein. Die Dichtefunktion f soll dabei nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T + S$ stetig, allenfalls abteilungsweise stetig sein; in der Umgebung der Kreislinie $\mathfrak{K}: x^2 + y^2 = L^2$ genügen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f einer H-Bedingung. Ferner möge f Rotationssymmetrie bezüglich der z-Achse besitzen, auf allen aus den Kreisen $\Sigma_r: \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{z}^2 = r^2$ durch Rotation um die z-Achse hervorgegangenen Kreisringflächen S_r den gleichen Wert haben und, wenn wir uns von O aus längs eines Radius von Σ bewegen, nicht zunehmen. Es genügt daher, f in K als $f(r)$ derart zu definieren, daß die verlangten Dichteeigenschaften erfüllt sind

Es sei weiter in $\mathfrak{E}$ $P_1(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{z}_1)$ ein beliebiger Punkt in der Nachbarschaft von Σ_r und $P(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ der Fußpunkt des von P_1 auf Σ_r gefällten Lotes. Der Abstand $\overline{PP_1}$, positiv in der Richtung der Außennormalen (ν) zu Σ_r gerechnet, heiße ζ. Für die kartesischen Koordinaten des Punktes P_1 in $\mathfrak{E}$ erhalten wir daher

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}\left(1 + \frac{\zeta}{r}\right), \qquad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\left(1 + \frac{\zeta}{r}\right). \tag{2}$$

Unser Problem besteht darin, eine Gleichgewichtsfigur $T_1 + S_1$ mit Rotationssymmetrie bezüglich der z-Achse und mit der Ebene $z = 0$ als Symmetrieebene zu bestimmen, die in der Nachbarschaft erster Ordnung von $T + S$ liegt[4]). Wir denken uns zu diesem Zweck $T_1 + S_1$ derart auf $T + S$ topologisch abgebildet, daß die Niveauflächen S_{r1} des Gesamtpotentials der gesuchten Konfiguration umkehrbar, eindeutig und stetig den Flächen S_r entsprechen, ein Punkt P auf S_r allemal auf den Schnittpunkt P_1 der Normalen (ν) zu S_r in P mit S_{r1} und insbesondere die Kreislinie $\mathfrak{K}$ auf sich selbst abgebildet wird. Die zu $T_1 + S_1$ gehörige Winkelgeschwindigkeit ω soll dabei derart beschaffen sein, daß auf die Punkte von $\mathfrak{K}$ keine Kraft wirkt.

Unsere Aufgabe kann als gelöst gelten, wenn wir nach dem Vorgehen von Lichtenstein die Größe ζ als Ortsfunktion in $T + S$ bestimmt haben. Diese ist in $T + S$ stetig, verschwindet auf $\mathfrak{K}$, nimmt in den in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch liegenden Punkten die gleichen Werte an, besitzt Rotationssymmetrie bezüglich der z-Achse und hat beschränkte und, außer möglicherweise auf $\mathfrak{K}$ und auf den Unstetigkeitsflächen $\mathfrak{S}$ (Meridianschnitt $\widetilde{\mathfrak{S}}$)[5]) von f, wo sie sich sprungweise ändern können, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Es genügt, wie man sieht, $\zeta = \zeta(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ in $K + \Sigma$ zu bestimmen. Schließlich ist, unter ε_0 einen hinreichend kleinen positiven Wert verstanden, in $K + \Sigma$

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial \mathfrak{x}}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \mathfrak{z}}\right| \leqq \varepsilon_0, \quad |\zeta| \leqq \sqrt{2}\,\varepsilon_0 r. \tag{3}$$

Es bezeichne jetzt, unter τ einen Punkt in $T + S$ verstanden, $\chi(\tau)$ eine dort erklärte, ganz wie $f(\tau)$ beschaffene Ortsfunktion. Statt $\chi(\tau)$ kann auch wieder $\chi(r)$ geschrieben werden. Wir verlangen, daß auf jeder Niveaufläche S_{r1} die Dichte den Wert $f(r) + \alpha\chi(r)$ habe, unter α einen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Wert verstanden.

---

[4]) Es sei darauf hingewiesen, daß $T + S$ keine Gleichgewichtsfigur ist.

[5]) Genauer $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$. Augenscheinlich sind die Kurven $\widetilde{\mathfrak{S}}$ (genauer $\widetilde{\mathfrak{S}}_1, \ldots, \widetilde{\mathfrak{S}}_n$) Kreislinien um O mit den Radien $\widetilde{R}$ ($\widetilde{R}_1, \ldots, \widetilde{R}_n$).

§ 2.

Bestimmung des Gravitationspotentials und der Winkelgeschwindigkeit.

Das Newtonsche Potential einer mit der Liniendichte 1 belegten Kreislinie vom Halbmesser l in der Ebene $z = z_0$ des Systems x, y, z um den Punkt $(0, 0, z_0)$ als Mittelpunkt im Punkte $(x, 0, z)$, ist, wie man weiß [6])

$$\varkappa \mathfrak{B} = 2\varkappa \log \frac{8l}{d_0} + \varkappa \mathfrak{P}_1\left(\frac{x-l}{l}, \frac{z-z_0}{l}\right) + \varkappa \mathfrak{P}_2\left(\frac{x-l}{l}, \frac{z-z_0}{l}\right), \tag{4}$$

$$d_0^2 = (x-l)^2 + (z-z_0)^2,$$

$\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante.

Hierbei sind die Funktionen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ für hinreichend kleine Werte von $\frac{x-l}{l}$ und $\frac{z-z_0}{l}$ analytisch und regulär. Werden die Anfangsglieder berechnet, so findet man

$$\mathfrak{B} = \log \frac{2l}{d_0}\left\{2 - \frac{x-l}{l} + O\left(\frac{d_0^2}{l^2}\right)\right\} + 2\log 4 + (1 - \log 4)\frac{x-l}{l} + O\left(\frac{d_0^2}{l^2}\right). \tag{5}$$

Was nun das Potential $\mathfrak{B}$ des betrachteten Kreisringkörpers $T + S$ im Innern und auf dem Rande betrifft, so findet sich [7]) für einen Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ in $K + \Sigma$

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{Q}_1\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}\right)\log \frac{8L}{R} + \mathfrak{Q}_2\left(\frac{\mathfrak{x}}{L}, \frac{\mathfrak{z}}{L}\right), \quad \mathfrak{Q}_2(0,0) = 0, \tag{6}$$

unter $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ Potenzreihen verstanden, die für einen hinreichend kleinen Wert von R/L konvergieren und deren Koeffizienten stetige Funktionen von r sind, die überdies abteilungsweise stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzen. Bestimmen wir jetzt noch die Anfangsglieder dieser Entwicklung.

Es sei $(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ irgendein von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ verschiedener Punkt in $K + \Sigma$. Das Potential derjenigen mit der Liniendichte 1 belegten Kreislinie, die bei Rotation von $(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ um die z-Achse entsteht, ist, wie man wegen (5) leicht nachprüft [8]), im Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$ mit $d^2 = (\mathfrak{x} - \bar{\alpha})^2 + (\mathfrak{z} - \bar{\gamma})^2$

$$\varkappa \mathfrak{B}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \varkappa\left[\log \frac{2L}{d}\left\{2 - \frac{\mathfrak{x} - \bar{\alpha}}{L} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)\right\} + 2\log 4\right.$$
$$\left. + (1 - \log 4)\frac{\mathfrak{x} - \bar{\alpha}}{L} + \frac{2\bar{\alpha}}{L} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right)\right]. \tag{7}$$

---

[6]) Vgl. l. c. [2]), III., S. 102 und 106.

[7]) Vgl. l. c. [2]), III., S. 102ff. A. a. O. handelt es sich lediglich um das Potential auf der Oberfläche des Kreisringkörpers. Die Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf unseren Fall übertragen.

[8]) Vgl. l. c. [2]), III., S. 106.

Hieraus folgt[9]) dann für das Gravitationspotential $\mathfrak{W}$:

$$\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{W}(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) = \int_K f(r')\,\mathfrak{V}(\mathfrak{x},\mathfrak{z};\bar{\alpha},\bar{\gamma})\,d\bar{\alpha}\,d\bar{\gamma}$$

$$= 4\pi\Big(\log\frac{8L}{R}\int_0^R f(r')\,r'\,dr' + \log\frac{R}{r}\int_0^r f(r')\,r'\,dr'$$

$$+\int_r^R f(r')\log\frac{R}{r'}\,r'\,dr'\Big)$$

(8)
$$-\frac{\pi\mathfrak{x}}{L}\Big(2\log\frac{8L}{R}\int_0^R f(r')\,r'\,dr' + 2\log\frac{R}{r}\int_0^r f(r')\,r'\,dr'$$

$$+2\int_r^R f(r')\log\frac{R}{r'}\,r'\,dr' - \frac{1}{r^2}\int_0^r f(r')\,r'^3\,dr'$$

$$-\int_r^R f(r')\,r'\,dr' - 2\int_0^R f(r')\,r'\,dr'\Big) + R_0(\mathfrak{x},\mathfrak{z}),$$

$$|R_0| \leqq c_0 R^2\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}\,^{10}), \qquad c_0 \text{ konstant wie später } c_1, c_2, \ldots.$$

Nun zu dem Gravitationspotential des gesuchten Körpers T_1 im Punkte $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{z}_1)$ seines Meridianschnittes $K_1 + \Sigma_1$. Da in den Lichtensteinschen Untersuchungen, die sich mit diesen Dingen befassen (vgl. l. c. [1]), III., S. 491 ff.), von der Voraussetzung, es möge sich um einen

---

[9]) Es ist nämlich:

$$\int_K f(r')\log\frac{8L}{d}\,d\bar{\alpha}\,d\bar{\gamma} = 2\pi\Big(\log\frac{8L}{R}\int_0^R f(r')\,r'\,dr' + \log\frac{R}{r}\int_0^r f(r')\,r'\,dr'$$

$$+\int_r^R f(r')\log\frac{R}{r'}\,r'\,dr'\Big).$$

$$\int_K f(r')\,\bar{\alpha}\log\frac{8L}{d}\,d\bar{\alpha}\,d\bar{\gamma} = \frac{\pi\mathfrak{x}}{r^2}\int_0^r f(r')\,r'^3\,dr' + \pi\mathfrak{x}\int_r^R f(r')\,r'\,dr'.$$

[10]) Für $\frac{R}{L} < \frac{8}{e}$ ist gewiß mit $r < R$ $\frac{r}{L}\log\frac{8L}{r} < \frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}$. Einer späteren Anwendung wegen merken wir noch an, daß wegen (7) und (8) gilt:

(9) $$\Big|\frac{\partial R_0}{\partial\mathfrak{x}}\Big|,\ \Big|\frac{\partial R_0}{\partial\mathfrak{z}}\Big| \leqq c_1 R\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R};\ \Big|\frac{\partial^2 R_0}{\partial\mathfrak{x}^2}\Big|,\ \Big|\frac{\partial^2 R_0}{\partial\mathfrak{x}\,\partial\mathfrak{z}}\Big|,\ \Big|\frac{\partial^2 R_0}{\partial\mathfrak{z}^2}\Big| \leqq c_2\frac{R^2}{L^2}\log\frac{8L}{R}.$$

einfach zusammenhängenden Körper handeln, kein Gebrauch gemacht ist, haben wir hier auch

$$\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1) = \int_{T_1} f(r')\frac{d\tau_1'}{\varrho_1} = \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{W}(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) + \frac{1}{\varkappa}\zeta\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial r} - \int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{d\tau'}{\varrho}$$
$$+ \int_S \zeta' f'\frac{d\sigma'}{\varrho} - \int_{\mathfrak{S}}[f']\zeta'\frac{d\sigma'}{\varrho} + \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots), \tag{10}$$

$$\varrho^2 = (x-x')^2 + y'^2 + (z-z')^2, \quad \varrho_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + y_1'^2 + (z_1 - z_1')^2,$$
$$d\tau' = dx'\,dy'\,dz', \quad d\tau_1' = dx_1'\,dy_1'\,dz_1',$$
$$x_1 = L + \mathfrak{x}_1, \quad z_1 = \mathfrak{z}_1, \quad f' = f(r'), \quad \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{W}^{(n)} = \int_K \mathfrak{R}^{(n)}\frac{d\tau'}{\varrho^n},$$

unter $\mathfrak{R}^{(n)}$ eine Form n-ten Grades der Variablen $\zeta, \zeta', \frac{\partial\zeta'}{\partial x'}, \frac{\partial\zeta'}{\partial y'}, \frac{\partial\zeta'}{\partial z'}$ und unter $[f]$ den Sprungwert der Dichte f auf der Fläche $\mathfrak{S}$ verstanden, $[f] = f(r+0) - f(r-0)$. Wegen (8) und (9) ist

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial r} = -\frac{4\pi}{r}\int_0^r f(r')r'\,dr' + R_1(\mathfrak{x},\mathfrak{z}), \quad |R_1| \leqq c_3 R\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}. \tag{11}$$

Ferner haben wir wegen (7), unter τ bzw $\bar\tau'$ die Punkte $(\mathfrak{x},\mathfrak{z})$ bzw. $(\bar\alpha,\bar\gamma)$ verstanden,

$$\int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\frac{d\tau'}{\varrho} = \int_K \zeta'\frac{df'}{dr'}\mathfrak{B}(\mathfrak{x},\mathfrak{z};\bar\alpha,\bar\gamma)\,d\bar\alpha\,d\bar\gamma \tag{12}$$
$$= 2\log\frac{8L}{R}\int_K \zeta'\frac{df'}{dr'}\,d\bar\tau' + 2\int_K \zeta'\frac{df'}{dr'}\log\frac{R}{d}\,d\bar\tau' + R_2(\mathfrak{x},\mathfrak{z}),$$
$$d\tau' = d\bar\alpha\,d\bar\gamma,$$

$$\int_S \zeta' f'\frac{d\sigma'}{\varrho} = \int_\Sigma \zeta' f'\mathfrak{B}(\bar\tau;s')\,ds' \tag{13}$$
$$= 2\log\frac{8L}{R}\int_\Sigma \zeta' f'\,ds' + 2\int_\Sigma \zeta' f'\log\frac{R}{d}\,ds' + R_3(\mathfrak{x},\mathfrak{z}),$$

$$\int_{\mathfrak{S}} \zeta'[f']\frac{d\sigma'}{\varrho} = 2\log\frac{8L}{R}\int_{\mathfrak{S}} \zeta'[f']\,d\mathfrak{f}' + 2\int_{\mathfrak{S}} \zeta'[f']\log\frac{R}{d}\,d\mathfrak{f}' + R_4(\mathfrak{x},\mathfrak{z}), \tag{14}$$

$|R_2|, |R_3|, |R_4| \leqq c_4\varepsilon_0 R^2\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}$ [11]); ds' bzw. $d\mathfrak{f}'$ die Bogenelemente auf Σ bzw. $\mathfrak{S}$.

---

[11]) Weiter läßt sich leicht zeigen, daß für die Ableitungen von R_2, R_3 und R_4 gilt:

$$\left|\frac{\partial R_2}{\partial\mathfrak{x}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial R_4}{\partial\mathfrak{z}}\right| \leqq c_5\varepsilon_0 R\frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}.$$

Mit Rücksicht auf (10) findet sich nunmehr

$$\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1) = \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{W}(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) - \frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f' r' dr' - 2\int_K \zeta' \frac{df'}{dr'}\log\frac{R}{\bar{d}}\,d\tau'$$

$$+ 2\int_\Sigma \zeta' f' \log\frac{R}{\bar{d}}\,ds' - 2\int_{\widetilde{\mathfrak{S}}} \zeta'[f']\log\frac{R}{\bar{d}}\,d\mathfrak{f}'$$

(15)
$$- 2(\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3)\log\frac{8L}{R} + \zeta R_1 - R_2 + R_3 - R_4$$

$$+ \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots),$$

$$\Theta_1 = \int_K \zeta' \frac{df'}{dr'} d\bar{\tau}', \quad \Theta_2 = \int_\Sigma \zeta' f'\,ds', \quad \Theta_3 = \int_{\widetilde{\mathfrak{S}}} \zeta'[f']\,d\mathfrak{f}'.$$

Damit weiter, wie es in unserer Absicht lag, auf den Punkt O keine Kraft wirkt, setzen wir, unter ω die Winkelgeschwindigkeit von T_1 verstanden,

(16)
$$\omega^2 = -\frac{1}{L}\left\{\frac{\partial\mathfrak{W}_1}{\partial\mathfrak{x}_1} + \varkappa\alpha\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_1}\int_{T_1}\chi(\tau')\frac{d\tau_1'}{\varrho_1}\right\}_{(0,0)}$$

und suchen die Glieder ersten Grades in ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{z}}$ von denen höheren Grades zu trennen. Bezeichnen wir zur Abkürzung in (15) die rechte Seite mit $\mathsf{P}(\bar{\tau};\zeta)$, so haben wir zunächst, $0 < r < \widetilde{R}_1$ angenommen [12]), wegen

(17)
$$\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}}\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1) = \frac{\partial\mathfrak{W}_1}{\partial\mathfrak{x}_1}\left(1 + \frac{\zeta}{r} - \frac{\mathfrak{x}^2\zeta}{r^3} + \frac{\mathfrak{x}}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}}\right) + \frac{\partial\mathfrak{W}_1}{\partial\mathfrak{z}_1}\left(-\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}\zeta}{r^3} + \frac{\mathfrak{z}}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}}\right),$$

wenn wir (15) beiderseits nach $\mathfrak{x}$ differentiieren und umordnen,

(18)
$$\frac{\partial\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1)}{\partial\mathfrak{x}_1} = \frac{\partial\mathsf{P}}{\partial\mathfrak{x}} - \frac{\partial\mathfrak{W}_1}{\partial\mathfrak{z}_1}\left(-\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}\zeta}{r^3} + \frac{\mathfrak{z}}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}}\right)$$

$$+ \left\{\frac{\partial\mathsf{P}}{\partial\mathfrak{x}} - \frac{\partial\mathfrak{W}_1}{\partial\mathfrak{z}_1}\left(-\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{z}\zeta}{r^3} + \frac{\mathfrak{z}}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}}\right)\right\}\cdot\left(-\frac{\zeta}{r} + \frac{\mathfrak{x}^2\zeta}{r^3} - \frac{\mathfrak{x}}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}} + \ldots\right),$$

wobei ε_0 hinreichend klein angenommen werden muß. Die in (18) nicht hingeschriebenen Glieder sind dabei von mindestens zweitem Grade in ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{z}}$.

Lassen wir jetzt in (18) den Punkt $(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) \to (0,0)$, somit auch $(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1) \to (0,0)$ rücken, so verhält sich dort die linke Seite stetig. Also

[12]) $\widetilde{R}_1$ ist der Radius des Meridianschnittes der der Kreislinie $\mathfrak{K}$ zunächstliegenden Unstetigkeitsfläche der Dichte f.

muß das gleiche auch für die rechte Seite oder, da aus Symmetriegründen $\frac{\partial \mathfrak{W}_1(0,0)}{\partial \mathfrak{z}_1} = 0$ ist, für den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\Big[\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{W}(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) - \frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f' r'\,dr' - 2\int_K \zeta'\frac{df'}{dr'}\log\frac{R}{d}\,d\bar{\tau}' + 2\int_\Sigma \zeta' f'\log\frac{R}{d}\,ds'$$

$$- 2\int_{\bar{\mathfrak{S}}} \zeta'[f']\log\frac{R}{d}\,d[f']\Big] + R_5(\bar{\tau};\zeta), \tag{19}$$

$$R_5(\bar{\tau};\zeta) = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\Big[\zeta R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots)\Big]$$

$$+ \frac{\partial P}{\partial \mathfrak{x}}\Big(-\frac{\zeta}{r} + \frac{\mathfrak{x}^2\zeta}{r^3} - \frac{\mathfrak{x}}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}} + \ldots\Big)$$

gelten. In (19) ist augenscheinlich der erste Summand ebenfalls in O stetig, also ist dies auch für $R_5(\bar{\tau};\zeta)$ der Fall.

Wegen (16), (18) und (8) erhalten wir daher

$$\frac{\omega^2}{\varkappa} = \frac{2\pi}{L^2}\log\frac{8L}{R}\int_0^R f' r'\,dr' + \frac{2\pi}{L^2}\int_0^R f'\log\frac{R}{r'}r'\,dr' - \frac{3\pi}{L^2}\int_0^R f' r'\,dr'$$

$$- \frac{1}{L}\Big\{\frac{\partial R_0}{\partial \mathfrak{x}} + \alpha\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1}\Big\}_{(0,0)} + \frac{2}{L}\int_K \zeta'\frac{df'}{dr'}\frac{\bar{\alpha}}{r'^2}\,d\bar{\tau}' \tag{20}$$

$$- \frac{2}{R^2 L}\int_\Sigma \zeta' f'\bar{\alpha}\,ds' + \frac{2}{\bar{R}^2 L}\int_{\bar{\mathfrak{S}}} \zeta'[f']\bar{\alpha}\,d[f'] - \frac{R_5(0;0)}{L}\ ^{13}).$$

§ 3.

Die Integro-Differentialgleichung des Problems.

Damit der Körper T_1 eine Gleichgewichtsfigur darstellt, muß in $K_1 + \Sigma_1$ auf jeder Meridiankurve Σ_{r1} der Niveauflächen S_{r1} die Beziehung

$$\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1) + \alpha\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1} + \frac{\omega^2}{2\varkappa}(L+\mathfrak{x}_1)^2 = C_1(r), \tag{21}$$

$C_1(r)$ auf S_{r1} konstant,

gelten. Wegen (10), (20) und

$$(L+\mathfrak{x}_1)^2 = L^2 + 2L\mathfrak{x} + \mathfrak{x}^2 + 2(L+\mathfrak{x})\frac{\mathfrak{x}\zeta}{r} + \frac{\mathfrak{x}^2\zeta^2}{r^2}$$

---

[13]) $R_5(0;0)$, genauer $R_5[0,0;\zeta(0,0)]$, bezeichnet den Wert von R_5 in O, weshalb auch $\zeta = 0$ angenommen werden muß. In entsprechender Weise werden die Werte von R_1, R_2, R_3 und R_4 in O mit $R_1(0)$, $R_2(0)$, $R_3(0)$ und $R_4(0)$ bezeichnet.

nimmt (21) nach einer leichten Umformung die Gestalt

$$-\frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\int_K \zeta'\frac{df'}{dr'}\Big(\log\frac{R}{d}-\frac{\mathfrak{x}\,\bar{\alpha}}{r'^2}\Big)\,d\bar{\tau}' + 2\int_\Sigma \zeta' f'\Big(\log\frac{R}{d}-\frac{\mathfrak{x}\,\bar{\alpha}}{\bar{R}^2}\Big)\,ds'$$

$$-2\int_{\bar{\mathfrak{S}}}\zeta'[f']\Big(\log\frac{R}{d}-\frac{\mathfrak{x}\,\bar{\alpha}}{\bar{R}^2}d\Big)'$$

$$= s(r) + \frac{\pi\,\mathfrak{x}}{L}\Big[2\log\frac{R}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\int_0^r f'\log\frac{R}{r'}\,r'\,dr' - \frac{1}{r^2}\int_0^r f'\,r'^3\,dr'$$

$$(22)\qquad + \int_0^r f'\,r'\,dr'\Big] - R_0(\bar{\tau}) - \alpha\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1} + 2(\Theta_1-\Theta_2+\Theta_3)\log\frac{8L}{R}$$

$$-\zeta R_1(\tau) + R_2(\bar{\tau}) - R_3(\bar{\tau}) + R_4(\bar{\tau}) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots)$$

$$-\frac{\omega^2}{2\varkappa}(L^2+\mathfrak{x}^2) - \frac{\omega^2(L+\mathfrak{x})\,\mathfrak{x}\,\zeta}{\varkappa r} - \frac{\omega^2\,\mathfrak{x}^2\,\zeta^2}{2\varkappa r^2} + \mathfrak{x}\,R_5(0;0)$$

$$+\mathfrak{x}\Big\{\frac{\partial R_0}{\partial\mathfrak{x}} + \alpha\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_1}\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1}\Big\}_{(0,0)},$$

$$s(r) = C_1(r) - 4\pi\Big(\log\frac{8L}{R}\int_0^R f'\,r'\,dr' + \log\frac{R}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' + \int_r^R f'\log\frac{R}{r'}\,r'\,dr'\Big),$$

an. Lassen wir jetzt noch $(\mathfrak{x},\mathfrak{z})$ in (22) gegen $(0,0)$ rücken und subtrahieren die so erhaltene Gleichung von (22), so erhalten wir wegen $\zeta(0,0)=0$ die Integro-Differentialgleichung unseres Problems:

$$-\frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\int_K\zeta'\frac{df'}{dr'}\Big(\log\frac{r'}{d}-\frac{\mathfrak{x}\,\bar{\alpha}}{r'^2}\Big)\,d\bar{\tau}' + 2\int_\Sigma\zeta' f'\Big(\log\frac{R}{d}-\frac{\mathfrak{x}\,\bar{\alpha}}{\bar{R}^2}\Big)\,ds'$$

$$(23)\qquad -2\int_{\bar{\mathfrak{S}}}\zeta'[f']\Big(\log\frac{\bar{R}}{d}-\frac{\mathfrak{x}\,\bar{\alpha}}{\bar{R}^2}\Big)d\Big]' = r^2\,h\,s(r) + \boldsymbol{L}\{\bar{\tau};\zeta\},$$

$$r^2\,h\,s(r) = s(r) - s(0)\ ^{14});$$

---

14) Es ist

$$s(r)-s(0) = C_1(r)-C_1(0)-4\pi\Big(\log\frac{R}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - \int_0^r f'\log\frac{R}{r'}\,r'\,dr'\Big)$$

$$= C_1(r)-C_1(0)-4\pi\int_0^r f'\log\frac{r'}{r}\,r'\,dr',$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^r f'\log\frac{r'}{r}\,r'\,dr' = -\int_0^r f'\,\frac{r'}{r}\,dr' = O(r),$$

somit

$$\int_0^r f'\log\frac{r'}{r}\,r'\,dr' = O(r^2)$$

ist.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}\{\bar\tau;\zeta\} = {}& \frac{\pi\,\mathfrak{x}}{L}\Big[2\log\frac{R}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\int_0^r f'\log\frac{R}{r'}\,r'\,dr' - \frac{1}{r^2}\int_0^r f'\,r'^3\,dr' \\
& + \int_0^r f'\,r'\,dr'\Big] - R_0(\bar\tau) + R_0(0) - \alpha\int_{T_1}\chi'\Big(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\Big)\,d\tau_1' \\
& - \zeta R_1(\bar\tau) + R_2(\bar\tau) - R_2(0) - R_3(\bar\tau) + R_3(0) + R_4(\bar\tau) - R_4(0) \\
& - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots) + \frac{1}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots) \\
& - \frac{\omega^2\,\mathfrak{x}^2}{2\varkappa} - \frac{\omega^2\,(L+\mathfrak{x})\,\mathfrak{x}\,\zeta}{\varkappa\,r} - \frac{\omega^2\,\mathfrak{x}^2\,\zeta^2}{2\varkappa\,r^2} + \mathfrak{x}\,R_5(0;0) \\
& + \mathfrak{x}\Big\{\frac{\partial R_0}{\partial\,\mathfrak{x}} + \alpha\,\frac{\partial}{\partial\,\mathfrak{x}_1}\int_{T_1}\chi'\frac{d\,\tau_1'}{\varrho_1}\Big\}_{(0,0)},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$${}_0\varrho_1^2 = (L - x_1')^2 + y_1'^2 + z_1'^2.$$

Hierbei bezeichnet h einen hinreichend kleinen Parameter und $\mathfrak{s}(r)$ eine nebst ihrer Ableitung erster Ordnung in $\langle 0, R\rangle$ stetige Funktion von r. ${}_0\mathfrak{W}^{(2)}, {}_0\mathfrak{W}^{(3)}, \ldots$ sind die betreffenden Integralausdrücke im Punkte $(0,0)$ genommen.

Wir wenden uns nunmehr der Untersuchung der zu (23) gehörigen homogenen Integralgleichung zu, nachdem wir (23) eine etwas andere Gestalt gegeben haben. Ist nämlich

$$v_1 = \int_K \zeta'\,\frac{\bar\gamma}{r'^2}\,\frac{d\,f'}{d\,r'}\,d\,\bar\tau', \quad v_2 = \int_\Sigma \zeta'\,\frac{\bar\gamma}{R^2}\,f'\,d\,s', \quad v_3 = \int_{\widetilde\Sigma} \zeta'\,\frac{\bar\gamma}{\widetilde R^2}\,[f']\,d\,\widetilde\sigma' \tag{25}$$

gesetzt, so kann (23) auch in der Form

$$
\begin{aligned}
& -\frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\int_K \zeta'\frac{d\,f'}{d\,r'}\Big(\log\frac{r'}{d} - \frac{\mathfrak{x}\,\bar\alpha + \mathfrak{z}\,\bar\gamma}{r'^2}\Big)\,d\,\bar\tau' \\
& + 2\int_\Sigma \zeta'\,f'\Big(\log\frac{R}{d} - \frac{\mathfrak{x}\,\bar\alpha + \mathfrak{z}\,\bar\gamma}{R^2}\Big)\,d\,s' - 2\int_{\widetilde\Sigma}\zeta'\,[f']\Big(\log\frac{\widetilde R}{d} - \frac{\mathfrak{x}\,\bar\alpha + \mathfrak{z}\,\bar\gamma}{\widetilde R^2}\Big)\,d\,\widetilde\sigma' \\
& = r^2\,h\,\mathfrak{s}(r) + \boldsymbol{L}\{\bar\tau;\zeta\} + 2\,\mathfrak{z}\,(v_1 - v_2 + v_3)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

oder mit $\mathfrak{x} = r\cos\varphi$, $\mathfrak{z} = r\sin\varphi$, $\bar\alpha = r'\cos\varphi'$, $\bar\gamma = r'\sin\varphi'$, $\vartheta = \varphi - \varphi'$ in der Gestalt

$$
\begin{aligned}
& -\frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\int_0^R\int_0^{2\pi}\zeta'\frac{d\,f'}{d\,r'}\Big(r'\log\frac{r'}{d} - r\cos\vartheta\Big)\,dr'\,d\,\varphi' \\
& + 2\int_0^{2\pi}\zeta'\,f'\Big(R\log\frac{R}{d} - r\cos\vartheta\Big)\,d\,\varphi' - 2\int_0^{2\pi}\zeta'\,[f']\Big(\widetilde R\log\frac{\widetilde R}{d} - r\cos\vartheta\Big)\,d\,\varphi' \\
& = r^2\,h\,\mathfrak{s}(r) + \boldsymbol{L}\{\bar\tau;\zeta\} + 2\,\mathfrak{z}\,(v_1 - v_2 + v_3),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

kürzer

$$(28)\qquad -\frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\int_0^\infty df(r')\int_0^{2\pi}\zeta'\left(r'\log\frac{r'}{d} - r\cos\vartheta\right)d\varphi' = r^2 h_3(r) + \boldsymbol{L}\{\bar{\tau};\zeta\} + 2\mathfrak{z}(v_1 - v_2 + v_3)$$

geschrieben werden. Wir werden jetzt zeigen, daß die homogene Integralgleichung

$$(29)\qquad -\frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\int_0^\infty df(r')\int_0^{2\pi}\zeta'\left(r'\log\frac{r'}{d} - r\cos\vartheta\right)d\varphi' = 0$$

keine Nullösungen besitzt.

Man erkennt zunächst in gleicher Weise wie Lichtenstein [15]), daß eine Lösung von (29) in $K + \Sigma$ beschränkte und (außer eventuell in O) abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen muß, wobei die Sprungstellen auf den Kurven $\widetilde{\mathfrak{S}}$ gelegen sind.

Wir setzen nunmehr im Sinne der Äquivalenz

$$(30)\qquad \zeta(\bar{\tau}) \sim \frac{b_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n(r)\cos n\varphi + a_n(r)\sin n\varphi).$$

Wegen

$$(31)\qquad \int_0^{2\pi}\log\frac{r'}{d}\,d\varphi' = \begin{cases} 2\pi\log\frac{r'}{r} & (r' \leqq r), \\ 0 & (r' \geqq r), \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos n\varphi'\log\frac{r'}{d}\,d\varphi' = \begin{cases} \pi\left(\frac{r'}{r}\right)^n\frac{\cos n\varphi}{n} & (r' \leqq r) \\ \pi\left(\frac{r}{r'}\right)^n\frac{\cos n\varphi}{n} & (r' \geqq r) \end{cases} \qquad (n \geqq 1)$$

und einer analogen Formel für $\int_0^{2\pi}\sin n\varphi'\log\frac{r'}{d}\,d\varphi'$ finden wir für die Koeffizienten $b_0(r)$, $b_1(r)$, $b_n(r)$ $(n \geqq 2)$ folgende Integralgleichungen:

$$(32)\qquad -\frac{2\pi b_0(r)}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - 2\pi\int_0^r df(r')\,b_0(r')\,r'\log\frac{r'}{r} = 0,$$

$$(33)\qquad -\frac{4\pi b_1(r)}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - \frac{2\pi}{r}\int_0^r df(r')\,b_1(r')(r'^2 - r^2) = 0,$$

$$(34)\qquad -\frac{4\pi b_n(r)}{r}\int_0^r f'\,r'\,dr' - \frac{2\pi}{n}\int_0^r df(r')\,b_n(r')\,r'\left(\frac{r'}{r}\right)^n - \frac{2\pi}{n}\int_r^\infty df(r')\,b_n(r')\,r'\left(\frac{r}{r'}\right)^n = 0, \qquad n \geqq 2.$$

[15]) Vgl. l. c. [1]), III., S. 527 ff.

Für a_1 und a_n $(n \geqq 2)$ bekommen wir zu (33) und (34) vollständig analoge Gleichungen.

Wenn man die Betrachtungen Lichtensteins zu dem entsprechenden räumlichen Fall[16]) (inhomogener Kugelkörper) sinngemäß überträgt, so findet man leicht, daß (32) und (34) außer $b_0(r) \equiv 0$ bzw. $b_n(r) \equiv 0$ keine Lösungen besitzt. Wir werden daher auf die genaue Durchführung verzichten können und lediglich zeigen, daß auch (33) keine von $b_1(r) \equiv 0$ verschiedene Lösung haben kann.

Zunächst ist gewiß wegen des Faktors $r'^2 - r^2$ unter dem Integralzeichen des zweiten Summanden $b_1(r)$ in $\langle 0, R\rangle$ stetig. Es sei weiter

$$f(r') \geqq P, \quad (0 \leqq r' \leqq r < R); \qquad M = \operatorname{Max} |b_1(r')| \text{ in } 0 \leqq r' \leqq r < R, \tag{35}$$

somit

$$\int_0^r f(r')\, r'\, dr' \geqq \frac{P r^2}{2},$$

$$\left| \int_0^r df(r')\, b_1(r')\, (r'^2 - r^2) \right| \leqq M r^2 \int_0^r |df(r')|. \tag{36}$$

Mit Rücksicht auf (33) haben wir daher

$$|b_1(r)| \leqq \frac{M}{P} \int_0^r |df(r')|. \tag{37}$$

Es sei jetzt $\hat{r} > 0$ so klein gewählt, daß gewiß

$$\int_0^{\hat{r}} |df(r')| < P, \quad (\hat{r} < R) \tag{38}$$

ausfällt. Dann ist in dem Intervall $0 \leqq r \leqq \hat{r}$ gewiß $b_1(r) \equiv 0$.

Die Gleichung (33) nimmt nunmehr die Form

$$2 b_1(r) \int_0^r f'\, r'\, dr' + \int_{\hat{r}}^r df(r')\, b_1(r')\, (r'^2 - r^2) = 0, \quad \hat{r} < r \leqq R \tag{39}$$

an. Ist jetzt

$$M_{\hat{r}} = \operatorname{Max} |b_1(r')| \quad \text{in} \quad \langle \hat{r}, r\rangle, \quad \hat{r} < r \leqq R, \tag{40}$$

---

[16]) Vgl. l. c. [1]) III., S. 536 ff. Daß (34) keine Nullösungen besitzt, erkennt man hiernach so: Ist etwa $|b_n(r)| \leqq \mathfrak{L}$, so liefert uns (34)

$$\left| \frac{2 b_n(r)}{r} \int_0^r f'\, r'\, dr' \right| \leqq -\frac{\mathfrak{L}}{n r} \int_0^r r'^2\, df(r') - \frac{r\mathfrak{L}}{n} \int_r^\infty df(r')$$

$$= -\frac{\mathfrak{L}}{n r} \{ [r'^2 f(r')]_0^r - 2 \int_0^r r' f'\, dr' \} - \frac{r\mathfrak{L}}{n} [f(r')]_r^\infty = \frac{2\mathfrak{L}}{n r} \int_0^r f'\, r'\, dr',$$

woraus $|b_n(r)| \leqq \frac{\mathfrak{L}}{n}$ folgt. Daher ist für $n \geqq 2$ gewiß $b_n(r) \equiv 0$.

so erhalten wir wegen (39)

$$(41)\qquad |b_1(r)| = \frac{\left|\int_{\hat{r}}^{r} d f(r')\, b_1(r')\,(r'^2 - r^2)\right|}{2\int_0^r f' r'\, dr'} \leqq \frac{M_f\,(r^2 - \hat{r}^2)\int_{\hat{r}}^{r} |d f(r')|}{P\,\hat{r}^2}.$$

Wählen wir jetzt eine Zahl $\dot{r}\,(\dot{r} \leqq R)$ so klein, daß

$$(42)\qquad \dot{r}^2 - \hat{r}^2 < \frac{P\,\hat{r}^2}{\int_0^R |d f(r')|}$$

ist, so wird in dem Intervall $\langle \hat{r}, \dot{r}\rangle$ ebenfalls $b_1(r) \equiv 0$ sein. Nach einer endlichen Anzahl Wiederholungen des letzten Schlusses erkennen wir daher, daß in $\langle 0, R\rangle$ die Integralgleichung (33) nur die Lösung $b_1(r) \equiv 0$ besitzt. Da sich auf entsprechende Weise auch $a_1(r) \equiv 0$ und daneben natürlich auch $a_n(r) \equiv 0$ ergibt, so ist damit bewiesen, daß in der Tat (29) keine Nullösungen besitzt.

Zum Schluß wollen wir uns damit begnügen, in aller Kürze den Konvergenzbeweis anzudeuten, da sich eine genaue Durchführung in der Lichtensteinschen, mehrfach zitierten Arbeit (l. c. [1]), III.) bei der Behandlung eines ganz analogen Problems findet. Wir erkennen zunächst wegen [14]), (16), (21) und (23), daß

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\{\bar{\tau};\zeta\} = &-\frac{1}{\varkappa}\{\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1) - \mathfrak{W}_1(0,0) - \frac{1}{2L}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\mathfrak{W}_1(0,0)[(L+\mathfrak{x}_1)^2 \\ &- L^2]\} - \alpha\int_{T_1}\chi'\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{0\varrho_1}\right)d\tau_1' + \alpha\left[\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1}\right]_{(0,0)} \\ &- \frac{4\pi\zeta}{r}\int_0^r f' r'\, dr' - 2\int_0^\infty d f(r')\int_{\Sigma_{r'}}\zeta'\left(\log\frac{r'}{d} - \frac{\mathfrak{x}\bar{\alpha} + \mathfrak{z}\bar{\gamma}}{r'^2}\right)d s' \\ &+ 4\pi\int_0^r f' \log\frac{r'}{r}\, r'\, dr', \end{aligned} \tag{43}$$

somit mit Rücksicht auf [14]) und $\zeta = O(r)$

$$(44)\qquad \left|\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \mathfrak{x}}\right|, \left|\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \mathfrak{z}}\right| \leqq c_6 r, \quad |\boldsymbol{L}| \leqq c_7 r^2$$

ist.

Die erste Näherung $\overset{1}{\zeta}$ der Lösung von (28) bestimmen wir aus

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi\overset{1}{\zeta}}{r}\int_0^r f' r'\, dr' - 2\int_0^\infty d f(r')\int_0^{2\pi}\overset{1}{\zeta}'\left(r'\log\frac{r'}{d} - r\cos\vartheta\right)d\varphi' \\ = r^2 h\, s(r) + \boldsymbol{L}\{\bar{\tau};0\} \end{aligned} \tag{45}$$

und finden wegen (23), (24) und (44)

$$\left|\frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial \mathfrak{x}}\right|, \left|\frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial \mathfrak{z}}\right| \leqq c_8\left(h+\alpha+\frac{R}{L}\right), \quad |\overset{1}{\zeta}| \leqq \sqrt{2}\, c_8\left(h+\alpha+\frac{R}{L}\right) r.$$ [17])

Hierbei ist $\overset{1}{\zeta}$, wie übrigens auch alle weiteren Approximationen, in bezug auf die Gerade $\mathfrak{z}=0$ symmetrisch, und es zeigt sich daher, daß, wenn wir in (25) für ζ die Funktion $\dot{\zeta}$ einführen und die betreffenden Integralausdrücke mit $\overset{1}{v}_1, \overset{1}{v}_2, \overset{1}{v}_3$ bezeichnen,

$$\overset{1}{v}_1 = \overset{1}{v}_2 = \overset{1}{v}_3 = 0$$

wird. Allgemein erkennt man aus (24), daß mit

$$\Omega = \text{ob. Grenze } \left\{\left|\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial \mathfrak{x}}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial \mathfrak{z}}\right|\right\} \text{ in } K+\Sigma, \text{ somit } |\overset{n-1}{\zeta}| \leqq \sqrt{2}\,\Omega r \tag{46}$$

$$\Omega_1 = \text{Max}\left\{|h|, |\alpha|, \frac{R}{L}\log\frac{8L}{R}\right\}$$

und $\overset{n-1}{L} = L\{\bar{\tau}; \overset{n-1}{\zeta}\}$

$$|\overset{n-1}{L}|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{L}}{\partial \mathfrak{x}}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{L}}{\partial \mathfrak{z}}\right| \leqq c_9(\Omega_1 + \Omega\,\Omega_1 + \Omega^2) \tag{47}$$

ist. Daher haben wir wegen (44), da die Beziehung (47) für alle r gilt, die Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial \overset{n-1}{L}}{\partial \mathfrak{x}}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{L}}{\partial \mathfrak{z}}\right| \leqq c_{10}(\Omega_1 + \Omega\,\Omega_1 + \Omega^2) r, \tag{48}$$

$$|\overset{n-1}{L}| \leqq \sqrt{2}\, c_{10}(\Omega_1 + \Omega\,\Omega_1 + \Omega^2) r^2.$$

Aus der Integralgleichung

$$-\frac{4\pi\overset{n}{\zeta}}{r}\int_0^r f' r'^2 dr' - 2\int_0^\infty df(r')\int_0^{2\pi}\overset{n}{\zeta}'\left(r'\log\frac{r'}{d} - r\cos\vartheta\right)d\varphi' = r^2 h\, s(r) + \overset{n-1}{L} \tag{49}$$

findet sich jetzt

$$\left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial \mathfrak{x}}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial \mathfrak{z}}\right| \leqq c_{11}(\Omega_1 + \Omega\,\Omega_1 + \Omega^2), \quad |\overset{n}{\zeta}| \leqq \sqrt{2}\, c_{11}(\Omega_1 + \Omega\,\Omega_1 + \Omega^2) r. \tag{50}$$

Hierbei sind $\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial \mathfrak{x}}$ und $\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial \mathfrak{z}}$ in jedem Stetigkeitsintervalle von f, außer höchstens in O, stetig, wofern das gleiche für $\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial \mathfrak{x}}$, $\frac{\partial \overset{n-1}{\zeta}}{\partial \mathfrak{z}}$ gilt[18]). Wie

[17]) Man vergleiche die ins einzelne gehenden Ausführungen Lichtensteins, l. c. [1]), III., die sich mit der Auflösung derartiger nicht homogener „belasteter" Integralgleichungen mit unsymmetrischem Kern befassen. Vgl. auch L. Lichtenstein, Bemerkungen über belastete Integralgleichungen, Studia mathematica, T. III (1931), S. 212 ff.

[18]) $\frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial \mathfrak{x}}$, $\frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial \mathfrak{z}}$ haben gewiß diese Eigenschaften.

Lichtenstein zeigte (vgl. l. c. [1]) III., S. 554 ff.), kann man nunmehr den Prozeß der sukzessiven Approximationen, die aus den zu (49) analogen Gleichungen bestimmbar sind, beliebig fortsetzen.

Es möge weiter

$$\left|\frac{\partial(\overset{n}{\zeta}-\overset{n-1}{\zeta})}{\partial \mathfrak{x}}\right|, \quad \left|\frac{\partial(\overset{n}{\zeta}-\overset{n-1}{\zeta})}{\partial \mathfrak{z}}\right| \leqq \sigma, \quad |\overset{n}{\zeta}-\overset{n-1}{\zeta}| \leqq \sqrt{2}\,\sigma r \tag{51}$$

gelten. Wir finden mit Rücksicht auf (24) und (44)

$$\left|\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}(\overset{n}{L}-\overset{n-1}{L})\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}(\overset{n}{L}-\overset{n-1}{L})\right| \leqq c_{12}\sigma(\Omega+\Omega_1)r,$$
$$|\overset{n}{L}-\overset{n-1}{L}| \leqq \sqrt{2}\,c_{12}\sigma(\Omega+\Omega_1)r^2 \tag{52}$$

und schließlich

$$\left|\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}(\overset{n+1}{\zeta}-\overset{n}{\zeta})\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}(\overset{n+1}{\zeta}-\overset{n}{\zeta})\right| \leqq c_{13}\sigma(\Omega+\Omega_1),$$
$$|\overset{n+1}{\zeta}-\overset{n}{\zeta}| \leqq \sqrt{2}\,c_{13}\sigma(\Omega+\Omega_1)r. \tag{53}$$

Hiermit ist auch die Konvergenz der Approximationen gesichert. Die Winkelgeschwindigkeit finden wir, indem wir die Lösung

$$\zeta = \overset{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}(\overset{n+1}{\zeta}-\overset{n}{\zeta})$$

in (20) einsetzen. Man erhält

$$\frac{\omega^2}{\varkappa} = \frac{2\pi}{L^2}\log\frac{8L}{R}\int_0^R f' r'\,dr' + R^*, \quad |R^*| \leqq c^*\left(\frac{R^3}{L^3}+\alpha\frac{R}{L}+h\frac{R}{L}\right), \ (c^* \text{ konstant}).$$

Zweites Kapitel.

Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes.

Wir wenden uns noch kurz der Behandlung einer aus nicht notwendig homogener, inkompressibler Flüssigkeit bestehenden Gleichgewichtsfigur zu, die im Außenfelde eines fest gedachten, punktförmigen Attraktionszentrums um dieses rotiert und in der Nachbarschaft erster Ordnung einer Kugel liegt. Dieses Problem werde folgendermaßen präzisiert:

Im Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z möge sich eine punktförmige Masse M befinden. Der Punkt $O(L, 0, 0)$ sei der Anfangspunkt eines neuen Systems $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, das mit dem früheren durch die Beziehungen

$$x = L + \mathfrak{x}, \quad y = \mathfrak{y}, \quad z = \mathfrak{z}$$

verknüpft ist. Um O als Mittelpunkt ist ein Kugelkörper T (Randfläche S) mit dem Radius R gelegen Dieser ist mit inkompressibler, nicht notwendig homogener Flüssigkeit der Dichte $f(r)$ erfüllt, $(r^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)$, die auf konzentrischen Kugelflächen S_r um O vom Radius r konstant ist. Die Dichtefunktion habe im übrigen die gleichen Eigenschaften wie die entsprechende im ersten Kapitel, die Sprungflächen seien auch hier mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet (Radius $\mathfrak{R}$).

Wie man weiß, hat das Gravitationspotential dieser Kugel im Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ den Wert

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \frac{4\pi\varkappa}{r}\int_0^r f' r'^2 dr' + 4\pi\varkappa\int_r^R f' r' dr' = \overline{\mathfrak{W}}(r). \tag{55}$$

Es bezeichne weiter

$$\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1) = \varkappa\int_{T_1} f' \frac{d\tau_1'}{\varrho_1}, \quad \varrho_1^2 = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_1')^2 + (\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_1')^2 + (\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_1')^2 \tag{56}$$

mit

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}\left(1 + \frac{\zeta}{r}\right), \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}\left(1 + \frac{\zeta}{r}\right), \quad \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\left(1 + \frac{\zeta}{r}\right), \quad d\tau_1' = d\mathfrak{x}_1' d\mathfrak{y}_1' d\mathfrak{z}_1' \tag{57}$$

das Gravitationspotential des gesuchten Körpers T_1 (Randfläche S_1) [19]), dessen umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung auf T durch eine wie im ersten Kapitel in $T + S$ definierte Ortsfunktion ζ vermittelt wird. Wir bekommen wiederum die Lichtensteinsche Entwicklung

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1) = \overline{\mathfrak{W}}(r) + \zeta\frac{d\overline{\mathfrak{W}}}{dr} - \varkappa\int_T \zeta'\frac{df'}{dr'}\frac{d\tau'}{\varrho} + \varkappa\int_S \zeta' f'\frac{d\sigma'}{\varrho} \\ - \int_{\mathfrak{S}} \zeta'[f']\frac{d\sigma'}{\varrho} + \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots,\end{aligned} \tag{58}$$

$$\varrho^2 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')^2 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}')^2 + (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}')^2,$$

unter $\mathfrak{W}^{(2)}, \ldots$ wieder jene Integralausdrücke über ζ, ζ', $\frac{\partial\zeta'}{\partial\mathfrak{x}'}$, $\frac{\partial\zeta'}{\partial\mathfrak{y}'}$, $\frac{\partial\zeta'}{\partial\mathfrak{z}'}$ verstanden.

Um zu erreichen, daß bei der neuen Konfiguration im Punkte O die Schwerkraft verschwindet, bestimmen wir die Winkelgeschwindigkeit ω, mit der T_1 um den Zentralkörper kreist, derart, daß

$$\omega^2 = -\frac{1}{L}\left\{\frac{\partial\mathfrak{W}_1}{\partial\mathfrak{x}_1} + \frac{\partial G}{\partial\mathfrak{x}_1} + \frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_1}\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1}\right\}_{(0,0,0)} \tag{59}$$

[19]) Wenn er mit der Dichte $f(r)$ erfüllt ist. Es soll aber auch hier, wie im ersten Kapitel, die Dichte der neuen Verteilung den Wert $f(r) + \alpha\chi(r)$ annehmen, wobei α und $\chi(r)$ ganz wie dort erklärt sind. — Auch alle übrigen Bezeichnungen sind, wenn nichts anderes gesagt ist, sinngemäß die gleichen wie im ersten Kapitel.

wird. Dabei ist, unter τ der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ verstanden, wenn nur $\frac{R}{L}$ hinreichend klein ist,

$$\varkappa G(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1) = \varkappa M[(L+\mathfrak{x}_1)^2 + \mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{z}_1^2]^{-1/2} = \frac{\varkappa M}{L}\Big(1 - \frac{\mathfrak{x}_1}{L} + R_6\{\tau;\zeta\}\Big)$$

$$|R_6\{\tau;\zeta\}| \leqq c_{14}\frac{R^2}{L^2} \tag{60}$$

das Gravitationspotential des Zentralkörpers. Wird die rechte Seite in (58) zur Abkürzung mit $\mathsf{P}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bezeichnet, so findet sich wie im ersten Kapitel

$$\frac{\omega^2}{\varkappa} = \frac{1}{L}\Big[\int_T \zeta' \frac{df'}{dr'}\frac{\mathfrak{x}'}{r'^3}d\tau' - \int_S \zeta' f' \frac{\mathfrak{x}'}{R^3}d\sigma' + \int_{\mathfrak{S}} \zeta'[f']\frac{\mathfrak{x}'}{\mathfrak{R}^3}d\sigma' - R_7\{0;0\}$$

$$+ \frac{M}{L^2} - \Big\{\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}_1}\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1}\Big\}_{(0,0,0)}\Big], \tag{61}$$

$$\varkappa R_7(\tau;\zeta) = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots) + \frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \mathfrak{x}}\Big[-\frac{\zeta}{r} + \frac{\mathfrak{x}^2\zeta}{r^3} - \frac{\mathfrak{x}}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}} + \ldots\Big],$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von mindestens zweitem Grade in $\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{x}}$ sind. Die Gleichgewichtsbedingung unseres Problems lautet nun

$$\mathfrak{W}_1(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1) + \varkappa\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1} + \varkappa G(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1)$$

$$+ \frac{\omega^2}{2}[(L+\mathfrak{x}_1)^2 + \mathfrak{y}_1^2] = \overline{C}_1(r), \quad (\overline{C}_1(r) \text{ auf } S_{r_1} \text{ konstant}), \tag{62}$$

oder aber mit Rücksicht auf (58), (60) und (61) nach einiger Umformung, wenn davon noch die auf den Punkt O angewandte Beziehung (62) abgezogen wird, mit $h r^2 \mathfrak{s}(r) = s(r) - s(0)$, $\varkappa s(r) = \overline{C}_1(r) - \overline{\mathfrak{W}}(r) - \frac{\varkappa M}{L}$

$$-\frac{4\pi\zeta}{r^2}\int_0^r f' r'^2 dr' - \int_T \zeta'\frac{df'}{dr'}\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r'} - \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}'}{r'^3}\Big)d\tau' + \int_S \zeta' f'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R} - \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}'}{R^3}\Big)d\sigma'$$

$$- \int_{\mathfrak{S}} \zeta'[f']\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}'}{\mathfrak{R}^3}\Big)d\sigma' = h r^2 \mathfrak{s}(r) + \boldsymbol{L}\{\tau;\zeta\}; \tag{63}$$

$$\boldsymbol{L}\{\tau;\zeta\} = -\frac{M}{L}(R_6\{\tau;\zeta\} - R_6\{0;0\}) + \mathfrak{x} R_7\{0;0\} + \frac{M}{r}\frac{\mathfrak{x}\zeta}{L^2}$$

$$+ \mathfrak{x}\Big\{\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_1}\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{d\tau_1'}{\varrho_1}\Big\}_{(0,0,0)} - \frac{\omega^2}{\varkappa r}[(L+\mathfrak{x})\mathfrak{x}\zeta + \mathfrak{y}^2\zeta] - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)$$

$$-\frac{\omega^2}{2\varkappa r^2}\zeta^2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots) + \frac{1}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Dies ist die fundamentale Integro-Differentialgleichung, die kürzer

$$(64)\quad -\frac{4\pi\zeta}{r^2}\int_0^r f'\,r'^2\,dr' - \int_0^\infty df(r')\int_{S_{r'}}\zeta'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r'}-\frac{\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'}{r'^3}\right)d\sigma' = h\,r^2\,\mathfrak{s}(r) + \boldsymbol{L}\{\tau;\zeta\},$$

oder aber mit $v = \int_0^\infty df(r')\int_{S_{r'}}\zeta'\frac{\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}'+\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'}{r'^3}d\sigma'$ auch in der Gestalt

$$(65)\quad -\frac{4\pi\zeta}{r^2}\int_0^r f'\,r'^2\,dr' - \int_0^\infty df(r')\int_{S_{r'}}\zeta'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r'}-\frac{\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'+\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}'+\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'}{r'^3}\right)d\sigma' = h\,r^2\,\mathfrak{s}(r) + \boldsymbol{L}(\tau;\zeta) + v$$

geschrieben werden kann.

Betrachten wir noch die homogene Integralgleichung

$$(66)\quad -\frac{4\pi\zeta}{r^2}\int_0^r f'\,r'^2\,dr' - \int_0^\infty df(r')\int_{S_{r'}}\zeta'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r'}-\frac{\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'+\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}'+\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}'}{r'^3}\right)d\sigma' = 0^{19a})$$

und setzen wir wie Lichtenstein[20]) im Sinne der Äquivalenz

$$(67)\quad \zeta(\tau) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n+1}\zeta_{nm}(r)\,Y_{nm},$$

unter $Y_{nm}(\vartheta,\varphi)$, ($r$, ϑ, φ die räumlichen Polarkoordinaten von τ), die allgemeinen orthogonalisierten und irgendwie normierten Kugelfunktionen verstanden.

Wegen

$$(68)\quad \int_{S_{r'}}\frac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}\,Y_{nm}(\vartheta',\varphi')\,d\sigma' = \begin{cases}\dfrac{4\pi}{2n+1}\cdot\dfrac{r^n}{(r')^{n-1}}\,Y_{nm}(\vartheta,\varphi), & (r\leqq r')\\[2ex] \dfrac{4\pi}{2n+1}\cdot\dfrac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}}\,Y_{nm}(\vartheta,\varphi), & (r'\leqq r)\end{cases}$$

kommen wir so, ähnlich wie Lichtenstein, auf folgende Gleichungen:

$$(69)\quad -\frac{4\pi\,\zeta_0}{r^2}\int_0^r f'\,r'^2\,dr' - \frac{4\pi}{r}\int_0^r df(r')\,\zeta_0(r')\,r'(r'-r) = 0,$$

19a) Dieselbe homogene Integralgleichung bildet den Kernpunkt einer Untersuchung von Herrn E. Hölder über die Gestalt der Erde. Vgl. seine in Vorbereitung befindliche Abhandlung, Zur Theorie inhomogener Gleichgewichtsfiguren. 2. Mitteilung.

20) Vgl. l. c. [1]), III., S. 536 ff. Eine Nullösung von (66) besitzt in $T+S$ beschränkte und, außer eventuell in O, abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

$$(70)\quad -\frac{4\pi\zeta_{1m}(r)}{r^2}\int_0^r f' r'^2 dr' - \frac{4\pi}{3r^2}\int_0^r d f(r')\zeta_{1m}(r')(r'^3 - r^3) = 0,$$

$$m = 1, 2, 3,^{21})$$

$$(71)\quad -\frac{4\pi\zeta_{nm}(r)}{r^2}\int_0^r f' r'^2 dr' - \frac{4\pi}{2n+1}\int_0^r d f(r')\zeta_{nm}(r')\frac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}}$$

$$-\frac{4\pi}{2n+1}\int_r^\infty d f(r')\zeta_{nm}(r')\frac{r^n}{(r')^{n-1}} = 0, \quad n \geqq 2.$$

Wie Lichtenstein zeigte[22]), besitzen diese drei Gleichungen keine von Null verschiedenen Lösungen, somit gilt auch das gleiche von (66). Die Integro-Differentialgleichung (65) kann durch sukzessive Approximationen gelöst werden, da, wie man sich ohne Mühe überzeugen kann, auch hier zu (50) und (53) analoge Ungleichheitsbeziehungen bestehen.

---

[21]) Man berücksichtige, daß

$$\int_{S_{r'}} Y_0(\vartheta', \varphi')\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{r'^3} d\sigma' = \int_{S_{r'}} Y_{nm}(\vartheta', \varphi')\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{r'^3} d\sigma' = 0, \quad (n \geqq 2),$$

$$\int_{S_{r'}} Y_{1m}(\vartheta', \varphi')\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}\mathfrak{y}' + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{r'^3} d\sigma' = \frac{4\pi r}{3}$$

ist.

[22]) Vgl. l. c. [1]), III., S. 538 ff., auf S. 540 die Beziehung (52) und S. 546.

(Eingegangen am 14. April 1934.)

Berichtigung

zu meiner Note in Bd. 16 dieser Zeitschrift:

Über Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte.

Von

P. Funk in Prag.

In der Einleitung dieser Note, wo ich andeutete, wie man die geometrischen Betrachtungen von W. Blaschke durch analytische zu ersetzen hätte, habe ich in unrichtiger Weise auf den Begriff des Cauchy-Hauptwertes hingewiesen (der Integrand wird nicht von erster, sondern von zweiter Ordnung unendlich groß).

Unter Voraussetzung der Analytizität für den Integranden ließe sich die im Text angedeutete Schlußweise durch passende Wahl des Integrationsweges rechtfertigen.

Einfacher und an geringere Voraussetzungen geknüpft ist die folgende Schlußweise:

Der zu beweisende Satz kann so ausgesprochen werden: Sei $f(x)$ eine stetige Funktion, wenn dann für jeden Wert von ξ jene Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + f(x)\, y = 0$$

die für $x = \xi$ verschwindet, auch für $x = \xi + \pi$ verschwindet und im Intervall $\xi < x < \xi + \pi$ keine weitere Nullstelle hat, so muß für jede Lösung

$$y(x + \pi) = -\, y(x)$$

sein.

Beweis. Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen, dann ist

$$y_1(x)\, y_2(\xi) - y_2(x)\, y_1(\xi)$$

eine Lösung, die an der Stelle $x = \xi$ verschwindet; somit folgt aus der unserem Satz zugrunde liegenden Voraussetzung, daß identisch in ξ

$$y_1(\xi + \pi)\, y_2(\xi) - y_2(\xi + \pi)\, y_1(\xi) = 0$$

sein muß, oder daß gleichzeitig mit

$$y_1(x + \pi) = \varphi(x)\, y_1(x)$$

auch

$$y_2(x+\pi) = \varphi(x)\, y_2(x)$$

ist. Die Wronskische Determinante muß aber eine Konstante sein. Also ist

$$\begin{vmatrix} y_1(x+\pi) & y_2(x+\pi) \\ y_1'(x+\pi) & y_2'(x+\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Durch Einsetzen der eben angeschriebenen Werte von

$$y_1(x+\pi) \quad \text{und} \quad y_2(x+\pi)$$

ergibt sich aber

$$(\varphi(x))^2 = 1.$$

$\varphi(x) = 1$ ist unmöglich, da sonst entweder gegen unsere Voraussetzung eine weitere Nullstelle im Intervall $\xi < x < \xi + \pi$ vorhanden wäre oder die Nullstelle von y auch eine Nullstelle von y' sein müßte, was ausgeschlossen ist, weil ja in diesem Fall y identisch verschwinden müßte. Also muß $\varphi(x) = -1$ sein.

(Eingegangen am 2. Mai 1934.)

Über die Gradienten der Greenschen Funktion.

Von

Max Müller in Heidelberg.

Es sei $\mathfrak{B}$ ein einfach zusammenhängender, von einer Jordankurve $\mathfrak{R}$ begrenzter Bereich der z-Ebene mit endlichem inneren Flächeninhalt F. Die Funktion $w = f(z)$ sei in $\mathfrak{B}$ analytisch, in $\mathfrak{B} + \mathfrak{R}$ stetig und bilde $\mathfrak{B}$ eindeutig umkehrbar so auf den Einheitskreis $|w| < 1$ der w-Ebene ab, daß ein beliebiger Punkt ζ von $\mathfrak{B}$ in den Punkt $w = 0$ übergeht. Setzt man $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, so läßt sich die Greensche Funktion des Bereiches $\mathfrak{B}$ folgendermaßen darstellen:

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\log|f(z)|.$$

$\mathfrak{B}(c_1, c_2)$ bezeichne den von irgend zwei Niveaukurven

$$G(x, y; \xi, \eta) = c_i = -\log r_i, \qquad 0 < r_1 < r_2 \leqq 1 \qquad (i = 1, 2)$$

begrenzten Teilbereich von $\mathfrak{B}$, das Bild des Kreisringes $r_1 \leqq |w| \leqq r_2$, $F(c_1, c_2)$ seinen Flächeninhalt.

In § 1 der vorliegenden Note beweisen wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\mathfrak{B}(c_1, c_2)} \operatorname{grad}_{(x, y)} G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy \\ &= \iint\limits_{\mathfrak{B}(c_1, c_2)} \sqrt{(G'_x(x, y; \xi, \eta))^2 + (G'_y(x, y; \xi, \eta))^2}\, dx\, dy \qquad (1) \\ &\leqq 2\sqrt{\pi \cdot F(c_1, c_2)}. \end{aligned}$$

Setzt man $c_2 = 0$ und läßt $c_1 \to \infty$ streben, so entsteht aus ihr die Ungleichung

$$K(\xi, \eta) = \iint\limits_{\mathfrak{B}} \operatorname{grad}_{(x, y)} G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy \leqq 2\sqrt{\pi \cdot F}. \qquad (2)$$

In (1) und (2) steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\mathfrak{B}$ ein Kreis, der Punkt (ξ, η) sein Mittelpunkt, und wenn bei (1) außerdem $\mathfrak{B}(c_1, c_2)$ ein konzentrischer Teilkreis ist. Mit der Aufstellung der Ungleichung (2) wird eine Frage des Herrn Gr. C. Evans beantwortet, der die Ungleichung (2) nur für einen Kreisbereich, für den allgemeinen Bereich mit den angeführten Eigenschaften dagegen eine schwächere Abschätzung hergeleitet hat, die man aus (2) dadurch gewinnt, daß man rechts den

Faktor 2 durch den Faktor 2,216 ersetzt und das Gleichheitszeichen wegläßt[1]).

Anschließend wird in § 2 in Ergänzung einer früheren Untersuchung[2]) das Integral

$$K(\xi,\eta) = \iint_{\mathfrak{B}} \operatorname*{grad}_{(\xi,\eta)} G(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy$$
$$= \iint_{\mathfrak{B}} \sqrt{\left(G'_\xi(x,y;\xi,\eta)\right)^2 + \left(G'_\eta(x,y;\xi,\eta)\right)^2}\,dx\,dy$$

abgeschätzt; es wird sich ergeben, daß

(3) $$K(\xi,\eta) \leqq \tfrac{8}{3}|f'(\xi+i\eta)|\cdot I(\xi,\eta) = \tfrac{8}{3}|f'(\xi+i\eta)|\cdot \iint_{\mathfrak{B}} G(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy$$

und insbesondere

(4) $$K(\xi,\eta) \leqq \tfrac{4}{3}|f'(\xi+i\eta)|\cdot F.$$

Auch in (3) und (4) steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $\mathfrak{B}$ ein Kreis und (ξ,η) sein Mittelpunkt ist.

§ 1.

Wird $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ gesetzt, so ergibt sich bei Beachtung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, falls die Punkte (x,y) und (ξ,η) nicht zusammenfallen,

$$G(x,y;\xi,\eta) = -\log|f(x+iy)| = -\log\sqrt{u^2+v^2},$$

$$G'_x(x,y;\xi,\eta) = -\frac{u\cdot u'_x + v\cdot v'_x}{|f(x+iy)|^2},\quad G'_y(x,y;\xi,\eta) = -\frac{u\cdot u'_y + v\cdot v'_y}{|f(x+iy)|^2},$$

$$\operatorname*{grad}_{(x,y)} G(x,y;\xi,\eta) = \left|\frac{f'(x+iy)}{f(x+iy)}\right|.$$

Hieraus folgt, wenn $u+iv = \varrho e^{i\omega}$ gesetzt und die im Kreis $|w|<1$ reguläre Umkehrungsfunktion

$$z = x+iy = \varphi(w) = \varphi(\varrho e^{i\omega}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu$$

eingeführt wird,

$$\iint_{\mathfrak{B}(c_1,c_2)} \operatorname*{grad}_{(x,y)} G(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy = \iint_{r_1^2<u^2+v^2<r_2^2} \frac{|f'(\varphi(w))|}{|w|}\,|\varphi'(w)|^2\,du\,dv$$

$$= \iint_{r_1^2<u^2+v^2<r_2^2} \left|\frac{\varphi'(w)}{w}\right| du\,dv = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} |\varphi'(\varrho e^{i\omega})|\,d\varrho\,d\omega,$$

---

[1]) G. C. Evans, Note on the Gradient of the Green's Function. Bull. of the Amer. Math. Soc. 38 (1932), S. 879—886.

[2]) Max Müller, Über die Greensche Funktion des Laplaceschen Differentialausdrucks. Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie d. Wissenschaften, math.-naturw. Klasse, 1929, Nr. 9.

also mit Benutzung der Schwarzschen Ungleichung

$$\Big[\iint\limits_{\mathfrak{B}(c_1, c_2)} \operatorname{grad}_{(x,y)} G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy\Big]^2 \leqq 2\pi (r_2 - r_1) \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} |\varphi'(\varrho e^{i\omega})|^2 \, d\varrho \, d\omega$$

(5)
$$= 4\pi^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{2\nu - 1} |a_\nu|^2 (r_2 - r_1)(r_2^{2\nu-1} - r_1^{2\nu-1});$$

da

(6) $$\frac{\nu^2}{2\nu - 1}(r_2 - r_1)(r_2^{2\nu-1} - r_1^{2\nu-1}) \leqq \nu (r_2^{2\nu} - r_1^{2\nu}) \quad \text{für } \nu \geqq 1,$$

ferner

$$\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 (r_2^{2\nu} - r_1^{2\nu}) = \iint\limits_{\mathfrak{B}(c_1, c_2)} dx\, dy = F(c_1, c_2)$$

ist, folgt aus (5)

(1) $$\iint\limits_{\mathfrak{B}(c_1, c_2)} \operatorname{grad}_{(x,y)} G(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy \leqq 2\sqrt{\pi \cdot F(c_1, c_2)}.$$

In (5) steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $\varphi'(\varrho e^{i\omega})$ im Kreisring $r_1 < \varrho < r_2$ konstant ist, d. h. wenn

$$\varphi(w) = a_0 + a_1 w,$$

also $\mathfrak{B}$ ein Kreis und der Punkt $\zeta = \xi + i\eta = a_0$ sein Mittelpunkt ist, in (6) steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\nu = 1$ und $r_1 = 0$ ist; also steht in (1) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\mathfrak{B}$ ein Kreis, (ξ, η) sein Mittelpunkt und $\mathfrak{B}(c_1, c_2)$ ein konzentrischer Teilkreis ist. — Damit ist die Abschätzung (1) und mit ihr die Ungleichung (2) in der behaupteten Allgemeinheit bewiesen.

§ 2.

Die in meiner oben genannten Arbeit durchgeführten Rechnungen ergeben, daß

$$G'_\xi(x, y; \xi_0, \eta_0) = \frac{|f'(x+iy)|^2 - 1}{|f(x+iy)|^2}[u(x, y) \cdot u'_\xi(\xi_0, \eta_0) + v(x, y) \cdot v'_\xi(\xi_0, \eta_0)],$$

$$G'_\eta(x, y; \xi_0, \eta_0) = \frac{|f'(x+iy)|^2 - 1}{|f(x+iy)|^2}[u(x, y) \cdot u'_\eta(\xi_0, \eta_0) + v(x, y) \cdot v'_\eta(\xi_0, \eta_0)];$$

hieraus folgt bei Berücksichtigung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß

$$\operatorname{grad}_{(\xi, \eta)} G(x, y; \xi_0, \eta_0) = \frac{1 - |f(x+iy)|^2}{|f(x+iy)|} |f'(\xi_0 + i\eta_0)|.$$

Also ist, wenn wir weiterhin die Fußmarke 0 wieder weglassen,

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}(\xi,\eta) &= |f'(\xi+i\eta)| \iint_{\mathfrak{B}} \frac{1-|f(x+iy)|^2}{|f(x+iy)|}\,dx\,dy\,^{3}) \\
&= |f'(\xi+i\eta)| \iint_{u^2+v^2<1} \frac{1-|w|^2}{|w|}\,|\varphi'(w)|^2\,du\,dv \\
&= 2\pi|f'(\xi+i\eta)| \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 \int_0^1 (1-\varrho^2)\,\varrho^{2\nu-2}\,d\varrho \\
&= 2\pi|f'(\xi+i\eta)| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu^2}{4\nu^2-1}\,|a_\nu|^2,
\end{aligned}$$

d. h.

$$\mathsf{K}(\xi,\eta) \leqq \frac{4\pi}{3}|f'(\xi+i\eta)| \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^2. \tag{7}$$

Da [vgl. am in [2]) a. O.]

$$I(\xi,\eta) = \iint_{\mathfrak{B}} G(x,y;\xi,\eta)\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2 \leqq \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\,|a_\nu|^2 = \frac{F}{2}, \tag{8}$$

folgt aus (7) die Ungleichung (3) und die Ungleichung (4). In (7) und (8) gilt dann und nur dann überall das Gleichheitszeichen, wenn $a_\nu = 0$ für $\nu > 1$, also wenn $\mathfrak{B}$ ein Kreis und der Punkt (ξ, η) sein Mittelpunkt ist.

Die von mir a. a. O. für die Integrale

$$\iint_{\mathfrak{B}} |G'_\xi(x,y;\xi,\eta)|\,dx\,dy, \qquad \iint_{\mathfrak{B}} |G'_\eta(x,y;\xi,\eta)|\,dx\,dy$$

gegebenen Abschätzungen sind in den Ungleichungen (3) und (4) enthalten.

---

[3]) Eigentlich müßte bei der Integration zunächst eine kleine Umgebung der Stelle (ξ, η) ausgespart und das Integral als uneigentliches behandelt werden. Da dasselbe aber unmittelbar als konvergent erkennbar ist, dürfte die kürzere Darstellung des Textes genügen.

(Eingegangen am 6. Juni 1934.)

Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper.

(Die Theorie der Teilbarkeit in allgemeinen Körpern.)

Teil I.

Von

Alexander Ostrowski in Basel.

Inhaltsverzeichnis*).

Einleitung. — Literaturverzeichnis. — Verzeichnis der Fachausdrücke.

Teil I. Existenzsätze für Primdivisoren in algebraischen Erweiterungen gegebener Körper.

§ 1. Einleitende Definitionen.
1. Bestimmende Eigenschaften. — 2. Konvergenz in bewerteten Körpern. — 3. Der Begriff des Primdivisors. — 4. Beispiele von bewerteten Körpern Dirichletscher Reihen. — 5. Kongruenz in bewerteten Körpern (Sätze I, II).

§ 2. Das Fundamentallemma.
6. Formulierung (Fundamentallemma — Satz I, Zusatz). — 7. Beweis des Fundamentallemmas. — 8. Anwendung auf Dirichletsche Reihen und ein Gegenbeispiel (Satz II).

§ 3. Relativ perfekte Körper und ihre algebraischen Erweiterungen.
9. Definition der relativ perfekten Körper (Satz I). — 10. Die Bewertungsvorschrift für algebraische Erweiterungen relativ perfekter Körper (Satz II). — 11. Die Einzigkeit der Bewertungsvorschrift (Sätze III, IV).

§ 4. Algebraische Erweiterungen beliebiger bewerteter Körper.
12. Bewertung normaler Erweiterungen (Satz I). — 13. Beliebige algebraische Erweiterungen als Unterkörper von normalen (Sätze II, III). — 14. Konjugierte Permutationen (Satz IV). — 15. Anzahl der Bewertungen für einfache algebraische Erweiterungen (Satz V). — 16. Zerlegungskörper als Ersatz für den derivierten Körper, Zerlegungsgruppe (Satz VI). — 17. Reduzierte Zerlegungskörper (Satz VII). — 18. Partialgrad und erster Defekt für einfache Erweiterungen. — 19. Partialgrad und erster Defekt für beliebige endliche

*) Das Inhaltsverzeichnis und die Einleitung beziehen sich auf alle drei Teile der Abhandlung. Die Teile II und III erscheinen im nächsten Heft.

Erweiterungen (Sätze VIII, IX). — 20. Unabhängigkeit nicht äquivalenter Primdivisoren (Sätze X, XI).

§ 5. Relativ perfekte Körper und universelle Zerlegungskörper. 21. Algebraische Erweiterungen relativ perfekter Körper (Sätze I, II). — 22. Charakterisierung der Bewertungen durch das Newtonsche Diagramm (Satz III). — 23. Universelle Zerlegungskörper (Satz IV). — 24. Reduzierter universeller Zerlegungskörper (Satz V). — 25. Algebraische Charakterisierung relativ perfekter Körper (Satz VI). — 26. Primdivisoren und Dedekindsche Primideale (Satz VII). — 27. Die Hilbertschen Zerlegungskörper (Sätze VIII, IX).

Teil II. Struktur bewerteter Körper und Zerlegung von Primdivisoren in algebraischen Erweiterungen.

§ 6. Restklassenkörper, Verzweigungsindex und Verzweigungsgrad algebraischer Erweiterungen.

28. Restklassenkörper, Halbbewertete Körper (Satz I). — 29. Kern eines bewerteten Körpers. — 30. Verzweigungsindex einer Erweiterung (Satz II). — 31. Verzweigungsmodulgruppe, Verzweigungsinvarianten, Verzweigungszahl (Satz III). — 32. Verzweigungsgrad, Trägheitsgrad und Defekt algebraischer Erweiterungen (Satz IV). — 33. Trägheitserweiterungen (Sätze V, VI, VII). — 34. Verzweigungsgrad und Defekt für Erweiterungen von unendlichem Trägheitsgrad bzw. Verzweigungsindex. — 35. Ein Hilfssatz über Reduktion durch Adjunktion unendlicher Erweiterungen (Satz VIII). — 36. Produktsätze für Verzweigungsgrade und Defekte (Sätze IX und X). — 37. Trägheitsgrößen (Satz XI). — 38. Charakterisierung des Trägheitssatzes, Verzweigungssatzes und Defektsatzes. — 39. Ein Beispiel reiner Defekterweiterungen.

§ 7. Über die Abspaltung der Trägheitskörper.

40. Charakterisierung von Trägheitsgrößen durch Kongruenzen (Satz I). — 41. Ein Kongruenzkriterium für Reduzibilität (Satz II). — 42. Der maximale Relativgrad der Elemente eines Restklassenkörpers (Satz III). — 43. Reguläre Trägheitsgrößen (Sätze IV und V). — 44. Reguläre Trägheitserweiterungen (Sätze VI, VII, VIII, IX). — 45. Spezieller und allgemeiner Trägheitssatz (Sätze X, XI). — 46. Ein Gegenbeispiel zum Trägheitssatz, Charakteristik 0. — 47. Zweites Gegenbeispiel zum Trägheitssatz, Charakteristik p. — 48. Algebraische Erweiterungen von Körpern mit Kern (Satz XII).

§ 8. Der Verzweigungssatz.
49. Verzweigungserweiterungen (Satz I). — 50. Adjunktion von Verzweigungsgrößen (Satz II). — 51. Zusammensetzung von Erweiterungen vom Trägheitsgrad 1. Verzweigungssatz im funktionentheoretischen Fall (Satz III). — 52. Verzweigungssatz in einem Unterfall des zahlentheoretischen Falles (Satz IV). — 53. Beispiel eines Körpers Dirichletscher Reihen.
§ 9. Der Defektsatz. Zerlegung von Primdivisoren in algebraischen Erweiterungen.
54. Körpertheoretische Hilfssätze (Sätze I, II, III). — 55. Beweis des Defektsatzes (Sätze IV, V). — 56. Bemerkungen über Erweiterungen mit $\delta > 1$ (Satz VI). — 57. Ein weiteres Beispiel für $\delta > 1$. — 58. Die Zerlegung von Primdivisoren in algebraischen Erweiterungen mit Berücksichtigung der Mehrfachheit.
Teil III. Charakterisierung der allgemeinsten Bewertungstypen und der absoluten Riemannschen Fläche für einen beliebigen Körper.
§ 10. Spezielle Typen von Bewertungen transzendenter Erweiterungen.
59. Einfachste Bewertungstypen. — 60. Erweiterungen durch Adjunktion invariabler Elemente. Definition des invariablen Elements. — 61. Charakterisierung der invariablen Elemente (Sätze I, II, III, IV, V).
§ 11. Pseudokonvergenz. Fundamentalsatz über Bewertungen durch Adjunktion von Pseudolimes.
62. Pseudokonvergente Folgen (Satz I). — 63. Eine Verallgemeinerung des Satzes von der Grenzbewertung (Satz II). — 64. Ein Satz über pseudokonvergente Folgen (Sätze III, IV). — 65. Bewertung durch Adjunktion von Pseudolimes (Sätze V, VI, VII, VIII). — 66. Der Fundamentalsatz (Satz IX). — 67. Bewertung beliebiger Erweiterungen. — 68. Invariable Elemente und pseudokonvergente Folgen zweiter Art (Sätze X, XI). — 69. Die Distanz eines Pseudolimes vom Grundkörper (Satz XII). — 70. Transzendente Größen 1., 2. und 3. Art (Satz XIII). — 71. Die Bedeutung der Breite einer pseudokonvergenten Folge (Sätze XIV, XV, XVI). — 72. Äquivalenz pseudokonvergenter Folgen (Satz XVII). — 73. Transzendente Erweiterungen eines Körpers von Potenzreihen (Satz XVIII).
§ 12. Absolute Riemannsche Fläche und die Restkörper.
74. Restisomorphie und K-Ringe. — 75. Charakterisierung der einfachen Restkörper durch Bewertungen (Satz I). —

76. Die Problemstellung für den Fall algebraischer Funktionen (Satz II). — 77. Reduktion auf Ketten einfacher Restkörper (Satz III). — 78. Primdivisoren vom Range 1 und zugehörige Puiseuxsche Darstellungen. — 79. Puiseuxsche Punkte und Puiseuxsche Darstellungen für den Fall von n Variablen (Sätze IV, V). — 80. Absolute Riemannsche Fläche des Körpers der rationalen Funktionen in zwei Variablen.

Einleitung[1]).

Die Untersuchungen der vorliegenden Abhandlung knüpfen an den allgemeinen Begriff eines Primdivisors $\mathfrak{P}$ in einem beliebigen abstrakten Körper[2]) K an. Wir sagen, es sei im Körper K ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ definiert, wenn jeder Größe a von K eine Zahl $\omega(a)$ — *die Ordnungszahl von a in bezug auf $\mathfrak{P}$* — zugeordnet ist, derart, daß 1. $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$ und 2. $\omega(a+b) \geqq \text{Min}(\omega(a), \omega(b))$ ist. Wir sagen dann, daß a durch die $\omega(a)$-te Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Die große Allgemeinheit dieser Definition, die ich zum erstenmal 1918 angegeben habe (Ostrowski 3, S. 274) läßt es zuerst sehr unwahrscheinlich erscheinen, daß man mit ihr viel anfangen kann. Indessen habe ich bereits a. a. O. bewiesen, daß für den Körper der rationalen Zahlen man auf diese Weise in der Tat gerade sämtliche natürliche Primzahlen erhält, wobei allerdings eine gewisse multiplikative Konstante unbestimmt bleibt, da offenbar mit $\omega(a)$ auch $c\omega(a)$ für eine feste positive Konstante c eine Ordnungsfunktion $\omega_1(a)$ ist. Es stellt sich nun heraus, und ich habe auch darauf bereits a. a. O. hingewiesen, daß diese Definition auch zur Untersuchung der Teilbarkeitsgesetze in allgemeinen Körpern eine ausreichende Grundlage bildet. Der große Vorzug dieser Definition besteht vor allem darin, daß sie den „Ganzheitscharakter" der Körpergrößen nicht voraussetzt, sondern erst festlegt. In Körpern algebraischer Funktionen ist sie birational invariant. Ein gewisser Nachteil ist die Vieldeutigkeit in bezug auf die Multiplikation der Ordnungszahlen mit positiven Konstanten, da ja im Falle der Existenz diskreter Primzahlen die Ordnungszahl 1 für die Primzahl selbst zumindest sehr nahe liegt. Indessen ist auch dieser Nachteil in keiner

[1]) Ein Verzeichnis der zitierten Literatur befindet sich am Schluß der Einleitung. Bei Verweisen auf dieses Verzeichnis wird einfach der Name des Autors, sowie die Nummer der betreffenden Abhandlung im Verzeichnis angegeben.

[2]) Zur Körpertheorie vgl. die klassische Darstellung von Steinitz (Steinitz 1), sowie die knappe, aber sehr elegante Zusammenfassung in Steinitz 2. Im übrigen ist der allgemeine Körperbegriff in verschiedene Lehrbuchdarstellungen übergegangen, vgl. H. Hasse, Algebra, 2 Bände, Sammlung Göschen; O. Haupt, Einführung in die Algebra, 2 Bände; B. van der Waerden, Moderne Algebra, 2 Teile.

Weise störend, wenn man Erweiterungen eines Körpers untersucht, in dem ein Primdivisor bereits definiert ist, da ja dann die Normierung festliegt.

Das Fundamentalproblem der Theorie der Primdivisoren besteht nun darin, zu jedem Primdivisor des Grundkörpers die in ihm „enthaltenen" Primdivisoren einer Erweiterung dieses Körpers aufzustellen, d. h. die Ordnungsfunktion des Grundkörpers auf alle möglichen Arten auf den Oberkörper zu erweitern. Zur Lösung dieses Problems für algebraische Erweiterungen können an sich alle Methoden herangezogen werden, die zur Begründung der Idealtheorie in endlichen oder unendlichen algebraischen Erweiterungen eines gegebenen Zahlkörpers benutzt wurden. Der Weg indessen, der sich uns naturgemäß dargeboten hat, war der folgende:

Setzt man

$$\|a\| = e^{-v(a)}, \tag{1}$$

so wird dadurch jeder Größe des Körpers eine neue Funktion $\|a\|$ zugeordnet, und diese Funktion ist nun ein Spezialfall einer von Herrn Kürschák (Kürschák 1) eingeführten Funktion, der sogenannten *Bewertung von* a. Allerdings hat Herr Kürschák seine Bewertungsfunktion in einem anderen Zusammenhang eingeführt, — er betrachtet sie als eine Verallgemeinerung des absoluten Betrages von a auf den Fall eines beliebigen Körpers. — Der Gedanke dagegen, die Bewertungsfunktion auch in allgemeineren Fällen zur Definition eines Primdivisors zu benutzen, ist zum ersten Male in meiner oben zitierten Arbeit ausgesprochen worden. Dort habe ich auch gezeigt, daß die Kürscháksche Bewertungsfunktion, von einem bestimmten speziellen Fall abgesehen, den ich als den *archimedischen* bezeichnete, stets speziellere Eigenschaften besitzt, aus denen ihre Darstellbarkeit in der Form (1) sofort folgt.

In den Kürschákschen Untersuchungen ist nun eine allgemeine Vorschrift enthalten, die Definition der Bewertungsfunktion von einem gegebenen Grundkörper auf seine algebraischen Erweiterungen auszudehnen, eine Methode, von der ich später bewiesen habe, daß sie die einzig mögliche ist. Durch Benutzung dieses Resultats ist es möglich, das oben charakterisierte Problem der Auffindung von Teilern eines Primdivisors in algebraischen Erweiterungen zu lösen, wobei der Beweis des Kürschákschen Fundamentalsatzes in dem hier in Betracht kommenden Fall, vermöge der speziellen Eigenschaften unserer Bewertungsfunktion, wesentlich vereinfacht werden kann.

Es kommt dazu noch ein weiteres Moment. In den Kürschákschen Untersuchungen war das wichtigste Hilfsmittel die Erweiterung des gegebenen bewerteten Körpers zu seinem „derivierten" Körper, der in einem bestimmten Sinn „perfekt" ist, durch Adjunktion geeigneter idealer Limes-

größen, ähnlich wie in der Theorie der Irrationalzahlen. Es hatte dies sein Analogon in der Henselschen Theorie der p-adischen Zahlen[3]), ferner in der Betrachtung formal ohne Rücksicht auf ihre Konvergenz gebildeter Potenzreihen, wie sie gelegentlich zum Aufstellen der Puiseuxschen Entwicklungen benutzt werden usw. Es erscheint natürlich als ein gewisser Mißstand, wenn zur Untersuchung algebraischer Erweiterungen eines gegebenen Körpers K Größen adjungiert werden, die in bezug auf K transzendent sind. Insbesondere ist es ferner ein gewisser Übelstand, wenn z. B. durch die zugrunde gelegte Definition der Perfektheit von vornherein bei der Untersuchung von Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius auch Potenzreihen mit verschwindendem Konvergenzradius herangezogen werden müssen. Dem helfe ich nun so ab, daß ich den Begriff des *relativ perfekten* Körpers einführe, der dadurch charakterisiert ist, daß für Polynome mit Koeffizienten aus diesem Körper ein gewisser Reduzibilitätssatz gilt. Dieser Reduzibilitätssatz ist für den Körper der konvergenten Maclaurinschen Reihen einer Variablen einfach der Weierstrasssche Vorbereitungssatz, — in einer leicht verschärften Formulierung. Im allgemeinsten Falle erscheint unsere Bedingung als ein Analogon des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes. Dadurch wird es möglich, z. B. bei Untersuchungen von Puiseuxschen Entwicklungen von algebroiden Funktionen unsere Methoden direkter heranzuziehen.

Andererseits gestattet unsere Analyse des Begriffs eines perfekten und relativ perfekten Körpers die Rolle klarzulegen, die die Heranziehung der perfekten Körper zur Begründung der Idealtheorie und zur Untersuchung der Eigenschaften algebraischer Erweiterungen spielt. Es handelt sich im wesentlichen darum, daß eine relativ perfekte Erweiterung eines gegebenen Körpers stets einen algebraischen Zwischenkörper enthält, der den Isomorphietypus des sogenannten *reduzierten universellen Zerlegungskörpers* hat. Im Falle der algebraischen Erweiterungen des Körpers R aller rationalen Zahlen ergibt sich z. B. das folgende Resultat:

Es sei p eine feste natürliche Primzahl. Es gibt gewisse unendliche algebraische Erweiterungen Z_p von R — universelle Zerlegungskörper für die Primzahl p. Sie sind alle untereinander konjugiert, d. h. isomorph. Ist K eine endliche normale Erweiterung von R und $\mathfrak{P}$ ein Primidealteiler von p aus K, so ist der zu $\mathfrak{P}$ gehörende Hilbertsche Zerlegungskörper der Durchschnitt von K mit einem bestimmten universellen

[3]) Das erste über die übliche Theorie der formalen Potenzreihen hinausgehende Beispiel findet sich allerdings zuerst in einer bemerkenswerten Arbeit von Kühne aus dem Jahre 1903 (Kühne 1). Es wird dort im Grunde genommen eine Theorie des derivierten Körpers für einen recht allgemeinen Typus von Grundkörpern entwickelt.

Zerlegungskörper Z_p. Wird umgekehrt ein bestimmter universeller Zerlegungskörper Z_p ins Auge gefaßt, so ist der Durchschnitt von Z_p mit K identisch mit dem Hilbertschen Zerlegungskörper eines der Primidealteiler von p in K. Da alle Primidealteiler von p aus K zueinander konjugiert sind, genügt es, zur Untersuchung der Eigenschaften einer bestimmten algebraischen Erweiterung von R einen Körper zu adjungieren, der mit einem universellen Zerlegungskörper von p isomorph ist. Die Gesamtheit aller in bezug auf R algebraischen Größen aus dem Henselschen Körper der rationalen p-adischen Zahlen hat nun gerade den Isomorphietypus des universellen Zerlegungskörpers für die Primzahl p. Der Henselsche Körper der p-adischen Zahlen liefert also gewissermaßen ein darstellungsmäßiges „Modell" für die Zahlen des universellen Zerlegungskörpers.

Der Durchführung der oben skizzierten Gedankengänge ist der erste Teil (§§ 1 bis 5) der vorliegenden Abhandlung gewidmet. Nachdem wir in § 1 die wichtigsten Grundbegriffe eingeführt haben, beweisen wir in § 2 das Fundamentallemma, einen Hilfssatz, der mit dem oben erwähnten Reduzibilitätssatz für perfekte Körper identisch ist. Einen Beweis eines etwas allgemeineren Satzes hat inzwischen Herr Rychlik (Rychlik 1, S. 100 ff.) veröffentlicht[4]). Wenn wir trotzdem auf den Beweis des Fundamentallemmas eingehen, so geschieht dies deshalb, weil wir dabei zugleich einen Zusatz herleiten, der für Anwendungen auf die Theorie der Dirichletschen Reihen von Bedeutung ist. Im übrigen ist unser Beweis etwas einfacher als der Rychliksche. In § 3 führen wir den Begriff des relativ perfekten Körpers ein, indem wir im wesentlichen verlangen, daß in einem solchen Körper das Fundamentallemma gilt. Wir beweisen sodann den Kürschákschen Satz von der Möglichkeit und unseren Satz von der Einzigkeit der Bewertung algebraischer Erweiterungen eines perfekten und — was hier neu ist — auch eines relativ perfekten Körpers. In § 4 wird nun die Aufgabe behandelt, sämtliche Bewertungen einer algebraischen Erweiterung eines vorgegebenen bewerteten Körpers aufzustellen, und zwar indem zunächst alle Bewertungen der kleinsten zugehörigen normalen Erweiterungen aufgestellt und sodann von da aus alle Bewertungen der Unterkörper dieser normalen Erweiterung aufgesucht werden. Der wichtigste Begriff, den wir bei dieser Diskussion benutzen, ist der Begriff von Scharen in bezug auf eine relativ perfekte Erweiterung *kon-*

[4]) Allerdings muß der Beweis des diesbezüglichen Resultats von Herrn Rychlik in § 11 seiner Abhandlung etwas präzisiert werden. Zu seiner Durchführung ist neben der Voraussetzung 1. noch weiter zu verlangen, daß das Produkt der höchsten Glieder von $b(x)$ und $h(x)$ *genau gleich* und nicht nur kongruent dem höchsten Gliede von $f(x)$ ist. Man übersieht aber leicht, daß eine hierzu führende Abänderung von $b(x)$ oder $h(x)$ ohne weiteres erlaubt ist.

jugierter Permutationen einer bewerteten normalen Erweiterung in sich selbst. — Ein Teil der zugehörigen Ergebnisse (Satz III, § 4) ist vor einigen Jahren von Krull und Deuring angegeben worden (Krull 2, S. 206 usw.; Deuring 1. S. 282—288). — Sodann führen wir verschiedene Zerlegungskörper ein.

Der § 5 endlich ist der Diskussion der Struktur von relativ perfekten bewerteten Körpern und ihres Zusammenhangs mit verschiedenen Zerlegungskörpern gewidmet. Wir machen in ihm insbesondere von den Sätzen über das Newtonsche Diagramm in bewerteten Körpern Gebrauch, die wir in einer in dieser Zeitschrift kürzlich erschienenen Abhandlung (Ostrowski 4 S. 121 ff.) hergeleitet haben. Die Sätze dieses Paragraphen zeigen insbesondere deutlich, wieviel bequemer der Begriff des relativ perfekten Körpers zu handhaben ist als der Begriff des absolut perfekten Körpers, da z. B. jede algebraische Erweiterung eines relativ perfekten Körpers wieder relativ perfekt ist und dasselbe für den Durchschnitt von zwei relativ perfekten Körpern gilt.

Im zweiten Teil dieser Abhandlung handelt es sich darum, die Einzelheiten der Zerlegung eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ eines Körpers K in einer algebraischen Erweiterung Q dieses Körpers zu diskutieren. Jeder Bewertung von Q, die die zu $\mathfrak{p}$ gehörende Bewertung von K umfaßt, entspricht ein anderer Primdivisor $\mathfrak{P}$ aus Q des Primdivisors $\mathfrak{p}$. Es liegt daher der Ansatz nahe

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{f_1} \dots \mathfrak{P}_k^{f_k}, \tag{2}$$

und es handelt sich nun darum, wie man die „Mehrfachheiten" $f_1, \dots, f_k$ sowie die „Grade" (wir sagen dafür Trägheitsgrade) $g_1, \dots, g_k$ der Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_k$ definiert. Was die Grade $g_1, \dots, g_k$ anbetrifft, so ist ihre Definition sehr einfach — man betrachtet die Restklassenkörper in bezug auf $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}_\varkappa$, der zweite läßt sich dann als eine endliche Erweiterung des ersten auffassen, und der Relativgrad dieser Erweiterung ist der Trägheitsgrad von $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{p}$. Die Definition der Mehrfachheiten $f_1, \dots, f_k$ ist wesentlich schwieriger. Die von E. Noether (Noether 1) benutzte Methode führt hier nicht mehr zum Ziel. Man wird hier auf jeden Fall verlangen, daß die von der Dedekindschen Idealtheorie her bekannte Gleichung

$$n = f_1 g_1 + \dots + f_k g_k, \tag{3}$$

wo n der Grad von Q in bezug auf K ist, erhalten bleibt. Es ist dies ein Moment, das wir als *algebraisch* bezeichnen möchten. Andererseits kann man hier einen anderen Gedankengang benutzen. Wenn nämlich K der Körper der rationalen Zahlen ist, kann man leicht einsehen, daß die Ordnungszahlen des Körpers Q, die dem Primdivisor $\mathfrak{P}_\varkappa$ entsprechen, die

Eigenschaft haben, daß sie, mit $f_\varkappa$ multipliziert, unter den in K auftretenden Ordnungszahlen vorkommen, und $f_\varkappa$ ist die kleinste ganze positive Zahl mit dieser Eigenschaft. Wir betrachten daher allgemein den additiven Modul $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ der Ordnungszahlen, die dem Primdivisor $\mathfrak{p}$ in K entsprechen — wir bezeichnen ihn als den *Bewertungsmodul von* $\mathfrak{p}$. Betrachten wir nun die analog definierten Bewertungsmoduln $\mathfrak{m}_{\mathfrak{P}_\varkappa}$ von $\mathfrak{P}_\varkappa$, so liegt es nahe, die Ordnung der (Abelschen) Quotientengruppe $\frac{\mathfrak{m}_{\mathfrak{P}_\varkappa}}{\mathfrak{m}_\mathfrak{p}}$ – wir werden sie als den *Verzweigungsindex von* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *in bezug auf* $\mathfrak{p}$ bezeichnen – als die Mehrfachheit der Primdivisoren $\mathfrak{P}_\varkappa$ in der Zerlegung (2) einzuführen. Wir möchten diesen Gesichtspunkt als den *funktionentheoretischen* bezeichnen. Es ist dies auch versucht worden (Deuring 1, S. 281), leider bleibt dabei die Gleichung (3) nicht erhalten, so daß eine solche Definition kaum als sehr zweckmäßig angesehen werden kann.

Wir gelangen nun zu einer Definition der Zahlen $f_\varkappa$ — wir bezeichnen $f_\varkappa$ als den *Verzweigungsgrad von* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *in bezug auf* $\mathfrak{p}$ —, die als durchaus naturgemäß erscheint und auch die Gleichung (3) bestehen läßt. Der Verzweigungsgrad von $\mathfrak{P}_\varkappa$ ist stets eine ganze Zahl und durch den Verzweigungsindex teilbar. Den Quotienten aus dem Verzweigungsgrad durch den Verzweigungsindex bezeichnen wir als den *Defekt von* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *in bezug auf* $\mathfrak{p}$. Der Defekt ist, wenn er größer als 1 ist, stets eine Potenz einer Primzahl p, wo p entweder die Steinitzsche Charakteristik des Körpers K ist, oder, wenn K von der Charakteristik 0 ist, die durch $\mathfrak{P}_\varkappa$ teilbare rationale Primzahl, wenn es eine solche gibt.

Zur Durchführung des soeben angedeuteten Programms schlagen wir den folgenden Weg ein. Wir erweitern von vornherein den Körper K zu einem relativ perfekten, etwa, indem wir von K zum Kürschákschen derivierten Körper $\bar{K}$ von K übergehen. Faßt man dann einen bestimmten der Primdivisoren $\mathfrak{P}$ aus Q ins Auge, so kann man vom Körper Q zu einer bewerteten Erweiterung Q^* von $\bar{K}$ übergehen, die gerade diesem Primdivisor $\mathfrak{P}_\varkappa$ von $\mathfrak{p}$ entspricht. Ist dabei der Grad von Q^* in bezug auf $\bar{K}$ gleich $n_\varkappa$ — wir bezeichnen $n_\varkappa$ als den *Partialgrad von* $\mathfrak{P}$ *in bezug auf* $\mathfrak{p}$ —, so ist die Summe aller $n_\varkappa$ gleich n — dem Grade von Q in bezug auf K. Wir diskutieren sodann die Zusammensetzung der Erweiterung Q^* von $\bar{K}$. Wir versuchen in erster Linie einen Zwischenkörper M zwischen $\bar{K}$ und Q^* zu finden, dessen Restklassenkörper $\mathfrak{M}$ zum Restklassenkörper von Q mod $\mathfrak{P}_\varkappa$ isomorph ist, und dessen Grad in bezug auf $\bar{K}$ gleich dem Grade von $\mathfrak{M}$ in bezug auf den Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von $\bar{K}$ ist. Ist dies möglich, so sagen wir, daß in unserm Falle der *Trägheitssatz* gilt. Der Trägheitssatz gilt immer, wenn $\mathfrak{K}$ von der Charakteristik 0 ist, sonst kann dieser Satz Ausnahmen erleiden, allerdings nur dann, wenn $n_\varkappa$ durch die Charakte-

ristik p teilbar ist. Dagegen gilt immer eine speziellere Fassung des Trägheitssatzes, in der $\mathfrak{M}$ isomorph zur größten im Restklassenkörper von Q^* enthaltenen Erweiterung erster Art von $\mathfrak{K}$ ist.

Wir definieren den Verzweigungsgrad von $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{p}$ oder den Verzweigungsgrad von Q^* in bezug auf $\bar{K}$ als den Quotienten von $n_\varkappa$ durch den Trägheitsgrad von $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{p}$. Wenn nun der Verzweigungsgrad gleich dem Verzweigungsindex ist, sagen wir, daß der *Verzweigungssatz* gilt. Der Verzweigungssatz gilt immer im Falle der Charakteristik 0; im Falle der Charakteristik p aber auf jeden Fall, wenn $n_\varkappa$ zu p teilerfremd ist. Gilt nun der Verzweigungssatz nicht, ist also der Defekt δ von $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{p}$ größer als 1, so beweisen wir — dies ist der *Defektsatz* —, daß dann δ eine ganze positive Potenz von p ist. Daraus folgt dann insbesondere — also erst zum Schluß der ganzen Diskussion —, daß der Verzweigungsgrad immer eine ganze Zahl ist.

Zum Beweis des Defektsatzes wird die Erweiterung Q^* durch Adjunktion von solchen Erweiterungen von $\bar{K}$, deren Grade zu p teilerfremd sind, auf eine Erweiterung reduziert, deren Grad eine Potenz von p ist, woraus dann der Defektsatz leicht folgt. Zu einer solchen Reduktion benutzen wir eine geeignete Ausbildung des bekannten Foncéneuxschen Gedankens, mit dessen Hilfe — wie im zweiten Gaußschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra — eine beliebige algebraische Gleichung auf Gleichungen ungeraden Grades zurückgeführt wird, in unserem Falle allerdings gewissermaßen in anderer Richtung. Es ist nicht ohne Interesse, daß der algebraische Satz, den wir dabei erhalten, sich als äquivalent mit dem bekannten gruppentheoretischen Satz von Sylow herausstellt. So ist es letzten Endes dieser Satz, der hinter dem Kunstgriff von Foncéneux steckt.

Die Diskussion der Zerlegungseigenschaften eines Primdivisors, also insbesondere der Gleichung (2) ist in den letzten Jahren wiederholt versucht worden, so von Krull (Krull 2), Deuring (Deuring 1), Herbrand (Herbrand 1). Die Methode dieser Autoren besteht in jedem Falle darin, daß sie auf eine normale algebraische Erweiterung die Hilbertschen gruppentheoretischen Definitionen des Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungskörpers übertragen. Dieser Methode haftet der Übelstand an, daß Erweiterungen zweiter Art im Sinne von Steinitz gruppentheoretisch nicht erfaßbar sind. Andererseits hängen die meisten Ausnahmefälle, die in dieser Theorie auftreten, mit dem Auftreten der Erweiterungen zweiter Art zusammen. So hat Herr Krull sich in seiner Arbeit im wesentlichen auf den Fall beschränkt, wo die Restklassenkörper Erweiterungen von der ersten Art sind, — übrigens sich auch durchaus enthalten, den Verzweigungsindex, den er wie wir definiert, als die „wahre“ Mehrfachheit

hinzustellen. — Im übrigen beziehen sich die Betrachtungen von Krull ausschließlich auf Normalkörper. Auch Herr Deuring beschränkt sich in seiner Untersuchung im wesentlichen auf normale Körper. In diesem Falle sind einige unserer Sätze einfacher zu beweisen. Endlich wäre die Arbeit von Herbrand zu erwähnen, die sich nur auf den Fall der gewöhnlichen Zahlkörper bezieht und vor allem unendliche Erweiterungen in Betracht zieht. Auch Herbrand benutzt wesentlich die gruppentheoretischen Methoden. Im übrigen ist seine Arbeit idealtheoretisch orientiert. — Die Untersuchungen der im Literaturverzeichnis zitierten Arbeiten von H. Prüfer bewegen sich in einer ganz verschiedenen Richtung, da in ihnen der Begriff der ganzen Größe vorausgesetzt wird.

Die im Defektsatz gipfelnden Entwicklungen sind im zweiten Teil dieser Abhandlung durchgeführt. Der § 6 enthält die Definitionen und diejenigen Sätze über die neu eingeführten Begriffe, die ohne ausführliche Vorbereitungen bewiesen werden können. In § 7 gehen wir auf den Trägheitssatz ein und geben zugleich eine Reihe von weiteren Sätzen über Trägheitsgrößen und Trägheitserweiterungen, um eine ausreichende Grundlage für spätere Untersuchungen zu sichern. Die §§ 8 und 9 befassen sich mit dem Verzweigungssatz bzw. Defektsatz. In der letzten Nr. 58 des § 9 wenden wir die im zweiten Teil gewonnenen Ergebnisse auf die Zerlegung eines Primdivisors in algebraischen Erweiterungen an.

Der dritte Teil dieser Abhandlung ist endlich der Untersuchung gewidmet, die in unseren Augen eine Rechtfertigung der Einführung eines so allgemeinen Begriffs, wie der Begriff der Bewertung, liefert. Während nämlich bisher der Begriff der Bewertung rein *postulativ* durch definierende Eigenschaften eingeführt wurde, wird in diesem Teil die Frage nach der *konstruktiven* Erfassung des Bewertungsbegriffs, d. h. die Frage nach der Aufstellung sämtlicher Bewertungen eines vorgegebenen rein algebraisch charakterisierten Körpers behandelt und gelöst. Es ergibt sich, daß neben der Erweiterung durch Adjunktion algebraischer Größen oder durch Adjunktion von Limes konvergenter Folgen aus dem vorgegebenen Körper es noch eine allgemeinere Art gibt, eine einfache transzendente Erweiterung eines gegebenen Körpers zu bewerten, nämlich eine solche durch *Pseudolimes* von *pseudokonvergenten Folgen*, die als Spezialfall die Adjunktion von Limes konvergenter Folgen umfaßt. Um den Unterschied an einem Beispiel zu erläutern, betrachte man den Körper K der formalen Potenzreihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{r_\nu} \tag{4}$$

mit beliebigen ins Unendliche wachsenden Exponenten und beliebigen Zahlenkoeffizienten. Läßt man nun die Bedingung, daß die r_ν monoton

ins Unendliche wachsen, fallen und verlangt nur, daß die r_ν monoton wachsen, möge dabei der Grenzwert endlich oder unendlich sein, so stellt die Folge der Partialsummen einer solchen Reihe im Körper der obigen Potenzreihen bei der üblichen Bewertung eine pseudokonvergente Folge dar: und die Angabe, daß eine in bezug auf K transzendente Größe z als „Pseudolimes" einer solchen pseudokonvergenten Folge aufgefaßt werden kann, genügt bereits zur Festlegung der Bewertung von $K(z)$.

Wir beweisen nun, daß eine solche Bewertung durch pseudokonvergente Folgen im wesentlichen die allgemeinste Bewertungsart einer einfachen transzendenten Erweiterung eines beliebigen bewerteten Körpers ist. Und da jede Erweiterung durch eine wohlgeordnete Folge von Adjunktionen von transzendenten Größen und die darauf folgende Adjunktion algebraischer Größen erzeugt werden kann, ist damit die allgemeinste Bewertung jedes algebraischen Körpers charakterisiert, sobald man ihn als Oberkörper eines einfachen bewerteten Körpers auffassen kann. Dies ist der Kern unserer Lösung des allgemeinen Bewertungsproblems.

Es ist übrigens nicht ohne Interesse, daß die oben erwähnten „Potenzreihen" (4) bereits in einem andern Zusammenhang von Herrn Levi-Civita betrachtet wurden. Sie dienten ihm nämlich dazu, gewisse nicht archimedische Zahlensysteme aufzubauen, mit deren Hilfe eine eigentümliche in projektiver Beziehung abgeschlossene Geometrie konstruiert werden kann[5]).

Die angedeuteten Betrachtungen werden in § 11 des dritten Teils durchgeführt, nachdem in § 10 verschiedene spezielle Bewertungstypen besprochen werden. In § 12 endlich wenden wir unsere Resultate auf das Problem einer *meroedrischen Körperabbildung* oder, wie wir uns ausdrücken, der *Restisomorphie* an. Darunter verstehen wir eine solche Abbildung eines Körpers K auf einen Körper $\mathfrak{K}$, daß jedem Element a von K ein Element $\varphi(a)$ von $\mathfrak{K}$ entspricht, bis auf gewisse Elemente, deren Reziproken dann die Null von $\mathfrak{K}$ entsprechen. Dabei sollen Summen, Differenzen, Produkten und, unter den bekannten Einschränkungen, Quotienten von Größen aus K wiederum Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten der entsprechenden Größen aus $\mathfrak{K}$ entsprechen. Man erhält eine solche Zuordnung insbesondere in der Zuordnung von K zu seinem Restkörper nach irgendeinem Primdivisor von K. Durch Iterationen einer solchen Abbildung erhält man allgemeinere Typen von Restisomorphie. Handelt es sich insbesondere um Erweiterungen von endlichem Transzendenzgrad, so erhält man auf diese Weise auch jeden Typus von Restisomorphie, womit für solche Körper auch das Problem der absoluten

[5]) Vgl. Levi-Civita, Atti Ist. Ven. (7) 4 (1892/93); Rend. Lincei (5) 7 (1898).

Riemannschen Fläche (im Sinne von Dedekind-Weber), d. h. das Problem der Aufstellung aller Typen der Restisomorphie auf den Grundkörper selbst erledigt ist. Im Falle der Erweiterung von unendlichem Transzendenzgrad reicht allerdings der von uns behandelte Begriff der Bewertung nicht mehr aus, und unsere Betrachtungen bedürfen zum Teil recht wesentlicher Modifikationen, um auch in diesem Fall die Aufstellung der absoluten Riemannschen Fläche zu ermöglichen.

In diesem Falle muß nämlich der Begriff der Ordnungszahl derart verallgemeinert werden, daß als Ordnungszahl ein komplexes Zahlensystem mit unendlich vielen Komponenten benutzt wird, das im Sinne von Hahn[6]) geordnet ist. Eine solche Verallgemeinerung ist kürzlich sehr eingehend von Herrn Krull behandelt worden (Krull 4), der aber das Problem der Restisomorphie im allgemeinen Falle nicht formuliert und andererseits auch seine „allgemeine" Bewertungstheorie wiederum nur postulativ entwickelt, ohne auf die konstruktive Erzeugung der allgemeinsten Bewertung — das zentrale Problem unserer Untersuchung — einzugehen.

Die letzten Nummern des dritten Teils dieser Abhandlung berühren sich mit den §§ 5 und 6 jener Abhandlung von Herrn Krull, wenn auch Herr Krull für den Fall des endlichen Transzendenzgrades seinen Körpern in den von ihm behandelten Körpertypen noch eine weitere Beschränkung auferlegt.

Andererseits werden in jener Abhandlung von Herrn Krull gewisse, bisher noch unveröffentlichte Resultate von Herrn F. K. Schmidt erwähnt, die anscheinend mit den Betrachtungen unseres dritten Teils sich enge berühren, da danach die „Potenzreihen" vom Typus (4) auch von Herrn F. K. Schmidt benutzt werden. Doch stellen diese „Potenzreihen" nur einen relativ speziellen Unterfall des allgemeinen Begriffs der pseudokonvergenten Folge dar.

Was die Gliederung der Darstellung im einzelnen anbetrifft, so haben wir uns bemüht, möglichst wenig neue Begriffe einzuführen. Insbesondere haben wir vom Idealbegriff keinen Gebrauch gemacht, da es vielleicht einer der Hauptvorzüge der hier dargestellten Theorie ist, daß durch sie der Idealbegriff eliminierbar wird. Immerhin mußten doch relativ viele Fachausdrücke eingeführt werden, die in einem Verzeichnis am Schluß der Einleitung zusammengestellt sind.

Auf die in dieser Abhandlung entwickelte Lösung des Strukturproblems habe ich bereits 1918 (Ostrowski 3) hingewiesen. Da aber die betreffende Angabe nur sehr unbestimmt war und ein großer Teil der

[6]) Sitzungsber. d. Wiener Akademie, Math.-Nat. Klasse, Abt. IIa, 116 (1907), S. 601—653.

Ergebnisse der vorliegenden Abhandlung erst später, z. T. sogar erst in den Monaten April—Juli 1932 entstanden ist, sei folgendes angegeben.

Die Abhandlungen Ostrowski 2, 3 waren Auszüge aus einer umfangreichen im Januar 1915 abgeschlossenen Abhandlung, die indessen zur Zeit ihrer Fertigstellung durch die Ungunst der Verhältnisse und wegen ihres großen Umfangs (110 Manuskriptseiten) nicht veröffentlicht werden konnte. Und zwar stellt die Abhandlung O. 3 den Inhalt der §§ 1 bis 6 und die Abhandlung O. 2 den Inhalt von § 9 jener Abhandlung dar. Von den drei übrigen besonders umfangreichen Paragraphen 7, 8 und 10 des 1915-Manuskripts ist der Inhalt des § 7 — die Theorie der algebraischen Erweiterungen bewerteter Körper — in die §§ 2, 3 und 4 (bis Nr. 17) dieser Abhandlung übergegangen. Allerdings ist jetzt die Darstellung durch die Einführung des Begriffs des relativ perfekten Körpers etwas ausgebaut worden. Der Inhalt des § 8 — das Newtonsche Diagramm — ist in eine kürzlich in dieser Zeitschrift erschienene Abhandlung (O. 4) als § 5 eingearbeitet worden. Der Inhalt des § 10 des 1915-Manuskripts endlich ist fast unverändert in die §§ 10 und 11 der vorliegenden Abhandlung übergegangen. Die einzigen Änderungen beziehen sich erstens darauf, daß ich in der früheren Fassung möglichst weitgehend die Möglichkeit berücksichtigte, entweder ganz ohne Auswahlpostulat oder wenigstens mit einer stark abgeschwächten, auf abzählbare Mengen bezüglichen Formulierung desselben auszukommen. Heute schien es mir nicht mehr lohnend, die Darstellung durch die Berücksichtigung dieser Möglichkeit zu beschweren. Andererseits kamen jetzt die Betrachtungen über transzendente Größen erster, zweiter und dritter Art hinzu und namentlich die Nummern 68 bis 72.

Was endlich die in § 12 dargestellte Theorie der absoluten Riemannschen Fläche und der Restkörper anbetrifft, so ist sie etwas später, 1916/17 entstanden, aber erst in diesem Jahr zum erstenmal schriftlich niedergelegt worden.

Basel, Math. Sem. d. Univ., Juli 1932.

Literaturverzeichnis

E. Artin.

[1] Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper. Journ. f. d. r. u. a. Math. **167** (1932), S. 157—159.

M. Bauer.

[1] Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen. Journ. f. d. r. u. a. Math. **132** (1907), S. 21—32.

M. Deuring.

[1] Verzweigungstheorie bewerteter Körper. Math. Annalen **105** (1931), S. 277—307.

G. Dumas.
[1] Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné. Thèse, Paris, 1904.
[2] Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels. Journ. de mathém. pures et appliquées (6) **2** (1906), S. 191—258.

Hensel.
[1] Theorie der algebraischen Zahlen Bd. 1. Leipzig 1908.
[2] Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper. Journ. f. d. r. u. a. Math. **136** (1909), S. 183—209.

I. Herbrand.
[1] Théorie arithmétique des corps des nombres de degré infini. I. Extensions algébriques finies des corps infinis. Math. Annalen **106** (1932), S. 473—501.

W. Krull.
[1] Idealtheorie in unendlichen Zahlkörpern. Teil I. Math. Zeitschr. **29** (1928), S. 42—54; Teil II. **31** (1930), S. 527—557.
[2] Ein Satz über primäre Integritätsbereiche. Math. Annalen **103** (1930), S. 450—465.
[3] Galoissche Theorie bewerteter Körper. Sitzungsber. d. Bayr. Akad. (1930), S. 225—238.
[4] Allgemeine Bewertungstheorie. Journ. f. d. r. u. a. Math. **167** (1932), S. 160—196.

Kühne.
[1] Angenäherte Auflösung von Kongruenzen nach Primmodulsystemen im Zusammenhang mit den Einheiten gewisser Körper. Journ. f. d. r. u. a. Math. **126** (1903), S. 102—115.

J. Kürschák.
[1] Über Limesbildung und die allgemeine Körpertheorie. Journ. f. d. r. u. a. Math. **142** (1913), S. 211—253.
[2] Irreduzible Formen. Journ. f. d. r. u. a. Math. **152** (1923), S. 180—191.

E. Noether.
[1] Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers. Journ. f. d. r. u. a. Math. **157** (1927), S. 82ff.

O. Öre.
[1] Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien. Math. Zeitschr. **18** (1923), S. 278—288.

A. Ostrowski[7]).
[1] Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie. Journ. f. d. r. u. a. Math. **143** (1913), S. 255—284.
[2] Über sogenannte perfekte Körper. Journ. f. d. r. u. a. Math. **147** (1917), S. 191—204.
[3] Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x\,y)$. Acta math. **41** (1918), S. 271—284.

---

[7]) Es seien bei dieser Gelegenheit die folgenden kleinen Versehen bzw. Druckfehler berichtigt, die sich in die Abhandlungen O. 1 bis 3 eingeschlichen haben.
(O. 1): S. 259, 5. Zeile v. u. soll: $m_n > M^2$ heißen anstatt: $m_n < M^2$.
(O. 2): S. 197, 18. Zeile v. u. ist: *eine einzige* in: *solche* abzuändern;
S. 197, 17. Zeile v. u. ist: *diese* in: *jede solche* abzuändern.
(O. 3): S. 274, 13. Zeile v. u. ist: $\lg \| a \|$ in: $-\lg \| a \|$ abzuändern.

[4] Algebraische Funktionen von Dirichletschen Reihen. Math. Zeitschr. 37, (1933), S. 98—133.
[5] Zur Algebra der endlichen Felder. (Russisch.) Sitzungsber. d. Phys. Math. Ges. Kiew (1913).

H. Prüfer.
[1] Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie. Math. Annalen 94 (1925), S. 198—243.
[2] Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. Journ. f. d. r. u. a. Math. 168 (1932), S. 1—36.

T. Rella.
[1] Ordnungsbestimmungen in Integritätsbereichen und Newtonsche Polygone. Journ. f. d. r. u. a. Math. 158 (1927), S. 33—48.

Rychlik.
[1] Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper. Journ. f. d. r. u. a. Math. 153 (1924), S. 94—107.

E. Steinitz.
[1] Algebraische Theorie der Körper. Journ. f. d. r. u. a. Math. 137 (1910), S. 167—308.
[2] Die allgemeine Theorie der Körper und der Fundamentalsatz der Algebra. Schwarz-Festschrift (1914), S. 420—426.

Verzeichnis der neu eingeführten Fachausdrücke.

(Die Zahlen hinter den Fachausdrücken bezeichnen die Nummern, in denen diese Ausdrücke zum erstenmal vorkommen oder definiert werden.)

Ausgezeichnete Approximationspolynome 72.
Bewertung 1. — Äquivalente Bewertungen und Primdivisoren 3. — Diskrete Bewertungen 3.
Bewertungsmodul 3. — Kommensurabilität, Inkommensurabilität zum Bewertungsmodul 61.
Derivierte Körper 2. — Verträgliche derivierte Körper 2. — Der derivierte Ring 3.
Defekt 32. — Erster Defekt 18. — Zweiter Defekt 58. — Totaldefekt 58. — Defektsatz 38.
Eigentliche Pseudolimes, eigentliche pseudokonvergente Folgen 69.
Einheiten in bewerteten Körpern bzw. in bezug auf einen Primdivisor 3.
Funktionentheoretischer Fall 38.
Ganze Größen in bewerteten Körpern bzw. in bezug auf einen Primdivisor 3.
Partialgrad 18. — Reduzierter Partialgrad 18.
Analytische Isomorphie 2.
Invariable Elemente 60.
Halbbewertete Körper 28.
Konvergenz, Grenzwert, Limes in bewerteten Körpern 2.
Kongruenz in einem bewerteten Körper 5.
Kern eines bewerteten Körpers 29.
K-Ring 73.
Newtonsches Diagramm 21.
Ordnungszahl 1. — Ordnungsfunktion $\omega(a)$ 1.
Absolut perfekte Körper 2. — Relativ perfekte Körper 9.
Permutationen 13. — Konjugierte Permutationen 14.
Pseudokonvergente Folgen erster Art, zweiter Art 62. — Breite, Grenzbewertung einer pseudokonvergenten Folge 62. — Äquivalenz pseudokonvergenter Folgen 71.
Pseudolimes 65. — Pseudolimes erster, zweiter und dritter Art 70. — Distanz eines Pseudolimes von einem Körper 69.
Puiseuxsche Punkte, Puiseuxsche Darstellungen 78.

Restklassenkörper 28. — Restisomorphie, Restkörper 73. — Einfache Restkörper 73.
Rang eines Primdivisors, Rang der Restisomorphie 77.
Absolute Riemannsche Fläche 75.
Trägheitsgrad 32. — Trägheitserweiterung 33. — Reguläre Trägheitserweiterungen 43, 44.
Trägheitsgrößen 37. - Reguläre Trägheitsgrößen 43.
Trägheitssatz 38. — Spezieller Trägheitssatz 45.
Transzendente Größen 1., 2. u. 3. Art 70.
Unabhängigkeit von Primdivisoren 20.
Universeller Zerlegungskörper 23.
Verzweigungsindex 30. — Verzweigungsmodulgruppe 31. — Verzweigungsinvarianten 31. — Verzweigungszahl 31. — Verzweigungsgrad 32. — Verzweigungserweiterung 49. — Verzweigungssatz 38.
Vergleichbarkeitsklasse 76.
Zerlegungskörper 16. — Reduzierte Zerlegungskörper 17. — Reduzierter universeller Zerlegungskörper 24. — Hilbertscher Zerlegungskörper 27. — Zerlegungsgruppe 16.
Zahlentheoretischer Fall 38.
$D(\mathfrak{A}_\nu)$, 4. — $[K', \mathfrak{N}]$, 12.

Teil I.

Existenzsätze für Primdivisoren in algebraischen Erweiterungen gegebener Körper.

§ 1.

Einleitende Definitionen[8]).

1. Bestimmende Eigenschaften. Wir gehen vom allgemeinen Steinitzschen *Körper*begriff (Steinitz 1) aus, der im folgenden als bekannt vorausgesetzt wird. Einen Körper K nennen wir *bewertet*, wenn jedem Element a dieses Körpers eine nicht negative Zahl $\|a\|$ — *die Bewertung von* a — und damit zugleich $-\lg\|a\| = \omega(a)$, *die Ordnungszahl von* a zugeordnet wird, derart, daß die Bedingungen erfüllt sind:

I. Für ein gewisses a aus K ist $\|a\| \neq 0$, $\|a\| \neq 1$;

II. $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$;

III. $\|a+b\| \leqq \mathrm{Max}(\|a\|, \|b\|)$.

Aus diesen drei Annahmen folgert man leicht weiter, daß a) $\|0\| = 0$ (denn setzt man $\|0\| = x$, so folgt für ein a mit $\|a\| \neq 1$ aus II: $x = \|0 \cdot a\| = x\|a\|$), b) $\|1\| = 1$ (denn ist $\|1\| = x$, so folgt für ein a mit $\|a\| \neq 0$, $\|a\| = \|1 \cdot a\| = x\|a\|$, $x = 1$), c) für jedes $b \neq 0$: $\|b\| \neq 0$ (denn ist

[8]) Wir benutzen im folgenden zur Numerierung der Formeln die Nummer des betreffenden Paragraphen als die Zahl vor dem Komma und die Nummer der Formel innerhalb des Paragraphen als die Zahl nach dem Komma, wobei die dezimale Anordnung zugrunde gelegt ist. Die Sätze werden in jedem Paragraphen für sich mit römischen Ziffern numeriert. Ein Verweis auf einen Satz ohne Angabe des Paragraphen bedeutet, daß der Satz in demselben Paragraphen zu suchen ist.

$\|a\| \neq 0$, so kann, wegen $a = \frac{a}{b} \cdot b$, $\|a\| = \|b\| \cdot \left\| \frac{a}{b} \right\|$, auch $\|b\|$ nicht verschwinden), d) $\|-a\| = \|a\|$ ist (wegen $\|-a\|^2 = \|a\|^2$), und endlich für $\|a\| > \|b\|$

(1, 1) $$\|a \pm b\| = \|a\|.$$

Um (1, 1) zu beweisen, sei $\|a \pm b\| = x$. Aus $a = (a \pm b) \mp b$ $\|a\| \leqq \text{Max}(\|a \pm b\|, \|b\|)$ würde für $x < \|a\|$ wegen $\|b\| < \|a\|$ ein Widerspruch folgen[9]).

Aus III folgt weiter, daß

(1, 2) $$\|a + b + \ldots + c\| \leqq \text{Max}(\|a\|, \|b\|, \ldots, \|c\|)$$

ist, und sodann, genau wie oben, für $\|a\| > \|b\|, \ldots, \|a\| > \|c\|$:

$$\|a + b + \ldots + c\| = \|a\|.$$

Aus I und II folgt, daß ein endlicher Körper nicht bewertet werden kann.

Aus den obigen Eigenschaften folgt für die *Ordnungsfunktion* $\omega(a)$ des Körpers K

I°. $\omega(a) < \infty$ für $a \neq 0$ und für ein gewisses a: $0 = \omega(1) < \omega(a) < \omega(0) = +\infty$;

II°. $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$;

III°. $\omega(a + b) \geqq \text{Min}(\omega(a), \omega(b))$,

wobei in III° das Gleichzeitszeichen gilt für $\omega(a) \leqq \omega(b)$.

2. Konvergenz in bewerteten Körpern. Wir nennen ferner mit Kürschák eine Folge a_ν von Elementen aus K *konvergent im Sinne der festgelegten Bewertung*, wenn

$$\|a_\nu - a_\mu\|$$

mit unabhängig voneinander ins Unendliche wachsenden ν und μ gegen Null konvergiert. Es kann dann in K nur *ein* Element A — *der Grenzwert oder Limes von* a_ν — geben, derart, daß

$$\|a_\nu - A\| \to 0$$

ist. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden wir später den Grenzwert im gewöhnlichen Sinne mit lim, den Grenzwert im Sinne der Bewertung mit Lim bezeichnen, und wenn wir Konvergenz im gewöhnlichen

[9]) Durch die obigen Forderungen wird, genauer gesagt, eine etwas speziellere Fassung des ursprünglich von J. Kürschák (Kürschák 1) aufgestellten Begriffs festgelegt — insofern, als wir uns hier und überall im folgenden auf die sogenannten nicht archimedischen Bewertungen beschränken. Die Theorie der übrigen Bewertungen läßt sich aber, wie wir in O. 3 gezeigt haben, vollständig auf den in der Analysis betrachteten Spezialfall der Bewertung durch absolute Beträge zurückführen und wird im folgenden nicht in Betracht gezogen. Wir werden also auch später unter Bewertungen durchweg nicht archimedische Bewertungen verstehen.

Sinne erwähnen, „im gewöhnlichen Sinne" hinzufügen, falls sich der Sinn nicht restlos eindeutig aus dem Zusammenhang ergibt. Den Pfeil benutzen wir nur für Konvergenz im gewöhnlichen Sinne.

Einen bewerteten Körper K nennen wir *absolut perfekt*[10]), wenn jede konvergente Folge von Elementen aus K einen in K liegenden Limes besitzt. Ein bewerteter Körper K braucht noch nicht absolut perfekt zu sein, er kann aber durch genau analoge Überlegung, wie die in der *Cantor*schen Theorie der Irrationalzahlen benutzte, durch Adjunktion von idealen Limes zu einem kleinsten, absolut perfekten Körper erweitert werden, den man nach Kürschák als den *derivierten Körper von* K bezeichnet. Nennt man zwei bewertete Körper *analytisch isomorph*, wenn sie sich derart aufeinander isomorph beziehen lassen, daß die Bewertungen entsprechender Elemente gleiche Werte haben, so ist der derivierte Körper von K eindeutig bestimmt, wenn man die analytisch isomorphen Erweiterungen von K als miteinander identisch betrachtet — natürlich nur, wenn dabei die Elemente von K sich selbst entsprechen.

Ist nun Q eine bewertete Erweiterung von K, so enthält der derivierte Körper von Q einen derivierten Körper von K. Man kann also K immer derart zu einem derivierten Körper erweitern, daß dieser Körper zugleich mit Q in ein und derselben Erweiterung von K steckt. Einen solchen derivierten Körper von K bezeichnen wir als *verträglich mit* Q.

3. Der Begriff des Primdivisors. Die Gesamtheit der Werte $\neq \infty$, deren die Ordnungsfunktion $\omega(a)$ in einem bewerteten Körper K fähig ist, bildet einen Modul im Sinne von Dedekind, da mit zwei ihrer Werte $\omega(a)$ und $\omega(b)$ auch $\omega(a) + \omega(b) = \omega(ab)$ und $\omega(a) - \omega(b) = \omega\left(\frac{a}{b}\right)$ zu ihren Werten gehören. Diesen Modul werden wir als den *Bewertungsmodul* von K' bezeichnen.

An sich ist es klar, daß man aus einer gegebenen Bewertung eines Körpers K eine neue Bewertung bekommt, wenn man die Ordnungsfunktion mit einer festen positiven Zahl ϱ multipliziert, oder, was auf dasselbe hinauskommt, alle Bewertungen der Elemente von K in die ϱ-te Potenz erhebt — solche Bewertungen werden wir als *äquivalent* bezeichnen. Der Übergang zu einer äquivalenten Bewertung von K entspricht der Multiplikation des Bewertungsmoduls mit einer beliebigen positiven Zahl.

Ein Körper läßt sich im allgemeinen auf sehr verschiedene nicht äquivalente Arten bewerten. Jeder Bewertung eines Körpers K ordnen wir einen Primdivisor p von K zu, indem wir sagen, daß ein Element a

[10]) Kürschák bezeichnet solche Körper einfach als perfekt. Da wir im folgenden noch den Begriff eines relativ perfekten Körpers einführen werden, benutzen wir hier zum Unterschied die Bezeichnung absolut perfekt.

von K durch $\mathfrak{p}^{\omega(a)}$ teilbar ist, wo $\omega(a)$ die Ordnungsfunktion von a ist. Wie man sieht, sind die Primdivisoren, die äquivalenten Bewertungen entsprechen, im Sinne dieser Definition als *verschieden* zu betrachten. Wir werden sie als *äquivalent* bezeichnen. Eine Normierung ist ohne weiteres möglich, wenn es einen kleinsten positiven Wert ω_0 der Ordnungsfunktion gibt (*diskrete Bewertung*). Dann können wir es so einrichten, daß $\omega_0 = 1$ wird, und die Bewertungsfunktion ist dann nur ganzzahliger Werte fähig und nimmt auch alle ganzen Werte an. Zur Vermeidung von Mißverständnissen ist aber zu bemerken, daß auch in Fällen von diskreten Bewertungen eine Normierung bei Untersuchung von algebraischen Erweiterungen nicht sehr zweckmäßig ist, und wir werden von ihr im allgemeinen absehen.

Eine Größe a mit $\|a\| \leqq 1$, also $\omega(a) \geqq 0$, werden wir gelegentlich als *ganz im bewerteten Körper* K, oder *in bezug auf den Primdivisor* $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Ist $\|a\| = 1$, $\omega(a) = 0$, so bezeichnen wir a als eine *Einheit im bewerteten Körper* K *bzw. in bezug auf* $\mathfrak{P}$. Beim Übergang zu äquivalenten Bewertungen behalten ganze Größen und Einheiten diese ihre Eigenschaften bei.

Bei Untersuchung von Grenzwerten ist es in der Analysis in der Regel unwesentlich, ob die Zahlen, deren Grenzwerte zu untersuchen sind, einem Körper oder einem spezielleren Ring (Integritätsbereich) angehören. Bei Untersuchung von Grenzwerten im Sinne der Bewertung kann dies für verschiedene Anwendungen bedeutsam werden. Wir wollen daher, falls R ein Teilring des bewerteten Körpers K ist — (also eine solche Teilgesamtheit von K, daß mit zwei ihrer Elemente auch ihre Summe, Differenz und Produkt zu R gehören) —, die Gesamtheit der Elemente des derivierten Körpers von K, die sich als Grenzwerte von Elementen aus R darstellen lassen, zusammen mit den Elementen von R als den *derivierten Ring von* R bezeichnen. Insbesondere werden uns Ringe $[S] = [a_1, a_2, \ldots]$ interessieren, die aus allen ganzzahligen Polynomen in den Elementen eines festen Systems $S: a_1, a_2, \ldots$ von Elementen aus K bestehen, und ebenso derivierte Ringe von solchen Ringen[11]).

4. Beispiele von bewerteten Körpern Dirichletscher Reihen. Ein Beispiel eines absolut perfekten bewerteten Körpers wird durch einen Körper K der formalen Dirichletschen Reihen

$$D(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

gegeben, wobei $D(s) = 0$ zu setzen ist, wenn alle $a_\nu = 0$, sonst aber, falls $a_0 \neq 0$ ist,

$$\|D(s)\| = e^{-\lambda_0}$$

[11]) Bewertete Ringe oder Integritätsbereiche betrachtet Hr. Rella (Rella 1), doch ist er zur Durchführung seiner Überlegungen gezwungen, die betrachteten bewerteten Integritätsbereiche sehr stark zu spezialisieren.

gesetzt wird. λ_0 ist hier die Ordnung von $D(s)$. In der Tat sind hier offenbar die obigen Forderungen erfüllt. — Beschränkt man sich insbesondere auf solche Dirichletsche Reihen, deren sämtliche Exponenten sich ganzzahlig linear aus den Zahlen eines festen Zahlenvorrats $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots$ zusammensetzen, so erhält man wiederum einen Körper Dirichletscher Reihen, der nach der obigen Vorschrift bewertet und absolut perfekt ist. Ebenso ist z B. die Gesamtheit der in einem solchen Körper enthaltenen Dirichletschen Reihen mit absolutem Konvergenzgebiet ein bewerteter Körper, der aber nicht mehr absolut perfekt ist, usw. Ferner kann man die Koeffizienten a_ν die Elemente eines beliebigen Körpers durchlaufen lassen.

Die sogenannten speziellen Dirichletschen Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^s} \tag{1, 3}$$

bilden für sich keinen Körper, sondern nur einen Ring. Der kleinste diesen Ring enthaltende Körper gehört zur Exponentenbasis $\Lambda_1 = \lg 2$, $\Lambda_2 = \lg 3, \ldots, \Lambda_\nu = \lg p_\nu, \ldots$, wo p_ν die ν-te Primzahl ist. Offenbar besteht der derivierte Ring eines Ringes von speziellen Dirichletschen Reihen (1, 3) wiederum aus solchen Reihen.

Es seien nun alle Λ_ν positiv. Dann kann man verlangen, daß in der Darstellung der Exponenten λ_μ einer Dirichletschen Reihe durch Λ_ν nur die Λ_ν aus einem endlichen Vorrat (der von einer Dirichletschen Reihe zur anderen variieren kann) negative Koeffizienten haben können. Die Gesamtheit solcher Dirichletschen Reihen bildet einen Körper, den wir mit $D(\Lambda_\nu)$ bezeichnen. $D(\Lambda_\nu)$ ist aber im Sinne der obigen Definition nicht mehr perfekt. Sind aber $D_1, \ldots, D_n$ n Dirichletsche Reihen aus $D(\Lambda_\nu)$, so ist der derivierte Ring von $[D_1, \ldots, D_n]$ in $D(\Lambda_\nu)$ enthalten.

Es sei noch besonders hervergehoben, daß das Symbol $D(\Lambda_\nu)$ an sich noch sehr verschiedene Körper bezeichnen kann, da man z. B., wie oben erwähnt, den in einem solchen Körper liegenden Dirichletschen Reihen die Bedingung der absoluten Konvergenz auferlegen, oder den Koeffizientenkörper willkürlich vorschreiben, oder auch in einem gewissen Maße beides tun kann.

5. Kongruenz in bewerteten Körpern. Wir werden im folgenden einen bewerteten Körper gewöhnlich mit Strichen bezeichnen, indem wir für einen Körper, der verschieden bewertet wird, dasselbe Symbol, aber mit verschiedenen oberen Indizes oder Strichen wählen; so entstehen aus einem Körper K durch verschiedene Bewertungen K', K'', ... Ist ein Körper K^* eine Erweiterung eines Körpers K, und bewertet man K zu K', ist also mit anderen Worten ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ im Körper K festgesetzt, so

entspricht einer Bewertung von K^*, bei der die Bewertung von K' unverändert bleibt, ein Primdivisor $\mathfrak{p}^*$ von K^*, von dem wir sagen werden, daß er ein *Teiler* des Primdivisors $\mathfrak{p}$ ist. Stellt man alle Bewertungen von K^* auf, bei denen die Bewertung von K' unverändert bleibt, so sagen wir, der Primdivisor $\mathfrak{P}$ sei (oder zerfalle in) das Produkt der diesen Bewertungen von K^* entsprechenden Primdivisoren mit gewissen später festzusetzenden Exponenten.

Sind in einem bewerteten Körper K' zwei Elemente a und b so beschaffen, daß $\| a - b \| < 1$ ist, also $\omega(a-b) > 0$ ist, so sagen wir, daß *a kongruent b im Körper K'* ist:

$$a \equiv b \qquad (K').$$

Man übersieht sofort, daß alle Rechenregeln, die in der Zahlentheorie für Kongruenzen nach einem Primzahlmodul hergeleitet werden, auch hier gültig bleiben.

Ebenso bezeichnen wir zwei Polynome mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper K', deren Differenz lauter Koeffizienten von positiver Ordnung besitzt, als *kongruent im Körper K'*.

Wir leiten nun zum Schluß die beiden einfachen Hilfssätze[12]) her:

I. *Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei Polynome aus einem bewerteten Körper K', und sind α_1 und α_2 die größten Bewertungen der Koeffizienten von $f_1(x)$ bzw. von $f_2(x)$, so ist $\alpha_1\alpha_2$ die größte Bewertung der Koeffizienten von $f_1(x)f_2(x)$.* — Denn sind a_1 bzw. a_2 die Koeffizienten von $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$, deren Bewertungen α_1 bzw. α_2 sind und denen zugleich möglichst hohe Potenzen von x entsprechen, so gilt

$$\frac{f_1(x)}{a_1} \equiv x^{n_1} + \ldots, \qquad \frac{f_2(x)}{a_2} \equiv x^{n_2} + \ldots \qquad (K'),$$

wo die weiter folgenden Koeffizienten *nicht negative* Ordnungen haben. Daraus folgt

$$\frac{f_1(x)f_2(x)}{a_1 a_2} \equiv x^{n_1+n_2} + \ldots \qquad (K'),$$

und hieraus folgt weiter wegen $\| a_1 a_2 \| = \alpha_1\alpha_2$ die Behauptung.

II. *Es sei g eine positive Zahl. Es sei das Produkt der Polynome mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper*

$$f_1(x) = k_0 x^{n_1} + k_1 x^{n_1-1} + \ldots + k_{n_1}, \quad f_2(x) = l_0 x^{n_2} + l_1 x^{n_2-1} + \ldots + l_{n_2}$$

das Polynom

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = m_0 x^{n_1+n_2} + m_1 x^{n_1+n_2-1} + \ldots + m_{n_1+n_2}.$$

Ist dann K bzw. L die obere Grenze der Zahlen $\| k_i \| g^{n_1-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n_1)$ bzw. der Zahlen $\| l_i \| g^{n_2-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n_2)$, so ist die obere Grenze der Zahlen $\| m_i \| g^{n_1+n_2-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n_1+n_2)$ gleich dem Produkt KL. Beweis: Wir werden im folgenden unter k_i, l_i 0 verstehen, wenn i n_1

[12]) Vgl. hierzu Rella 1, S. 35 ff.

bzw. n_2 übersteigt. Es seien die ersten Zahlen der Folgen $(\ldots, \|k_i\| g^{n_1-i}, \ldots)$ und $(\ldots, \|l_i\| g^{n_2-i}, \ldots)$, welche die Werte K bzw. L haben: $\|k_i\| g^{n_1-i}$, $\|l_k\| g^{n_2-k}$. Dann hat das Glied von (n_1+n_2-i-k)-tem Grade in $f_1(x)\cdot f_2(x)$ die Gestalt:

$$m_{i+k}x^{n_1+n_2-i-k} = (k_0 l_{i+k} + k_1 l_{i+k-1} + \ldots + k_i l_k + \ldots + k_{i+k} l_0) x^{n_1+n_2-i-k}.$$

Das Glied $k_i l_k$ in der Klammer hat genau die Bewertung $\frac{K}{g^{n_1-i}} \frac{L}{g^{n_2-k}}$, da $K = \|k_i\| g^{n_1-i}$, $L = \|l_k\| g^{n_2-k}$ ist. Die Bewertungen der anderen Glieder in der Klammer:

$$k_0 l_{i+k},\ k_1 l_{i+k-1},\ \ldots,\ k_{i+k-1} l_1,\ k_{i+k} l_0,$$

sind aber *kleiner* als $\frac{KL}{g^{n_1+n_2-i-k}}$. Denn es ist:

$$g^{n_1}\|k_0\| < K,\ g^{n_1-1}\|k_1\| < K, \ldots, g^{n_1-i-1}\|k_{i+1}\| \leqq K, \ldots, \|k_{n_1}\| \leqq K$$
$$g^{n_2}\|l_0\| < L,\ g^{n_2-1}\|l_1\| < L, \ldots, g^{n_2-k-1}\|l_{k+1}\| \leqq L, \ldots, \|l_{n_2}\| \leqq L$$

nach unserer Voraussetzung über $\|k_i\| g^{n_1-i}$ und $\|l_k\| g^{n_2-k}$. Folglich ist die Bewertung des obigen Ausdruckes in den Klammern genau gleich $\frac{KL}{g^{n_1+n_2-i-k}}$. Es ist also

$$\|m_{i+k}\| g^{n_1+n_2-i-k} = KL.$$

Es ist nur noch zu zeigen, daß alle anderen Zahlen $\|m_t\| g^{n_1+n_2-t}$ nicht größer als KL sind. In der Tat ist das Glied (n_1+n_2-t)-ten Grades in $f_1(x)\cdot f_2(x)$ gleich

$$m_t x^{n_1+n_2-t} = (k_0 l_t + k_1 l_{t-1} + \ldots + k_{t-1} l_1 + k_t l_0) x^{n_1+n_2-t}.$$

Aus $\|k_r\| \leqq \frac{K}{g^{n_1-r}}$, $\|l_r\| \leqq \frac{L}{g^{n_2-r}}$ folgt, daß jedes Glied des Ausdruckes für m_t eine Bewertung hat, die nicht größer ist als $\frac{KL}{g^{n_1+n_2-t}}$. Folglich ist die Bewertung von m_t nicht größer als $\frac{KL}{g^{n_1+n_2-t}}$. W. z. b. w.

§ 2

Das Fundamentallemma.

6. Formulierung. Wir wollen jetzt die folgende Eigenschaft der absolut perfekten bewerteten Körper beweisen, die eine gewisse Analogie mit dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz in der Theorie der Potenzreihen von mehreren Variablen darbietet.

I. Fundamentallemma: *Hat die Funktion*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

ganze Koeffizienten aus einem absolut perfekten bewerteten Körper K', und gilt in K' für $n > m > 0$:

$$f(x) \equiv x^m + a_{n-m-1} x^{m+1} + \ldots + a_0 x^n \qquad (K'),$$

so ist das Polynom $f(x)$ in K' reduzibel und läßt sich als Produkt $f_1(x)\, f_2(x)$ von zwei Polynomen

$$f_1(x) = x^m + \ldots, \quad f_2(x) = a_0 x^{n-m} + \ldots$$

mit Koeffizienten aus K' und den Graden m, $n-m$ darstellen[13]).

Zusatz: *Die Koeffizienten der Polynome $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die durch das Beweisverfahren geliefert werden, gehören dem derivierten Ring von $R = R(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ an.*

7. Beweis des Fundamentallemmas. $f(x)$ läßt sich nach Voraussetzung in der Form darstellen:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot x^m + \varrho(x),$$

wo

$$\varphi(x) = a_0 x^{n-m} + \ldots + a_{n-m-1} x + 1 = \psi(x) + 1,$$
$$\varrho(x) = (a_{n-m} - 1) x^m + a_{n-m+1} x^{m-1} + \ldots + a_n$$

ist. Und hier ist nach Voraussetzung

(2, 1) $\quad \alpha = \mathrm{Max}(\|a_{n-m} - 1\|, \|a_{n-m+1}\|, \|a_{n-m+2}\|, \ldots \|a_n\|) < 1.$

Wir gehen von der Identität aus

$$\left(\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)^{2m} x^m\right) x^m - \frac{(\psi(x))^{2m} - 1}{\psi(x) + 1}\, \varphi(x) = 1,$$

oder

$$\alpha_0(x)\, x^m - \beta_0(x)\, \varphi(x) = 1,$$

wo $\alpha_0(x)$ und $\beta_0(x)$ Polynome in x sind, deren Koeffizienten dem Ring R angehören. Hieraus folgt durch Multiplikation mit $x^\varkappa$, $0 \leqq \varkappa \leqq n-1$

$$\alpha_\varkappa(x)\, x^m - \beta_\varkappa(x)\, \varphi(x) = x^\varkappa.$$

Wir setzen nun $\beta_\varkappa(x) = \varepsilon_\varkappa(x)\, x^m - \gamma_\varkappa(x)$, wo $\gamma_\varkappa(x)$ höchstens vom Grade $m-1$ ist. Hier finden sich offenbar alle Koeffizienten von $\varepsilon_\varkappa(x)$ und $\gamma_\varkappa(x)$ in $\beta_\varkappa(x)$ wieder. Setzt man diesen Ausdruck von $\beta_\varkappa(x)$ in die obige Gleichung ein, so ergibt sich eine Identität

$$(\alpha_\varkappa(x) - \varepsilon_\varkappa(x)\, \varphi(x))\, x^m + \gamma_\varkappa(x)\, \varphi(x) = x^\varkappa,$$

oder

(2, 2) $\quad \delta_\varkappa(x)\, x^m + \gamma_\varkappa(x)\, \varphi(x) = x^\varkappa,$

wo die Koeffizienten von $\delta_\varkappa(x)$ und $\gamma_\varkappa(x)$ dem Ring R angehören, während der Grad von $\gamma_\varkappa(x)$ höchstens $m-1$ ist und daher, da $\varkappa \leqq n-1$ und der Grad von $\varphi(x)$ gleich $n-m$ ist, der Grad von $\delta_\varkappa(x)$ höchstens gleich $n-m-1$ sein kann.

Es sei nun $r(x)$ ein Polynom in x vom Grade $n-1$ mit Koeffizienten aus K', deren Bewertungen höchstens gleich β sind. Man multipliziere die Gleichungen (2, 2) für verschiedene Werte von $\varkappa$ mit den Koeffizienten der entsprechenden x-Potenzen in $r(x)$ und addiere die so entstehenden Relationen. Dann folgt:

(2, 3) $\quad \delta(x)\, x^m + \gamma(x)\, \varphi(x) = r(x),$

[13]) Dieses Lemma ist ein sehr spezieller Fall eines allgemeineren Reduzibilitätssatzes, vgl. Rychlik (Rychlik 1), läßt sich aber besonders einfach beweisen.

und hierin sind die Bewertungen aller Koeffizienten von $\delta(x)$ *und* $\gamma(x)$ *höchstens gleich* β. Gehören ferner die Koeffizienten von $r(x)$ dem Ring R an, so gilt das gleiche für die Koeffizienten von $\delta(x)$ und $\gamma(x)$. Endlich sind die Gradzahlen von $\delta(x)$ und $\gamma(x)$ höchstens $n-m-1$ bzw. $m-1$. Wir definieren nunmehr sukzessive die Polynome

$$\begin{aligned} \varrho_0(x) &= \varrho(x), \quad \varrho_1(x), \varrho_2(x), \ldots, \varrho_\nu(x), \ldots, \\ b_0(x) &= x^m, \quad b_1(x), b_2(x), \ldots, b_\nu(x), \ldots, \\ c_0(x) &= \varphi(x), \quad c_1(x), c_2(x), \ldots, c_\nu(x), \ldots, \end{aligned}$$

für die

(2, 4) $$c_{\nu+1}(x)\,x^m + b_{\nu+1}(x)\,\varphi(x) = \varrho_\nu(x)$$

und

(2, 5) $$\varrho_{\nu+1}(x) = f(x) - (b_0(x) + \ldots + b_{\nu+1}(x))\,(c_0(x) + \ldots + c_{\nu+1}(x))$$

ist, und zwar sollen hier die Gradzahlen von $\varrho_\nu(x)$, $b_\nu(x)$, $c_\nu(x)$ für $\nu > 0$ kleiner als n, m, $n-m$ sein, während ihre Koeffizienten dem Ring R angehören.

Setzen wir $b_0(x) + \ldots + b_\nu(x) = B_\nu(x)$, und analog $c_0(x) + \ldots + c_\nu(x) = C_\nu(x)$, so nimmt (2, 5) die Gestalt an:

(2, 6) $$\varrho_{\nu+1}(x) = f(x) - B_{\nu+1}(x)\,C_{\nu+1}(x).$$

Um diese Polynomfolgen zu bilden, bestimme man, falls unsere Polynome bis zum Index ν bereits so gebildet sind, daß sie den obigen Forderungen entsprechen, die Polynome $c_{\nu+1}(x)$ und $b_{\nu+1}(x)$ so, daß die Gleichung (2, 4) erfüllt ist und ihre Gradzahlen kleiner als $n-m$ bzw. m sind. Nach der oben an die Formel (2, 3) geknüpften Folgerung läßt sich dies ohne weiteres erreichen, und zwar gehören dabei die Koeffizienten von $c_{\nu+1}(x)$, $b_{\nu+1}(x)$ dem Ringe R an, wenn dies von den Koeffizienten von $\varrho_\nu(x)$ der Fall ist. Nunmehr bestimme man aus (2, 5) $\varrho_{\nu+1}(x)$. Der Grad des so bestimmten Polynoms $\varrho_{\nu+1}(x)$ ist kleiner als m, da die höchsten Glieder von $B_{\nu+1}(x)$, $C_{\nu+1}(x)$ x^m bzw. $a_0 x^{n-m}$ sind und ihr Produkt gerade das höchste Glied $a_0 x^n$ von $f(x)$ ist

Wir behaupten nun, daß die Bewertungen aller Koeffizienten von $\varrho_\nu(x)$, $b_{\nu+1}(x)$, $c_{\nu+1}(x)$ höchstens gleich $\alpha^{\nu+1}$ sind. Für $\nu = 0$ ist dies für $\varrho_0(x)$ nach Voraussetzung klar, und für $b_1(x)$, $c_1(x)$ folgt dies aus der an die Formel (2, 3) geknüpften Betrachtung. Ist nun unsere Behauptung bis zu einem ν richtig, so folgt aus (2, 6)

$$\begin{aligned} \varrho_{\nu+1}(x) = {} & (f(x) - B_\nu(x)\,C_\nu(x)) \\ & - B_\nu(x)\,c_{\nu+1}(x) - C_\nu(x)\,b_{\nu+1}(x) - b_{\nu+1}(x)\,c_{\nu+1}(x), \end{aligned}$$

oder, wegen (2,4) und $b_0(x) = x^m$, $c_0(x) = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} \varrho_{\nu+1}(x) = {} & \varrho_\nu(x) - c_{\nu+1}(x)\,x^m - b_{\nu+1}(x)\,\varphi(x) - (B_\nu(x) - b_0(x))\,c_{\nu+1}(x) \\ & - (C_\nu(x) - c_0(x))\,b_{\nu+1}(x) - b_{\nu+1}(x)\,c_{\nu+1}(x), \end{aligned}$$

und endlich, wegen (2, 4),

$$\varrho_{\nu+1}(x) = -(B_\nu(x) - b_0(x))c_{\nu+1}(x) \\ -(C_\nu(x) - c_0(x))b_{\nu+1}(x) - b_{\nu+1}(x)c_{\nu+1}(x).$$

Da aber die Bewertungen aller Koeffizienten von $b_{\nu+1}(x)$, $c_{\nu+1}(x)$ nach Voraussetzung höchstens gleich $\alpha^{\nu+1}$ sind und die Bewertungen der Koeffizienten $B_\nu(x) - b_0(x)$, $C_\nu(x) - c_0(x)$ höchstens gleich α sind, folgt, daß die Bewertungen aller Koeffizienten von $\varrho_{\nu+1}(x)$ höchstens gleich $\alpha^{\nu+2}$ sind. Da aber aus $\varrho_{\nu+1}(x)$ sich $b_{\nu+2}(x)$ und $c_{\nu+2}(x)$ vermöge einer Relation von der Form (2, 4) bestimmen, gilt nach dem oben Gesagten das gleiche auch für die Koeffizienten von $b_{\nu+2}(x)$ und $c_{\nu+2}(x)$.

Aus dem damit bewiesenen Ergebnis folgt nun, daß $B_\nu(x)$, $C_\nu(x)$ im perfekten Körper K' gegen zwei Polynome $B(x)$, $C(x)$ konvergieren. Denn bildet man die Differenzen $B_\nu - B_\mu$ bzw. $C_\nu - C_\mu$, so sind die Bewertungen der Koeffizienten aller Potenzen von x in diesen Differenzen höchstens gleich α^ν für $\nu \leqq \mu$, und konvergieren daher gegen 0 mit $\nu \to \infty$, $\mu \to \infty$. Da andererseits alle Koeffizienten von $\varrho_{\nu+1}(x)$ mit $\nu \to \infty$ gegen 0 konvergieren, folgt aus (2, 6)

$$f(x) = B(x)C(x),$$

wo $B(x)$ und $C(x)$ Polynome m-ten, bzw. $(n-m)$-ten Grades mit den höchsten Gliedern x^m, bzw. $a_0 x^{n-m}$ sind und die Koeffizienten beider Polynome dem derivierten Ring von R angehören. Damit ist unser Fundamentallemma bewiesen.

8. **Anwendung auf Dirichletsche Reihen und ein Gegenbeispiel.** Insbesondere folgt aus dem Zusatz: Sind die Koeffizienten von $f(x)$ Dirichletsche Reihen aus $D(\Lambda_\nu)$, so gehören auch die Koeffizienten von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ dem Bereich $D(\Lambda_\nu)$ an.

Damit ist aber eine in unserer Arbeit (Ostrowski 4, § 4, Nr. 13) in Aussicht gestellte Verallgemeinerung des dort hergeleiteten Satzes D bewiesen, wie aus den dort am Schlusse des § 4 gemachten Bemerkungen folgt. Wir formulieren das vollständige Resultat, um daran später anknüpfen zu können:

II. *Ist*

$$D_0(s)y^n + D_1(s)y^{n-1} + \ldots + D_n(s) = 0, \qquad D_0(s) \not\equiv 0,$$

ein Polynom n-ten Grades, dessen Koeffizienten formale Dirichletsche Reihen mit Koeffizienten aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper von der Charakteristik 0 *sind, so kann dieses Polynom in der Form dargestellt werden:*

$$D_0(s)\prod_{\nu=1}^{n}(y - \Delta_\nu(s)),$$

wo $\Delta_\nu(s)$ formale Dirichletsche Reihen sind. Dabei lassen sich die Exponenten der Reihen $\Delta_\nu(s)$ nach Multiplikation mit einer festen ganzen Zahl m linear aus den Exponenten der Reihen $D_\nu(s)$ mit ganzen Koeffizienten zu-

sammensetzen, wobei nur gewisse Exponenten der $D_\nu(s)$ aus einem endlichen Vorrat negative Koeffizienten haben können.

Über den Wert des Faktors m werden wir später genaueren Aufschluß bekommen können (vgl. § 8, Nr. 53).

Wir zeigen nun an einem Beispiel, daß der Satz II nicht immer richtig bleibt, wenn als Koeffizienten der Dirichletschen Reihen Größen aus einem Körper von der Charakteristik p angenommen werden.

Es sei p eine Primzahl, Π_p sei die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung des Körpers der Restklassen mod p oder, was dasselbe ist, der größte absolut algebraische Körper mit der Primzahlcharakteristik p. Wir adjungieren zu Π_p alle Potenzen e^{-sr} einer Unbestimmten $x = e^{-s}$ für alle rationalen r und bezeichnen den so entstehenden Körper mit R_p.

Den Körper R_p bewerten wir, indem wir $\frac{1}{e}$ als die Bewertung von e^{-s}, also $\omega(e^{-s}) = 1$ festsetzen. Dann ergibt sich zwangsläufig

$$\omega(e^{-sr}) = r.$$

Alle Größen von Π_p haben dabei die Bewertung 1. Der derivierte Körper Q_p' von R_p' läßt sich dann auffassen als die Gesamtheit aller Potenzreihen in e^{-s} von der Form

$$a_1 e^{-sr_1} + a_2 e^{-sr_2} + \ldots, \tag{2, 7}$$

wo $r_1, r_2, \ldots$ eine beliebig ins Unendliche wachsende Folge rationaler Brüche ist und die Größen a_ν im Körper Π_p liegen.

Der Körper Q_p' ist nun nicht algebraisch abgeschlossen. Denn soll in Q_p' die Gleichung

$$x^p - x - b = 0 \tag{2, 8}$$

für eine Größe

$$b = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-s_\nu s}, \qquad s_\nu \uparrow \infty$$

aus Q_p' eine in Q_p' liegende Lösung von der Form (2, 7) besitzen, so muß identisch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-sps_\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-ss_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-ss_\nu} \tag{2, 81}$$

gelten, daraus folgt aber, wenn wir auf beiden Seiten die Glieder mit negativen Exponenten r_ν vergleichen:

$$\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu e^{-sps_\nu} - \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu e^{-ss_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-ss_\nu}, \tag{2, 9}$$

wo r_ν und s_ν alle negativen unter den Exponenten in (2, 81) durchlaufen. Diese Gleichung ist aber sicher unmöglich, wenn die s_ν so gewählt werden, daß keine der Zahlen $\frac{s_\nu}{s_\mu}$ eine Potenz von p ist. In der Tat folgt unter

dieser Voraussetzung aus (2, 9): $r_m = s_n$. Dann kommt aber links in (2, 9) der Exponent $p r_m = p s_n$ vor. Und da er nach Voraussetzung nicht unter den s_ν vorkommen kann, muß das betreffende Glied sich gegen ein $a_\nu e^{-s r_\nu}$ wegheben, so daß $p s_n$ gleich einem r_{n_1} ist. Dann kommt aber in der ersten Summe links $p r_{n_1} = p^2 s_n$ vor, und da nach Voraussetzung es ein solches s_ν nicht gibt, muß auch $p^2 s_n$ unter den Zahlen r_ν vorkommen. Indem wir so fortfahren, kommen wir zum Schluß, daß die unendlich vielen Zahlen $s_n, p s_n, p^2 s_n, \ldots$ unter den r_ν vorkommen, was der Voraussetzung widerspricht, daß $r_\nu \uparrow \infty$ ist. Daher kann die Gleichung (2, 81) nicht bestehen, wenn es unter den s_ν negative gibt und die Quotienten der verschiedenen negativen unter den s_ν stets von Potenzen von p verschieden sind. Z. B. ist die Gleichung (2, 8) nicht lösbar, wenn es unter den s_ν genau ein negatives gibt.

§ 3.

Relativ perfekte Körper und ihre algebraischen Erweiterungen.

9. Definition der relativ perfekten Körper. *Es sei K' ein bewerteter Körper. Wir nennen K' relativ perfekt, falls jedes Polynom*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

mit ganzen Koeffizienten aus K', für das

$$f(x) \equiv a_0 x^n + \ldots + a_{n-m-1} x^{m+1} + x^m \qquad (K')$$

gilt, mit $n > m > 0$, in K' reduzibel ist. Ist $\mathfrak{p}$ ein solcher Primdivisor eines Körpers K, daß K' bei der $\mathfrak{p}$ entsprechenden Bewertung relativ oder absolut perfekt ist, so nennen wir K *relativ* bzw. *absolut perfekt in bezug auf* $\mathfrak{p}$.

Man kann die Hauptbehauptung des Fundamentallemmas dahin zusammenfassen, daß ein absolut perfekter Körper auch relativ perfekt ist. So ist z. B. nach dem oben Bemerkten $D(\Lambda_\nu)$ relativ perfekt. Aus der Definitionseigenschaft der relativ perfekten Körper folgt weiter:

I. *Ist*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$

ein in einem relativ perfekten bewerteten Körper irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus K', so gilt

$$\|a_\nu\| \leqq \text{Max.}\,(\|a_0\|, \|a_n\|), \qquad (0 < \nu < n). \tag{3, 1}$$

Denn ist (3, 1) nicht erfüllt, und ist, $M = \underset{0 \leqq \nu \leqq n}{\text{Max}} \|a_\nu\|$ gesetzt, $\|a_0\| < M$, $\|a_n\| < M$, und ist m der größte Index ν, für den $\|a_\nu\| = M$ ist, so folgt, daß in K'

$$\frac{f(x)}{a_m} \equiv x^{n-m} + b x^{n-m+1} + \ldots \qquad (K')$$

ist mit $0 < m < n$, so daß $f(x)$ in K' reduzibel sein muß.

10. Die Bewertungsvorschrift für algebraische Erweiterungen relativ perfekter Körper. Es sei nun Q eine algebraische Erweiterung eines relativ perfekten bewerteten Körpers K'. Wir fragen, wie man den Körper Q so bewerten kann, daß die Bewertungen von K' unverändert bleiben. Wir benutzen dabei ein wichtiges Ergebnis von Steinitz (Steinitz 1, S. 206—208), wonach jede algebraische Erweiterung von K' in einer *normalen* algebraischen Erweiterung von K' enthalten ist. — Eine algebraische Erweiterung N von K' heißt *normal*, wenn sämtliche Wurzeln jeder in K' irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus K' in N liegen, sobald in N auch nur eine Wurzel dieser Gleichung liegt; mit anderen Worten, wird durch Adjunktion von N einem in K' irreduziblen Polynom ein Linearfaktor abgespalten, so zerfällt dieses Polynom in N in lauter Linearfaktoren. — Um nun Q zu bewerten, genügt es, eine in bezug auf K' normale algebraische Erweiterung von Q zu bewerten. Wir können daher Q als normal voraussetzen.

Es sei α eine Größe aus Q und

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{3, 2}$$

die in K' irreduzible Gleichung, der α genügt. Wir behaupten dann, daß wir eine Bewertung von Q bekommen, wenn wir als die Bewertung jedes α die zugehörige Zahl $\|a_n\|^{1/n}$ festsetzen. Zunächst ist diese Definition offenbar eindeutig, und dabei behalten die Größen von K' ihre Bewertungen bei, da ja für sie die zugehörigen Gleichungen linear sind. Wir bezeichnen nun die vermöge unserer Festsetzung einem Element α von Q zugeordnete Größe $\|a_n\|^{1/n}$ mit $\varphi(\alpha)$ und wollen beweisen, daß $\varphi(\alpha)$ die charakteristischen Eigenschaften einer Bewertung besitzt. Zuerst zeigen wir, daß

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)$$

ist. Denn genügt α der in K' irreduziblen Gleichung (3, 2) und β der in K' irreduziblen Gleichung

$$x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0, \tag{3, 3}$$

und bildet man

$$\prod_{\substack{\nu = 1, \ldots, n \\ \mu = 1, \ldots, m}} (x - \alpha_\nu \beta_\mu) = P(x),$$

erstreckt über alle Wurzeln α_ν von (3, 2) und alle Wurzeln β_μ von (3, 3), so ist dieses Produkt — ein Polynom mn-ten Grades — eine bestimmte Potenz des in K' irreduziblen Polynoms $F(x)$, dessen Wurzel $\alpha\beta$ ist. Ist nun $P(x) = (F(x))^k$, so gilt $P(0) = (F(0))^k$ und daher

$$\varphi(\alpha\beta) = \|F(0)\|^{k/mn} = \|P(0)\|^{1/mn}.$$

Andererseits ist aber

$$P(0) = \pm \prod_{\substack{\nu = 1, \ldots, n \\ \mu = 1, \ldots, m}} (\alpha_\nu \beta_\mu) = \pm a_n^m b_m^n.$$

Daher ist

$$\varphi(\alpha\beta) = \|a_n\|^{1/n} \cdot \|b_m\|^{1/m} = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta).$$

Um aber

(3, 4) $$\varphi(\alpha + \beta) \leqq \varphi(\alpha) \quad \text{für} \quad \varphi(\alpha) \geqq \varphi(\beta)$$

zu beweisen, genügt es offenbar,

(3, 5) $$\varphi(1 + \gamma) \leqq \varphi(\gamma) \quad \text{für} \quad \varphi(\gamma) \geqq 1$$

zu zeigen, da diese Relation für $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ nach Multiplikation mit $\varphi(\beta)$ in (3, 4) übergeht. (3, 5) ergibt sich aber ohne weiteres: denn genügt γ der in K' irreduziblen Gleichung

(3, 6) $$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

wo

$$\|a_n\| = (\varphi(\gamma))^n \geqq 1$$

ist, so gilt nach dem oben Bemerkten (3, 1) für alle a_ν:

$$\|a_\nu\| \leqq (\varphi(\gamma))^n.$$

Die in K' irreduzible Gleichung, der $1 + \gamma$ genügt, erhält man aber aus (3, 6), wenn man dort $x = y - 1$ einsetzt und nach y ordnet; der letzte Koeffizient dieser Gleichung ist also gleich

(3, 7) $$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots + (-1)^n,$$

und da die Bewertung jedes Summanden von (3, 7) höchstens gleich $\varphi(\gamma)^n$ ist, ist $\varphi(1 + \gamma)^n \leqq \varphi(\gamma)^n$, womit (3, 5) bewiesen ist. Wir sehen:

II. *Jede algebraische Erweiterung eines relativ perfekten bewerteten Körpers K' — mag sie normal sein oder nicht — läßt sich bewerten, indem jedem Element α dieser Erweiterung, das der in K' irreduziblen Gleichung*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

genügt, als Bewertung $\|a_n\|^{1/n}$ zugeordnet wird.

11. Die Einzigkeit der Bewertungsvorschrift. Hieraus folgt weiter:

III. *Es sei*

(3, 2) $$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

eine in einem relativ perfekten bewerteten Körper K' irreduzible Gleichung mit Koeffizienten aus diesem Körper. Dann gilt allgemein:

(3, 8) $$\|a_i\| \leqq \|a_n\|^{i/n}.$$

Denn sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die n Wurzeln von (3, 6), die in einer algebraischen Erweiterung Q von K' liegen, so läßt sich Q so bewerten, daß dabei jeder der n Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Bewertung $\|a_n\|^{1/n}$ zugeordnet wird. Nun ist aber a_i als die i-te elementarsymmetrische Funktion von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Summe von Produkten aus diesen n Größen mit je i Faktoren; jedes dieser Produkte hat daher als Bewertung $\|a_n\|^{i/n}$, und die Bewertung der ganzen Summe, d. h. $\|a_i\|$ kann also $\|a_i\|^{i\,n}$ nicht überschreiten.

Hieraus folgt aber:

IV. *Eine algebraische Erweiterung Q eines relativ perfekten bewerteten Körpers K' läßt sich nur auf eine einzige Weise bewerten, und zwar nach der im Satz II dieses Paragraphen angegebenen Vorschrift.*

Denn ist α ein Element von Q und genügt α der in K' irreduziblen Gleichung (3, 2), so kann $\|\alpha\|$ nicht größer als $\|a_n\|^{1/n}$ sein, da sonst wegen (3, 8) für jedes $\nu > 0$

$$\|a_\nu \alpha^{n-\nu}\| \leqq \|\alpha\|^{n-\nu} \cdot \|a_n\|^{\nu/n} < \|\alpha\|^n$$

wäre, so daß die Summe

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n \tag{3, 9}$$

nicht verschwinden kann, da ja ihre Bewertung gleich der Bewertung von $\alpha^n \neq 0$ wäre. Aus $\|\alpha\| < \|a_n\|^{1/n}$ würde aber ganz analog wegen (3, 8) für jedes $\nu < n$ folgen

$$\|a_\nu \alpha^{n-\nu}\| \leqq \|\alpha^{n-\nu}\| \cdot \|a_n\|^{\nu/n} < \|a_n\|,$$

und die Summe (3, 9) könnte wiederum nicht verschwinden, da das letzte Glied in ihr „überwiegt". — Damit ist gezeigt:

V. *Ist ein Körper K relativ perfekt in bezug auf einen Primdivisor* $\mathfrak{p}$, *so gibt es in jeder algebraischen Erweiterung von K nur einen Primdivisor, durch den* $\mathfrak{p}$ *teilbar ist.*

§ 4.

Algebraische Erweiterungen beliebiger bewerteter Körper.

12. Bewertung normaler Erweiterungen. Es sei nun K' ein *beliebiger* bewerteter Körper, $\mathfrak{p}$ der zugehörige Primdivisor, Q eine algebraische Erweiterung von K'. Wir wollen nun untersuchen, ob und wie Q derart bewertet werden kann, daß die Bewertung von K' dabei unverändert bleibt. — An dieser Forderung, daß die Bewertung von K' unverändert bleibt, werden wir in diesem ganzen Paragraphen festhalten, ohne sie besonders zu erwähnen.

Es sei $\bar{K}'$ der derivierte Körper von K', $\mathfrak{N}$ sei eine normale algebraische Erweiterung von K'. Es sei N die Gesamtheit aller in K' irreduziblen Polynome, die in $\mathfrak{N}$ vollständig zerfallen. Wir bilden dann eine kleinste algebraische Erweiterung K^* von $\bar{K}'$, in der sämtliche Polynome N vollständig zerfallen, und bewerten sie. Diese Erweiterung enthält dann eine bewertete algebraische Erweiterung $\mathfrak{N}^{*\prime}$ von K', die aus K' durch Adjunktion aller in K^* liegenden Wurzeln sämtlicher Polynome von N entsteht und die zu $\mathfrak{N}$ isomorph ist. Bilden wir nun den kleinsten Unterkörper von K^*, der sowohl $\bar{K}'$ als auch $\mathfrak{N}^{*\prime}$ enthält — wir werden ihn in diesem Paragraphen mit $[\bar{K}', \mathfrak{N}]$ bezeichnen —, so hat er also die

Eigenschaft, daß er *erstens* $\bar{K}'$ *enthält und zweitens eine algebraische Erweiterung von* K', *die zu* $\mathfrak{N}$ *isomorph ist, während kein Unterkörper von* $[\bar{K}', \mathfrak{N}]$ *diese Eigenschaft hat.* — K^* ist übrigens mit $[\bar{K}', \mathfrak{N}]$ identisch.

Ordnet man nun allen Elementen von $\mathfrak{N}$ die Bewertungen ihrer Bilder in $\mathfrak{N}^{*\prime}$ zu, so erhält man eine Bewertung von $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ *läßt sich also bewerten.*

Es sei umgekehrt $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$ irgendwie bewertet. Dann bilden wir den derivierten Körper $\bar{\mathfrak{N}}'$ von $\mathfrak{N}'$, der einen zu $\bar{K}'$ analytisch isomorphen Unterkörper $\bar{\bar{K}}'$ besitzt. Es sei dann L' das in $\bar{\mathfrak{N}}'$ liegende bewertete kleinste gemeinsame Vielfache von $\bar{\bar{K}}'$ und $\mathfrak{N}'$. L' entsteht aus dem zu $\bar{K}'$ isomorphen perfekten Körper $\bar{K}'$ durch Adjunktion aller Wurzeln von N und ist daher algebraisch isomorph zu $[\bar{K}', \mathfrak{N}]$. Beziehen wir dabei aber die Elemente von $\bar{K}'$ auf die entsprechenden Elemente von $\bar{\bar{K}}'$, so daß dabei die entsprechenden Elemente gleiche Bewertungen haben, so haben bei jeder isomorphen Beziehung von L' auf $[\bar{K}' \mathfrak{N}]$, die jenen Isomorphismus zwischen $\bar{\bar{K}}'$ und $\bar{K}'$ enthält, die entsprechenden Elemente gleiche Bewertungen, da ja die Bewertungen algebraischer Erweiterungen von perfekten Körpern eindeutig bestimmt sind. Bei dieser Beziehung muß aber das Bild von $\mathfrak{N}'$ gerade $\mathfrak{N}^{*\prime}$ sein, denn beide Körper entstehen ja aus K' durch Adjunktion aller Wurzeln von N. Wir sehen also, daß $\mathfrak{N}'$ zu $\mathfrak{N}^{*\prime}$ analytisch isomorph ist. Da aber $\mathfrak{N}'$ eine beliebige Bewertung von $\mathfrak{N}$ ist, so sehen wir, daß, wenn $\mathfrak{N}$ auf zwei verschiedene Arten bewertet werden kann, die beiden so entstehenden Körper analytisch isomorph sind.

Daraus folgt aber allgemein:

I. *Bewertet man zwei normale algebraische miteinander isomorphe* (eventuell identische) *Erweiterungen* $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$ *eines bewerteten Körpers* K', *so sind die entstehenden bewerteten Körper miteinander analytisch isomorph.* — Denn durch Beziehung von $\mathfrak{N}_1$ auf $\mathfrak{N}$ erhält man eine Bewertung von $\mathfrak{N}$, die mit der gegebenen Bewertung von $\mathfrak{N}_1$ analytisch isomorph ist; die so entstehende Bewertung von $\mathfrak{N}$ ist aber mit jeder anderen Bewertung von $\mathfrak{N}$ wiederum analytisch isomorph.

13. Beliebige algebraische Erweiterungen als Unterkörper von normalen. Es sei Q eine beliebige algebraische Erweiterung des bewerteten Körpers K'. Es sei $\mathfrak{N}$ eine in bezug auf K' normale algebraische Erweiterung von Q.

Bewertet man nun $\mathfrak{N}$, so ist damit eine Bewertung von Q gegeben.

Wir gelangen von neuem zum Satz II, § 3, der hier noch einmal formuliert werden möge:

II. *Jede algebraische Erweiterung* Q *eines bewerteten Körpers kann bewertet werden.*

Wir wollen nun sämtliche Bewertungen von Q aufstellen.

Ist $Q = Q'$ irgendwie bewertet, so gibt es, da $\mathfrak{N}$ eine algebraische Erweiterung von Q ist, eine solche Bewertung von $\mathfrak{N}$, daß dabei alle Elemente von Q ihre Bewertungen beibehalten. Wird der so bewertete Körper $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N}''$ bezeichnet, so ist $\mathfrak{N}''$ nach Satz I mit dem irgendwie als Erweiterung von K' zu $\mathfrak{N}'$ bewerteten Körper $\mathfrak{N}$ analytisch isomorph. Hat man andererseits irgendeine isomorphe Beziehung von $\mathfrak{N}$ auf sich selbst, und ordnet man dabei den Elementen von Q die Bewertungen zu, die ihre Bilder bei der Bewertung von $\mathfrak{N}'$ besitzen, so erhält man eine Bewertung von Q. Wir können unser Resultat folgendermaßen formulieren:

III. *Ist Q eine algebraische Erweiterung von K' und $\mathfrak{N}'$ eine irgendwie bewertete algebraische Erweiterung von Q, die normal in bezug auf K' ist, so erhält man sämtliche Bewertungen von Q, indem man die zu Q isomorphen Unterkörper von $\mathfrak{N}'$ bildet (Q selbst eingeschlossen) und den Elementen von Q die Bewertungen ihrer Bilder als Bewertungen zuordnet.*

Da insbesondere $\mathfrak{M}' = [\bar{K}', \mathfrak{N}]$ einen bewerteten Körper $\mathfrak{N}'$ enthält, kann man im obigen Resultat alle Bewertungen von Q erhalten, indem man die verschiedenen isomorphen Beziehungen von Q auf die Unterkörper von $\mathfrak{M}'$ aufsucht. Wir wollen solche Beziehungen mit Dedekind als *Permutationen von Q in $\mathfrak{M}'$* bezeichnen.

14. Konjugierte Permutationen. Wir wissen also nun, daß jede Bewertung von Q aus einer Permutation von Q in $\mathfrak{M}'$ entsteht, und haben nunmehr festzustellen, wann zwei Permutationen von Q in $\mathfrak{M}'$ auf die gleiche Bewertung von Q führen. Sind I_1, I_2 zwei solche Permutationen, und werden durch sie einem Element α von Q die Elemente α_1 bzw. α_2 von $\mathfrak{M}'$ zugeordnet, so gilt

$$\|\alpha_1\| = \|\alpha_2\|.$$

Ist weiter

$$k_0 \alpha^m + k_1 \alpha^{m-1} + \ldots + k_m$$

eine ganze rationale Funktion von α mit Koeffizienten aus K', so wird sie in

$$k_0 \alpha_1^m + k_1 \alpha_1^{m-1} + \ldots + k_m \quad \text{bzw.} \quad k_0 \alpha_2^m + k_1 \alpha_2^{m-1} + \ldots + k_m$$

übergeführt. Also gilt stets

$$(4, 1) \quad \|k_0 \alpha_1^m + k_1 \alpha_1^{m-1} + \ldots + k_m\| = \|k_0 \alpha_2^m + k_1 \alpha_2^{m-1} + \ldots + k_m\|.$$

Nun liegt in $\mathfrak{M}'$ definitionsgemäß der derivierte Körper $\bar{K}'$ von K'. Es genüge α_1 der in $\bar{K}'$ irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus $\bar{K}'$:

$$\alpha_1^n + l_1 \alpha_1^{n-1} + l_2 \alpha_1^{n-2} + \ldots + l_n = 0,$$

und es sei

$$l_1 = \lim_{i \to \infty} l_1^{(i)}, \; l_2 = \lim_{i \to \infty} l_2^{(i)}, \; \ldots, \; l_n = \lim_{i \to \infty} l_n^{(i)},$$

wo die $l_\nu^{(i)}$ zu K' gehören. Dann folgt

$$0 = \|\alpha_1^n + l_1\alpha_1^{n-1} + \ldots + l_n\| = \lim_{i\to\infty} \|\alpha_1^n + l_1^{(i)}\alpha_1^{n-1} + \ldots + l_n^{(i)}\|.$$

Da aber $l_\nu^{(i)}$ in K' liegen, folgt aus (4, 1)

$$\|\alpha_1^n + l_1^{(i)}\alpha_1^{n-1} + \ldots + l_n^{(i)}\| = \|\alpha_2^n + l_1^{(i)}\alpha_2^{n-1} + \ldots + l_n^{(i)}\|,$$

und daher

$$\|\alpha_2^n + l_1\alpha_2^{n-1} + \ldots + l_n\| = \lim_{i\to\infty} \|\alpha_2^n + l_1^{(i)}\alpha_2^{n-1} + \ldots + l_n^{(i)}\|$$

$$= \lim_{i\to\infty} \|\alpha_1^n + l_1^{(i)}\alpha_1^{n-1} + \ldots + l_n^{(i)}\| = \|\alpha_1^n + l_1\alpha_1^{n-1} + \ldots + l_n\| = 0.$$

Also ist auch

$$\alpha_2^n + l_1\alpha_2^{n-1} + \ldots + l_n = 0,$$

und α_1 *und* α_2 *genügen derselben in* K' *irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus* $\bar{K}'$.

Führen umgekehrt zwei Permutationen I_1, I_2 von Q in $\mathfrak{M}'$ jedes Element α von Q in die Elemente α_1 bzw. α_2 über, die einer und derselben in $\bar{K}'$ irreduziblen Gleichung

$$x^n + l_1 x^{n-1} + \ldots + l_n = 0$$

mit Koeffizienten aus $\bar{K}'$ genügen, so folgt aus $\|\alpha_1\| = \|l_n\|^{1/n} = \|\alpha_2\|$, daß diese Permutationen von Q in $\mathfrak{M}'$ eine und dieselbe Bewertung von Q erzeugen.

Wir wollen nun zwei Permutationen von Q in $\mathfrak{M}'$ *konjugiert in bezug auf* $\bar{K}'$ nennen, wenn jedes Element α von Q auf solche Elemente α_1 bzw. α_2 von $\mathfrak{M}'$ abgebildet wird, welche einer und derselben in $\bar{K}'$ irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus $\bar{K}'$ genügen. Dann ergibt sich schließlich:

IV. *Man erhält alle verschiedenen Bewertungen einer algebraischen Erweiterung* Q *eines bewerteten Körpers* K', *indem man alle Klassen der untereinander in bezug auf* $\bar{K}'$ *konjugierten Permutationen von* Q *in* $\mathfrak{M}' = [\bar{K}', \mathfrak{N}]$ *bildet, wo* $\mathfrak{N}$ *eine in bezug auf* K' *normale algebraische Erweiterung von* Q *ist, und* Q *auf Unterkörper von* $\mathfrak{M}'$ *mit Hilfe je einer Permutation aus jeder Permutationsklasse isomorph bezieht.*

15. Anzahl der Bewertungen für einfache algebraische Erweiterungen. Wir fassen insbesondere den Fall ins Auge, wo Q in bezug auf K' endlich und einfach ist, wo also Q aus K' durch Adjunktion einer in bezug auf K' algebraischen Größe a hervorgeht. Genügt a einer in K' irreduziblen Gleichung

(4, 2) $$x^n + k_1 x^{n-1} + \ldots + k_n = 0$$

mit Koeffizienten aus K' und sind die n in einer in bezug auf K' normalen algebraischen Erweiterung $\mathfrak{N}$ von Q liegenden Wurzeln dieser Gleichung $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so daß die Identität gilt

$$x^n + k_1 x^{n-1} + \ldots + k_n = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n),$$

so erhält man eine Permutation von $Q = K'(a)$ in $\mathfrak{M}'$, indem man dem Element a das Element α_i entsprechen läßt und also dem Körper $K'(a)$ den in $\mathfrak{M}'$ enthaltenen Körper $K'(\alpha_i)$ zuordnet. Umgekehrt entspricht bei jeder K' in Ruhe lassenden Permutation von Q in $\mathfrak{M}'$ dem Element a ein Element von $\mathfrak{M}'$, welches derselben in K' irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus K' wie a genügt, also mit einem der Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, übereinstimmt. Ordnen wir a einmal dem Element α_i zu, das andere Mal dem Element α_k und entspricht diesen beiden Zuordnungen dieselbe Bewertung von $Q = K'(a)$, so genügen α_i und α_k einer und derselben *im derivierten Körper $\bar{K}'$ von K' irreduziblen Gleichung.* Wenn umgekehrt α_i und α_k derselben in $\bar{K}'$ irreduziblen Gleichung genügen, so gilt dasselbe von rationalen Funktionen von α_i bzw. α_k mit Koeffizienten aus K'. Daher führen sie nach dem Obigen zu derselben Bewertung von Q. Zusammenfassend gilt:

V. *Ist $Q = K'(a)$ eine einfache algebraische Erweiterung des bewerteten Körpers K', und ist a eine Wurzel des in K' irreduziblen Polynoms $f(x)$ mit Koeffizienten aus K', so ist die Anzahl aller Bewertungen von Q gleich der Anzahl der verschiedenen irreduziblen Faktoren, in die $f(x)$ im derivierten Körper $\bar{K}'$ von K' zerfällt.*

Es sei noch folgendes bemerkt: Adjungiert man zu K' ein in bezug auf K' algebraisches Element a, so kann man aus der Bewertung von $Q = K'(a)$ schließen, welcher in K' irreduziblen Gleichung a genügt, da diese Gleichung offenbar durch diejenige ganze Funktion niedrigsten Grades in a mit Koeffizienten aus K' gegeben wird, deren Bewertung verschwindet. Zugleich mit dem bewerteten Körper $Q' = K'(a)$ ist aber auch der derivierte Körper $\bar{Q}'$ von Q' gegeben, welcher $\bar{K}'$ enthält, also ist zugleich auch die im derivierten Körper $\bar{K}'$ von K' irreduzible Gleichung gegeben, der a genügt. Wir sehen daraus und aus dem obigen Resultat, daß die Wahl einer bestimmten unter den für $Q = K'(a)$ möglichen Bewertungen auf die Festsetzung hinausläuft, welcher von den irreduziblen Gleichungen, in die die in K' irreduzible Gleichung für a im derivierten Körper $\bar{K}'$ von K' zerfällt, wir a als Wurzel zuweisen wollen.

Natürlich kann als die oben und später benutzte in bezug auf K' normale algebraische Erweiterung $\mathfrak{N}$ von Q einfach die Norm (genauer: eine Norm) von Q in bezug auf K' benutzt werden.

16. Zerlegungskörper als Ersatz für den derivierten Körper. Zerlegungsgruppe. Man kann offenbar das oben hergeleitete Ergebnis so

formulieren, daß dabei der derivierte Körper $\bar{K}'$ nicht direkt benutzt wird. Denn normieren wir das dort benutzte Polynom $f(x)$, ebenso wie alle Faktoren dieses Polynoms so, daß jedesmal die höchsten Koeffizienten gleich 1 sind, so müssen alle Koeffizienten der Faktoren von $f(x)$ Polynome in den Wurzeln von $f(x)$ sein, also jedenfalls in einer irgendwie bewerteten in bezug auf K' normalen algebraischen Erweiterung $\mathfrak{N}'$ von Q liegen. Wir brauchen also eigentlich nicht den ganzen Körper $\bar{K}'$ zu adjungieren, sondern nur den größten Unterkörper von $\bar{K}'$, der einem Unterkörper von $\mathfrak{N}$ isomorph ist. Anders ausgedrückt, genügt es, den größten Unterkörper $\mathfrak{Z}'$ von $\mathfrak{N}'$ zu adjungieren, dessen Elemente sich als Grenzwerte der Größen aus K' darstellen lassen. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß dieser Unterkörper *erst dann festgelegt ist, wenn eine feste Bewertung $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$* zugrunde gelegt wurde.

Wir können dies auch folgendermaßen formulieren: es entspreche der Bewertung K' von K ein Primteiler $\mathfrak{S}$. Jeder Bewertung von $\mathfrak{N}$ entspricht dann ein Primteiler $\mathfrak{S}^{(\nu)}$, der ein Teiler von $\mathfrak{S}$ ist. Wählen wir eine feste, einem solchen Primteiler $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ entsprechende Bewertung $\mathfrak{N}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{N}$, so ist damit zugleich der größte Unterkörper $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{N}$ festgelegt, dessen Elemente bei der Bewertung $\mathfrak{N}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{N}$ Grenzwerte der Elemente von K' sind. Und da bei verschiedenen Automorphien von $\mathfrak{N}$ die Primteiler $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ unter sich vertauscht werden, sind auch die Unterkörper $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ unter sich gleichberechtigt, aber im allgemeinen verschieden. Nach Adjunktion eines solchen Körpers $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ zerfällt dann eine in K' irreduzible Gleichung, der a genügt, bereits in Faktoren, die auch nach dem Übergang zum derivierten Körper irreduzibel bleiben, und die Anzahl von verschiedenen unter diesen Faktoren ist zugleich die Anzahl der verschiedenen Bewertungen von $Q = K'(a)$. Die Gruppierung von Wurzeln aber, die zu einzelnen in $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ (oder $\bar{K}'$) irreduziblen Faktoren gehören, hängt von $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ ab.

Genau die gleichen Überlegungen gelten aber auch, wenn Q eine beliebige, nicht notwendig endliche, algebraische Erweiterung von K' und $\mathfrak{N}$ eine in bezug auf K' normale algebraische Erweiterung von Q ist. Wir legen dann irgendeine Bewertung $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$ fest und betrachten den Unterkörper $\mathfrak{Z}'$ von $\mathfrak{N}'$, der alle Größen aus $\mathfrak{N}'$ enthält, die zugleich Grenzwerte von Größen aus K' sind. Wir wollen $\mathfrak{Z}'$ als einen *Zerlegungskörper* von $\mathfrak{N}$ in bezug auf K' bezeichnen[14]). Dann kann man die im

[14]) Die von Herrn Hensel in der Abhandlung (Hensel 2) benutzte Bezeichnung „Zerlegungskörper einer Gleichung" hat mit den oben definierten Zerlegungskörpern nichts zu tun. Bei Herrn Hensel bedeutet ein Zerlegungskörper einer Gleichung $f(x) = 0$ eine Erweiterung des Koeffizientenkörpers, die zur vollständigen Zerfällung von $f(x)$ gerade hinreicht (Steinitz 1, § 8).

Satz IV benutzten, in bezug auf $\bar{K}'$ konjugierten Permutationen von Q in $\mathfrak{N}'$ ersetzen durch die in bezug auf $\mathfrak{Z}'$ konjugierten Permutationen von Q in $\mathfrak{N}'$. Nennen wir nämlich zwei Permutationen von Q in $\mathfrak{N}'$ konjugiert in bezug auf $\mathfrak{Z}'$, wenn durch diese Permutationen jedes Element von Q in solche Elemente übergeführt wird, welche ein und derselben in $\mathfrak{Z}'$ irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{Z}'$ genügen, so können wir das obige Ergebnis folgendermaßen formulieren:

VI. *Es sei Q eine algebraische Erweiterung eines bewerteten Körpers K', $\mathfrak{N}'$ eine irgendwie bewertete in bezug auf K' normale algebraische Erweiterung von Q und $\mathfrak{Z}'$ der Zerlegungskörper von $\mathfrak{N}'$ in bezug auf K'. Man nenne zwei Permutationen von Q in $\mathfrak{N}'$ konjugiert, wenn die beiden Elemente von $\mathfrak{N}'$, in die durch diese Permutationen ein beliebiges Element von Q übergeführt wird, stets Wurzeln eines und desselben, in $\mathfrak{Z}'$ irreduziblen Polynoms sind. Wendet man dann auf Q je eine Permutation aus jeder Klasse der in bezug auf $\mathfrak{Z}'$ konjugierten Permutationen von Q in $\mathfrak{N}'$ an, so liefert jede sich dabei ergebende Zuordnung von Bewertungen eine neue Bewertung von Q als Erweiterung von K', und so ergeben sich sämtliche Bewertungen von Q als Erweiterung von K'.*

Wir lassen nun im Satz VI insbesondere Q mit $\mathfrak{N}$ zusammenfallen. Dann bilden die Permutationen von $\mathfrak{N}$ in sich, die mit der identischen Permutation in $\mathfrak{N}'$ konjugiert sind, eine Gruppe H, die in der Gruppe G aller K invariant lassenden Permutationen von $\mathfrak{N}$ in sich als Untergruppe enthalten ist. Die Elemente von H führen nun jedes Element von $\mathfrak{N}$ in ein anderes über, das derselben in $\mathfrak{Z}'$ irreduziblen Gleichung genügt. Dann muß insbesondere auch jedes Element von $\mathfrak{Z}'$ in sich übergeführt werden, und dies ist auch ausreichend. Daher ist H die Gruppe derjenigen Permutationen von $\mathfrak{N}$ in sich, die jedes Element von $\mathfrak{Z}'$ unverändert läßt. Ist der Index von H in G etwa j, und sind

$$H = H_1, H_2, \ldots, H_j$$

die „Nebengruppen" von H innerhalb G, so gibt es genau j verschiedene Primdivisoren von $\mathfrak{N}$ und sämtliche Permutationen einer Nebengruppe $H_\varkappa$ führen den $\mathfrak{N}'$ entsprechenden Primdivisor $\mathfrak{P}$ in einen festen Primdivisor von $\mathfrak{N}$ über. Die Gruppe H kann also auch als die Gruppe aller Permutationen von $\mathfrak{N}$ bezeichnet werden, die die Bewertung $\mathfrak{N}'$, d. h. den Primdivisor $\mathfrak{P}$ invariant läßt. Wir bezeichnen sie als die *Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{N}'$ bzw. $\mathfrak{P}$.*

17. Reduzierte Zerlegungkörper. Man kann aber, falls es sich um Körper von der Charakteristik p handelt, die oben benutzten Zerlegungskörper oft auch durch gewisse ihrer Unterkörper ersetzen. Denn ist $\mathfrak{Z}'$ der Zerlegungskörper einer irgendwie bewerteten normalen algebraischen

Erweiterung $\mathfrak{N}'$ von K', die eine algebraische Erweiterung Q von K' enthält, so haben wir zwei Permutationen I_1, I_2 von Q in $\mathfrak{N}'$ konjugiert in bezug auf $\mathfrak{Z}'$ genannt, wenn für jedes α aus Q die Bilder α_1, α_2 von α vermöge I_1, I_2 derselben in $\mathfrak{Z}'$ irreduziblen Gleichung

$$x^n + l_1 x^{n-1} + \ldots + l_n = 0 \tag{4, 3}$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{Z}'$ genügen. Es sei nun $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ der Unterkörper von $\mathfrak{Z}'$, der aus allen in bezug auf K' algebraischen Größen *erster Art* aus $\mathfrak{Z}'$ besteht. Wir behaupten, daß zwei in bezug auf $\mathfrak{Z}'$ konjugierte Permutationen von Q in $\mathfrak{N}'$ bereits in bezug auf $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ konjugiert sind, d. h. daß die Bilder α_1, α_2 von α der gleichen in bezug auf $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ genügen. Dies folgt sofort daraus, daß es im Unterkörper $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ von $\mathfrak{Z}'$ nur ein irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ und dem höchsten Koeffizienten 1 gibt, das durch die linke Seite von (4, 3) teilbar ist. Nun gilt aber auch die Umkehrung: *genügen die Bilder α_1, α_2 einer Größe α aus Q vermöge zweier Permutationen I_1, I_2 von Q in $\mathfrak{N}'$ einer und derselben in $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ irreduziblen Gleichung $f(z) = 0$, so genügen sie auch einer und derselben in $\mathfrak{Z}'$ irreduziblen Gleichung.* Denn ist

$$f(z) \equiv g(z^{p^e}),$$

wo $g(z)$ ein Polynom erster Art und gleichfalls in $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ irreduzibel ist, so behaupten wir, daß $f(z)$ nach Adjunktion von Größen zweiter Art aus $\mathfrak{Z}'$, die nicht in $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ liegen, nur so zerfallen kann, daß es dann zu einer p-ten Potenz wird:

$$f(z) = (f^*(z))^{p^t}, \tag{4, 4}$$

und dann genügen α_1 und α_2 der gleichen in $\mathfrak{Z}'$ irreduziblen Gleichung $f^*(z) = 0$. Unsere Behauptung ergibt sich aber so:

Adjungiert man zu $\mathfrak{Z}'$ die p^e-ten Wurzeln aus allen Koeffizienten von $g(z)$, so wird im neuen Körper $\mathfrak{K}$ jedenfalls

$$f(z) = (f_1(z))^{p^e},$$

und wenn wir gezeigt haben, daß $f_1(z)$ in $\mathfrak{K}$ irreduzibel ist, ist auch die obige Behauptung erwiesen. Es sei nun ein Teiler von $f_1(z)$:

$$f_2(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$$

in $\mathfrak{K}$ irreduzibel, und $m \leqq n$, wo n der Grad von $g(z)$ ist. Es sei γ eine Wurzel von $f_2(z)$. Da $a_1, \ldots, a_m$ Größen zweiter Art in bezug auf $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ sind, gibt es sicher ein $e_1 \geqq e$, so daß $a_1^{p^{e_1}}, \ldots, a_m^{p^{e_1}}$ zu $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ gehören. Dann muß das Polynom

$$z^m + a_1^{p^{e_1}} z^{m-1} + \ldots + a_m^{p^{e_1}} \tag{4, 5}$$

Koeffizienten aus $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ haben und dort irreduzibel sein, weil es sogar in $\mathfrak{R}$ irreduzibel bleibt (Steinitz 1, § 13, Satz 2). Daher hat die Wurzel $\gamma^{p^{e_1}}$ von (4, 5) den Grad m in bezug auf $\mathfrak{Z}^{*\prime}$. Andererseits ist $\gamma^{p^{e_1}} = (\gamma^{p^e})^{p^{e_1-e}}$ und da γ^{p^e} den Grad n in bezug auf $\mathfrak{Z}^*$ hat, als eine Wurzel von $g(z)$, gilt dasselbe für $(\gamma^{p^e})^{p^{e_1-e}}$ (Steinitz 1, § 13, Satz 5). Daher muß $n = m$ sein, und $f_1(z)$ ist in K irreduzibel, wie behauptet.

Nennen wir $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ den *reduzierten* Zerlegungskörper von $\mathfrak{N}'$ in bezug auf K', so erhalten wir:

VII. *Im Satz VI darf, wenn K' von der Primzahlcharakteristik p ist, der Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}'$ von $\mathfrak{N}'$ in bezug auf K' durch den reduzierten Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ von $\mathfrak{N}'$ in bezug auf K' ersetzt werden.*

Im Falle der Charakteristik 0 fällt der reduzierte Zerlegungskörper mit dem gewöhnlichen zusammen. Nach Satz VII kann insbesondere die Zerlegungsgruppe H von $\mathfrak{N}'$ auch dadurch definiert werden, daß sie sämtliche Elemente des reduzierten Zerlegungskörpers $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ von $\mathfrak{N}'$ in sich überführt. Ist $\mathfrak{M}$ die größte zwischen K und $\mathfrak{N}$ enthaltene Erweiterung erster Art von K, so ist die Gruppe G aller sämtliche Elemente von K invariant lassenden Permutationen von $\mathfrak{N}$ in sich zugleich die entsprechende Gruppe aller Permutationen von $\mathfrak{M}$ in sich. Da aber auf $\mathfrak{M}$ als eine Erweiterung erster Art von K die Galoissche Theorie anwendbar ist, folgt, daß jedes Element von $\mathfrak{M}$, das durch die Gruppe H invariant gelassen wird, zu $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ gehört. Zugleich ist der Grad von $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{Z}^*$ gleich der Ordnung der Gruppe H, während der Grad von $\mathfrak{Z}^*$ in bezug auf K gleich dem Index j von H in bezug auf G ist und damit also auch gleich der Anzahl der verschiedenenen Primdivisoren von $\mathfrak{N}$, die den K' entsprechenden Primdivisor von K teilen.

18. Partialgrad und erster Defekt für einfache Erweiterungen. Ist im Satze V $Q = K'(a)$ eine Erweiterung *erster Art* von K', und ist $\mathfrak{p}$ der der Bewertung K' entsprechende Primdivisor von K, so mögen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ die nach V in Q liegenden Primteiler von $\mathfrak{p}$ sein. Jedem solchen Primteiler $\mathfrak{P}_\varkappa$ entspricht ein in $\bar{K}'$ irreduzibler Teiler $f_\varkappa(x)$ des in K' irreduziblen Polynoms $f(x)$ mit Koeffizienten aus K' mit $f(a) = 0$. Es sei $n_\varkappa$ allgemein der Grad von $f_\varkappa(x)$. Da nun $f(x)$ ein Polynom erster Art ist und daher lauter verschiedene Wurzeln hat, so muß

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \tag{4, 6}$$

sein, wo n der Grad von $f(x)$, d. h. der Grad von Q in bezug auf K ist. Benutzt man die oben eingeführten Zerlegungskörper irgendeiner normalen Erweiterung $\mathfrak{N}$ von Q in bezug auf die Primdivisoren von $\mathfrak{P}_\varkappa$ aus $\mathfrak{N}$, so ist $n_\varkappa$ der Grad von a in bezug auf einen beliebigen solchen zu $\mathfrak{P}_\varkappa$ gehörenden Zerlegungskörper und ebenso auch, da $f(x)$ von der ersten Art

ist, in bezug auf einen beliebigen zu einem in $\mathfrak{N}$ liegenden Primdivisor von $\mathfrak{P}_\varkappa$ gehörenden *reduzierten* Zerlegungskörper. Wir bezeichnen $n_\varkappa$ als den *Partialgrad* von $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf p.

Ist andererseits im Falle der Primzahlcharakteristik p $Q = K'(a)$ eine *Radikalerweiterung* von K', so daß jede Größe γ aus Q einer Gleichung genügt

$$\gamma^{p^g} = c$$

mit c aus K', so ist offenbar die Bewertung von γ gleich $\|c\|^{p^{-g}}$ und also eindeutig festgelegt, so daß es in Q nur einen Primdivisor $\mathfrak{P}$ gibt, durch den p teilbar ist. Die a definierende Gleichung aber kann natürlich im derivierten Körper $\bar{K}'$ von K' weiter zerfallen, ihre linke Seite $f(x)$ wird dann eine Potenz eines in $\bar{K}$ irreduziblen Polynoms $f_1(x)$, deren Exponent eine Potenz $\delta = p^d$ von p ist. Wir bezeichnen in diesem Falle den Grad von Q in bezug auf K' wiederum als den *Partialgrad*, den Grad von $f_1(x)$ als den *reduzierten Partialgrad*, und endlich p^d als den *ersten Defekt* von $\mathfrak{P}$ in bezug auf p.

Der *Partialgrad* von $\mathfrak{P}$ in bezug auf p ist in diesem Falle der Grad von a relativ zu einem reduzierten Zerlegungskörper in bezug auf einen Primdivisor von $\mathfrak{P}$ aus einer relativ zu K normalen algebraischen Erweiterung von Q, während der *reduzierte Partialgrad* von $\mathfrak{P}$ in bezug auf p der Grad von a in bezug auf einen gewöhnlichen Zerlegungskörper eines Primdivisors von $\mathfrak{P}$ ist.

19. Partialgrad und erster Defekt für beliebige endliche Erweiterungen. Ist nun Q eine beliebige endliche algebraische Erweiterung eines Körpers K vom Grade n, und entspricht einem Primdivisor p von K die Bewertung K', so sei $\mathfrak{P}$ ein Primdivisor von Q, der p teilt. Ist $\mathfrak{N}$ eine in bezug auf K normale algebraische Erweiterung von Q, so sei $\mathfrak{P}^*$ ein Primteiler von $\mathfrak{N}$, der in $\mathfrak{P}$ aufgeht und $\mathfrak{N}'$ die entsprechende Bewertung von $\mathfrak{N}$. Ist dann $\mathfrak{Z}$ der Zerlegungskörper von $\mathfrak{N}'$, so bezeichnen wir den Grad von Q in bezug auf $\mathfrak{Z}$ als den *reduzierten Partialgrad von* $\mathfrak{P}$ *in bezug auf* p. Ebenso bezeichnen wir den Grad von Q in bezug auf den reduzierten Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}_0$ von $\mathfrak{N}'$ als den *Partialgrad von* $\mathfrak{P}$ *in bezug auf* p. Endlich soll der Quotient des Partialgrades durch den reduzierten Partialgrad als der *erste Defekt von* $\mathfrak{P}$ *in bezug auf* p bezeichnet werden. Für einfache Erweiterungen deckt sich unsere jetzige Definition mit der obigen.

Der so definierte Partialgrad bzw. reduzierte Partialgrad ist nun unabhängig von der Wahl des Körpers $\mathfrak{N}$. Denn ist $\mathfrak{N}_1$ eine andere in bezug auf K normale algebraische Erweiterung von Q, so gibt es eine in bezug auf K normale algebraische Erweiterung $\mathfrak{N}^*$ von Q, deren gewisse

Unterkörper zu $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$ isomorph sind. Es genügt dann zu beweisen, daß Partialgrad und reduzierter Partialgrad sich nicht ändern, wenn man $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{N}^*$ ersetzt, und hier darf $\mathfrak{N}^*$ als eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ betrachtet werden, und ebenso die hier in Betracht kommenden Zerlegungskörper von $\mathfrak{N}^*$ als Erweiterungen der entsprechenden Zerlegungskörper von $\mathfrak{N}$. Würde aber sich durch Adjunktion von Zerlegungskörpern von $\mathfrak{N}^*$ eine weitere Graderniedrigung ergeben, so müßte sie sich erst recht einstellen, wenn man den in einer Erweiterung von $\mathfrak{N}^*$ liegenden derivierten Körper $\overline{K}'$ von K' bzw. alle in diesem Körper enthaltenen in bezug auf K' algebraischen Größen erster Art adjungiert. Alle Größen aus $\overline{K}'$ aber, deren Adjunktion eine Graderniedrigung von Q' in bezug auf K' bewirkt, müssen bereits in jeder in bezug auf K' normalen Erweiterung von Q' stecken, die zugleich mit $\overline{K}'$ in einem umfassenderen Körper enthalten ist. Und eine solche Erweiterung ist ja $\mathfrak{N}'$.

Es gilt nun:

VIII. *Es sei Q eine endliche algebraische Erweiterung von K, Q_1 eine endliche algebraische Erweiterung von Q.* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ *seien Primdivisoren von K, Q, Q_1, derart, daß $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{P}$ aufgeht. Sind nun ν, ν^*; ν_1, ν_1^*; N, N^* die Partialgrade, bzw. reduzierten Partialgrade von $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}_1$ in bezug auf $\mathfrak{P}$, endlich $\mathfrak{P}_1$ in bezug $\mathfrak{p}$, so gilt*

$$N = \nu\,\nu_1, \quad N^* = \nu^*\,\nu_1^*. \tag{4, 7}$$

Denn ist etwa $\mathfrak{N}$ die Norm von Q_1 in bezug auf K und bewerten wir sie zu $\mathfrak{N}'$, entsprechend einem Primteiler von $\mathfrak{P}_1$, so seien $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}_0'$ der zugehörige Zerlegungskörper bzw. reduzierte Zerlegungskörper. Da dann ν, ν_1, N bzw. ν^*, ν_1^*, N^* als relative Gradzahlen der kleinsten gemeinsamen Multipla von K, Q, Q_1 mit $\mathfrak{Z}$ bzw. $\mathfrak{Z}_0$ aufgefaßt werden können, folgt die Behauptung aus dem Steinitzschen Satz über die Multiplikation von Relativgraden (Steinitz, 1, S. 200).

Es seien nun $\mathfrak{P}_\varkappa\,(\varkappa = 1, 2, \ldots k)$ die verschiedenen in $\mathfrak{p}$ aufgehenden Primdivisoren von Q, $n_\varkappa$, $n_\varkappa^*$, $\delta_\varkappa'$ ihre Partialgrade, reduzierte Partialgrade, bzw. erste Defekte in bezug auf $\mathfrak{p}$.

Es sei Q_0 die größte in Q enthaltene Erweiterung erster Art von K und es seien $n^{(0)}$, p^f die Grade von Q_0 in bezug auf K und von Q in bezug auf Q_0. Es seien ferner $\mathfrak{P}_\varkappa^{(0)}$ die Primdivisoren von Q_0, die in $\mathfrak{P}$ aufgehen und resp. $\mathfrak{P}_\varkappa$ enthalten, und $n_\varkappa^{(0)}$ ihre Partialgrade in bezug auf $\mathfrak{p}$. Da Q_0 von der ersten Art in bezug auf K ist, gilt

$$n_1^{(0)} + \ldots + n_\varkappa^{(0)} = n^{(0)}. \tag{4, 8}$$

Da aber die Partialgrade von $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{P}_\varkappa^{(0)}$ alle gleich p^f sind, folgt aus (4, 8) durch Multiplikation mit p^f:

IX. *Enthält ein Primdivisor* $\mathfrak{p}$ *eines Körpers* K *in einer endlichen Erweiterung* Q *von* K *vom Grade* n *die Primdivisoren* $\mathfrak{P}_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ *und keine anderen, und sind die Partialgrade, reduzierte Partialgrade und erste Defekte von* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *etwa* $n_\varkappa$, $n_\varkappa^*$, $\delta_\varkappa'$, *so gilt:*

$$(4, 9) \qquad n_\varkappa = \delta_\varkappa' n_\varkappa^*, \quad n = \sum_{\varkappa=1}^{k} n_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{k} \delta_\varkappa' n_\varkappa^*.$$

20. Unabhängigkeit nicht äquivalenter Primdivisoren. Es seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1$ zwei nicht äquivalente Primdivisoren eines Körpers K und $\omega(a)$, $\omega_1(a)$ ihre Ordnungsfunktionen. Dann gibt es in K zwei Größen x und y derart, daß die Determinante

$$(4, 9\,1) \qquad \begin{vmatrix} \omega(x), & \omega_1(x) \\ \omega(y), & \omega_1(y) \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Wir ordnen nun jedem Potenzprodukt $x^\mu y^\nu$ mit ganzen rationalen μ, ν einen Punkt in der (ξ, η)-Ebene mit den Koordinaten $\xi = \mu\omega(x) + \nu\omega(y)$, $\eta = \mu\omega_1(x) + \nu\omega_1(y)$ zu und bezeichnen diesen Punkt zugleich als $P_{\mu,\nu}$. Die Punkte $P_{\mu,\nu}$ bilden dann wegen (4, 9 1) ein Gitter. Es sei nun $P_{\mu,\nu}$ ein Punkt dieses Gitters mit den Koordinaten $\xi, -\eta$, wo $\xi > 0 > -\eta$ ist. Dann hat $a = \dfrac{1}{1 + x^\mu y^\nu}$ in bezug auf $\mathfrak{p}$ die Ordnung Null und in bezug auf $\mathfrak{p}_1$ die Ordnung $\eta > 0$. Ebenso gibt es in K eine Größe a_1 mit $\omega(a_1) > 0$, $\omega_1(a_1) = 0$. Dann gilt für die Größe $e = \dfrac{a}{a + a_1}$

$$e \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^\delta}, \quad e \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\varepsilon}, \quad \varepsilon, \delta > 0.$$

Es seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$, $k \geqq 1$, $k+1$ paarweise nicht äquivalente Primdivisoren von K, $\omega(x), \omega_1(x), \ldots, \omega_k(x)$ ihre Ordnungsfunktionen. Wir behaupten, daß es ein e in K gibt, wofür $\omega(1-e), \omega_1(e), \ldots, \omega_k(e)$ positiv sind. Es darf angenommen werden, daß $k > 1$ und die Behauptung für $k-1$ richtig ist. Es sei für e_1, e_2 aus K

$$\omega(1 - e_1) > 0, \ \omega_2(e_1) > 0, \ \omega_3(e_1) > 0, \ \ldots, \ \omega_k(e_1) > 0,$$
$$\omega(1 - e_2) > 0, \ \omega_1(e_2) > 0, \ \omega_3(e_2) > 0, \ \ldots, \ \omega_k(e_2) > 0.$$

Dann hat offenbar eine der drei Größen die verlangten Eigenschaften:

$$e_1 e_2, \quad \frac{e_1}{1 + e_1(1 - e_1)}, \quad \frac{e_2}{1 + e_2(1 - e_2)},$$

nämlich für $\omega_1(e_1) \geqq 0$, $\omega_2(e_2) \geqq 0$ die erste, für $\omega_1(e_1) < 0$ die zweite, für $\omega_2(e_2) < 0$ die dritte.

Ist nun A positiv beliebig groß, so ist für ein ganzes $n > 0$

$$e^n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\varkappa^A}, \ (\varkappa = 1, \ldots, k), \quad e^n \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\varepsilon}.$$

Sodann gibt es aber ein ganzes positives m mit

$$1 - (1 - e^n)^m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^A}, \quad 1 - (1 - e^n)^m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\varkappa^A}, \ (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

X. *Sind* $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\varkappa$, $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ *paarweise nicht äquivalente Primdivisoren eines Körpers* K, *so gibt es für ein beliebig großes positives* A *in* K *eine Größe* α *mit*

(4, 9 1 0) $\qquad \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^A}, \ \alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\varkappa^A}, \ (\varkappa = 1, \ldots, k).$

Wir beweisen nun:

XI. *Es seien* $\mathfrak{p}_\varkappa$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ *verschiedene paarweise nicht äquivalente Primdivisoren eines Körpers* K, $\omega_\varkappa(a)$ *die zugehörigen Ordnungsfunktionen.* B *sei eine beliebig große positive Zahl,* $c_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ *seien* k *beliebige Größen aus* K, *dann gibt es in* K *ein* γ *mit*

(4, 9 2) $\qquad \gamma \equiv c_\varkappa \pmod{\mathfrak{p}_\varkappa^B}, \ (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$

Für $B > \omega_\varkappa(c_\varkappa)$ *gilt*

(4, 9 3) $\qquad \omega_\varkappa(\gamma) = \omega_\varkappa(c_\varkappa)$ [15]).

Es sei A eine beliebig große positive Zahl. Dann gibt es in K $\alpha_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, so daß jedes $\alpha_\varkappa \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\varkappa^A}$ und teilbar durch $\mathfrak{p}_\lambda^A$ für alle $\lambda \neq \varkappa$ ist. Es sei $C < \omega_\varkappa(c_\varkappa)$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$. Für $A > B - C$ bilden wir wie oben entsprechende Größen $\alpha_\varkappa$. Dann gilt (4, 9 2) für

$$\gamma = \sum_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa \alpha_\varkappa.$$

§ 5.

Relativ perfekte Körper und universelle Zerlegungskörper.

21. Algebraische Erweiterungen relativ perfekter Körper. Das im letzten Paragraphen gefundene Ergebnis benutzt einen *absolut perfekten* Körper, nämlich den derivierten Körper $\bar{K}'$ von K'. Wir wollen nun im folgenden untersuchen, inwiefern hier die Benutzung der derivierten Körper, wie überhaupt die Einführung idealer Limes, vermieden werden kann. Diese Untersuchung verbinden wir mit der allgemeinen Diskussion perfekter Körper. Dabei benutzen wir die Sätze über das Newtonsche Diagramm in allgemein bewerteten Körpern, die wir kürzlich (in O. 4, S. 121—126)

---

[15]) Eine speziellere Formulierung des Satzes XI findet sich bei Krull (Krull 3, S. 227), und zwar behauptet Krull erstens die Existenz eines Elements in K, das in bezug auf endlich viele paarweise nicht äquivalente Primdivisoren beliebig vorgegebene Ordnungszahlen hat, sofern diese Ordnungszahlen in bezug auf die zugehörigen Primdivisoren überhaupt auftreten können. Die Kongruenz (4, 9 2) dagegen wird nur nach positiven, aber unbestimmt kleinen Potenzen der Primdivisoren $\mathfrak{P}$ behauptet. Krull führt seinen Beweis nicht vollständig aus und verweist für den ersten Teil seiner Behauptung auf den in einer früheren Arbeit (Krull 2, S. 154 f.) skizzierten Beweis für den Fall diskreter Bewertungen. Der Krullsche Beweis scheint von dem oben angegebenen verschieden zu sein, da die einzelnen Behauptungen bei Krull anscheinend in ganz anderer Reihenfolge hergeleitet werden. Doch benutzt auch Krull einen Kunstgriff, der mit unserer Konstruktion von $a = \dfrac{1}{1 + x^u y^v}$ wohl im Prinzip äquivalent ist.

in Verallgemeinerung gewisser Ergebnisse von G. Dumas[16]) aufgestellt und bewiesen haben.

Ist nämlich

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$

und tragen wir im rechtwinkligen (ν, ω)-Koordinatensystem die $n+1$ Punkte $P_\nu (\nu, \omega(a_\nu))$ auf, so liegt dieses Punktsystem auf und oberhalb eines gewissen nach unten konvexen Streckenzuges, dessen Eckpunkte gewisse Punkte P_ν sind. Diesen Streckenzug nennen wir das *Newtonsche Diagramm* von $f(x)$. Ist insbesondere das Newtonsche Diagramm *gradlinig* — reduziert es sich auf eine Strecke —, so sind die Punkte P_0, P_n die beiden Endpunkte dieser Strecke, und alle übrigen Punkte P_ν liegen oberhalb oder auf der Strecke $P_0 P_n$. Dann muß, $\omega(a_\nu) = \omega_\nu$ gesetzt,

$$\frac{\omega_\nu - \omega_0}{\nu} \geqq \frac{\omega_n - \omega_0}{n}, \qquad \left\| \frac{a_\nu}{a_0} \right\| \leqq \left\| \frac{a_n}{a_0} \right\|^{\frac{\nu}{n}}$$

sein. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so ist das Newtonsche Diagramm *gebrochen*, es besteht aus wenigstens zwei Strecken verschiedener Steigung. Der in § 3 bewiesene Satz III läuft nun offenbar darauf hinaus, daß das Newtonsche Diagramm eines in einem relativ perfekten Körper irreduziblen Polynoms stets gradlinig sein muß, so daß *in einem relativ perfekten Körper ein Polynom mit einem gebrochenen Diagramm stets reduzibel ist.* Und dieses kann direkt als *Definition* eines relativ perfekten bewerteten Körpers benutzt werden, obgleich, wie wir in den §§ 1 und 2 gesehen haben (vgl. die Formulierung des Fundamentallemmas), es bereits genügt, weniger zu verlangen. Andererseits haben wir a. a. O. bewiesen, daß bei Multiplikation von zwei oder mehreren Polynomen ihre Newtonschen Diagramme sich streckenweise addieren, so daß man das Newtonsche Diagramm des Produktes erhält, indem man die beiden Diagramme in einzelne Strecken zerlegt, und sodann diese Strecken in der Reihenfolge der wachsenden Steigung aneinanderfügt, wie bei der bekannten Konstruktion zur geometrischen Addition von Vektoren. Daraus folgt wiederum,

---

[16]) Dumas leitet die beiden im Text formulierten Behauptungen über das Newtonsche Diagramm, den Zerlegungssatz und den Produktsatz, in seiner ersten Arbeit (Dumas 1) für den Körper von „formal konvergenten" Potenzreihen in einer Variablen, in der zweiten (Dumas 2) für den Fall von p-adischen Zahlen. Den Produktsatz beweist im Falle allgemeiner Bewertungen Rella (Rella 1). Ferner enthält die Rellasche Abhandlung im Prinzip einen speziellen Fall des Zerlegungssatzes für den besonderen Fall von diskreten Bewertungen. Eine sehr interessante Verallgemeinerung des Produktsatzes ist gleichzeitig und unabhängig von Kürschák (Kürschák 2) und Öre (Öre 1, S. 282ff.) für Polynome mit rationalen Koeffizienten gegeben worden. Sie läßt sich auch auf den Fall der allgemeinsten bewerteten Körper ausdehnen.

daß, wenn ein Polynom mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper in Faktoren zerlegt wird, die den einzelnen Seiten seines Diagramms entsprechen, diese Faktoren, bis auf multiplikative Größen aus dem Koeffizientenkörper, eindeutig bestimmt sind. — Daraus folgt aber sofort:

I. *Eine algebraische Erweiterung Q' eines relativ perfekten bewerteten Körpers K' ist wiederum relativ perfekt.*

Denn es sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus Q', dessen Diagramm gebrochen ist, und $F(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus K', das durch $f(x)$ teilbar ist. Dann muß nach dem Obigen das Diagramm von $F(x)$ gebrochen sein. Im relativ perfekten Körper K' ist $F(x)$ als Produkt $F_1(x) \dots F_k(x)$ von Polynomen mit gradlinigen Diagrammen verschiedener Steigung darstellbar. Sucht man dann die größten gemeinsamen Teiler $T_1(x), \dots, T_k(x)$ dieser Polynome mit $f(x)$, so sind $T_1(x), \dots, T_k(x)$ Polynome mit Koeffizienten aus Q' und mit gradlinigen Diagrammen, und da ihr Produkt gleich $f(x)$ sein muß, so ist damit gezeigt, daß jedes Polynom mit Koeffizienten aus Q' und einem gebrochenen Diagramm in Q' reduzibel ist, d. h. daß auch Q' relativ perfekt ist. —

Zum besseren Verständnis des Satzes I sei bemerkt, daß er für die absolute Perfektheit falsch ist, wie z. B. aus dem folgenden von mir in O. 1, S. 275—280, bewiesenen Satz hervorgeht: *Eine algebraische Erweiterung erster Art eines absolut perfekten bewerteten Körpers K' ist dann und nur dann absolut perfekt, wenn sie endlich in bezug auf K' ist.*

II. *Sind zwei relativ perfekte bewertete Körper $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{L}'$ Unterkörper eines bewerteten Körpers Ω', so ist auch der Durchschnitt $(\mathfrak{M}', \mathfrak{L}')$ von $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{L}'$ relativ perfekt.*

Es genügt zum Beweis zu zeigen, daß ein Polynom $f(x)$ mit Koeffizienten aus $(\mathfrak{M}', \mathfrak{L}')$ und gebrochenem Newtonschen Diagramm in $(\mathfrak{M}', \mathfrak{L}')$ reduzibel ist. Schreiben wir $f(x)$ in der Form:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

so zerfällt $f(x)$ im perfekten Körper $\mathfrak{M}'$ in ein Produkt von Faktoren $P_1(x), \dots, P_k(x)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{M}'$, die den einzelnen Seiten des Newtonschen Diagramms von $f(x)$ in der Reihenfolge der wachsenden Steigung entsprechen und deren höchste Koeffizienten gleich 1 sind. Ebenso zerfällt $f(x)$ in $\mathfrak{L}'$ in ein Produkt $Q_1(x), \dots, Q_k(x)$ von Faktoren mit Koeffizienten aus $\mathfrak{L}'$, die wiederum den einzelnen Seiten des Diagramms von $f(x)$ in der Reihenfolge der wachsenden Steigung entsprechen und die höchsten Koeffizienten gleich 1 haben. Beide Zerlegungen finden also zugleich im bewerteten Körper Ω' statt. Da aber die Faktoren des Polynoms $f(x)$, die den einzelnen Seiten seines Diagramms entsprechen, nach Festlegung des höchsten Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, muß

allgemein $P_i = Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gelten. Daher liegen die Koeffizienten von P_i nicht nur in $\mathfrak{M}'$, sondern auch in $\mathfrak{L}'$, und damit in $(\mathfrak{M}', \mathfrak{L}')$, womit die Behauptung bewiesen ist.

22. Charakterisierung der Bewertungen durch das Newtonsche Diagramm. Ist ein Polynom $f(x)$ mit Koeffizienten aus einem relativ perfekten bewerteten Körper K' irreduzibel und daher sein Newtonsches Diagramm gradlinig, so liefert offenbar die Steigung dieses Diagramms die Bewertung, die die Wurzeln von $f(x)$ in algebraischen Erweiterungen von K' haben. Andererseits aber gehen bei Multiplikation von Polynomen die Steigungen der einzelnen Seiten ihrer Diagramme in das Diagramm des Produktes unverändert über. Daraus folgt:

III. *Ist K' ein beliebiger bewerteter Körper und*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

ein beliebiges, reduzibles oder irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus K', so haben, falls das Diagramm von $f(x)$ gradlinig ist, alle Wurzeln von $f(x)$ in den bewerteten Erweiterungen von K' die Bewertung $\|a_n\|^{1/n}$. Ist aber das Diagramm von $f(x)$ gebrochen und haben die einzelnen Seiten des Diagramms die Steigungen $\beta_1, \ldots, \beta_\varkappa$, und die Projektionen auf die v-Achse $\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa$, so können die Wurzeln von $f(x)$ in bewerteten Erweiterungen von K' keine anderen Bewertungen besitzen als $e^{-\beta_1}, \ldots, e^{-\beta_\varkappa}$. Insbesondere haben in einer Erweiterung von K', in der $f(x)$ in lauter Linearfaktoren zerfällt, σ_1 Wurzeln die Bewertung $e^{-\beta_1}$, σ_2 Wurzeln die Bewertung $e^{-\beta_2}$, $\ldots$, $\sigma_\varkappa$ Wurzeln die Bewertung $e^{-\beta_\varkappa}$. Ist aber $f(x)$ in K' irreduzibel, so kann eine beliebige algebraische Erweiterung von K', in der eine Wurzel von $f(x)$ liegt, so bewertet werden, daß dabei diese Wurzel eine beliebige der $\varkappa$ Zahlen $e^{-\beta_1}$, $\ldots$, $e^{-\beta_\varkappa}$ zur Bewertung hat[17]).

23. Universelle Zerlegungskörper. Es sei $\bar{K}'$ der derivierte Körper eines bewerteten Körpers K'. Es sei ferner $\mathfrak{A}'$ der von allen in $\bar{K}'$ liegenden, in bezug auf K' algebraischen Größen gebildete Körper. Dann muß jedes Polynom mit Koeffizienten aus K', das im Körper $\bar{K}'$ zerfällt, auch bereits im Körper $\mathfrak{A}'$ zerfallen. $\mathfrak{A}'$ hat offenbar die Eigenschaft, daß jede in einer bewerteten Erweiterung von $\mathfrak{A}'$ liegende Größe, die algebraisch in bezug auf K' und zugleich Grenzwert von Größen aus K' ist, dann bereits in $\mathfrak{A}'$ liegen muß.

Es sei nun Ω die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung von K'. Dann besitzt Ω Unterkörper $\mathfrak{Z}$, die zum Körper $\mathfrak{A}$ algebraisch

[17]) Der Satz III ist zum ersten Male im Falle der Kroneckerschen Idealtheorie in allgemeinsten Funktionenbereichen von M. Bauer (Bauer 1, S. 223—228) aufgestellt worden — natürlich in der Sprache der Kronecker-Königschen Terminologie.

isomorph sind. Ist $\mathfrak{H}$ die Norm von $\mathfrak{Z}$ in bezug auf K', so sind alle zu $\mathfrak{Z}$ in bezug auf K' konjugierten Unterkörper von $\mathfrak{H}$ wiederum isomorph zu $\mathfrak{A}$ Wir bezeichnen diese Körper als *universelle Zerlegungskörper in bezug auf* K' Wird ein Körqer $\mathfrak{Z}$ bewertet, indem man ihn isomorph auf $\mathfrak{A}'$ bezieht, so läßt sich diese Bewertung von $\mathfrak{Z}'$ zu einer Bewertung Ω' von Ω erweitern Liegt umgekehrt eine Bewertung Ω' von Ω vor, so entspricht ihr eine Bewertung $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$, und dabei ist einer der zu $\mathfrak{Z}$ konjugierten Körper nach Satz IV, § 4 analytisch isomorph zu $\mathfrak{A}'$. Wird nun ein Polynom mit Koeffizienten aus K' in einem der so bewerteten universellen Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}'$ in irreduzible Faktoren zerlegt, so zerfällt es in konjugierten Zerlegungskörpern in gleicher Weise (was die Anzahl und Grade der einzelnen Faktoren anbetrifft). Und da einer der zu $\mathfrak{Z}'$ konjugierten Körper analytisch isomorph zu $\mathfrak{A}'$ ist, *zerfällt also ein solches Polynom in jedem universellen Zerlegungskörper in gleicher Weise, wie nach Adjunktion des derivierten Körpers* $\bar{K}'$ *von* K'.

Es sei nun Q eine beliebige algebraische Erweiterung von K', $\mathfrak{N}$ die Norm von Q in bezug auf K'. Bewertet man irgendwie $\mathfrak{N}$, so gibt es eine entsprechende Bewertung der kleinsten algebraisch abgeschlossenen Erweiterung Ω von $\mathfrak{N}$. Damit ist ein universeller Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}'$ festgelegt, der zu $\mathfrak{A}'$ analytisch isomorph ist, und also aus allen Größen von Ω' besteht, die Grenzwerte von Größen aus K' sind. Daher ist der Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}_0'$ von $\mathfrak{N}'$ der Durchschnitt von $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{Z}'$. Nun läßt sich jede Permutation von Q in $\mathfrak{N}$, die K' elementenweise unverändert läßt, zu einer Permutation von Ω in sich selbst erweitern (vgl. Steinitz 1, S. 283), und umgekehrt bewirkt jede Permutation von Ω in sich, die K' elementenweise unverändert läßt, eine Permutation von Q in $\mathfrak{N}$. Andererseits entspricht auch jedem Isomorphismus von zwei universellen Zerlegungskörpern, die Unterkörper von $\mathfrak{H}$ sind, eine Permutation von Ω in sich. Daraus folgt:

IV. *Jeder Zerlegungskörper einer normalen algebraischen Erweiterung* $\mathfrak{N}$ *von* K' *ist als Durchschnitt eines in der kleinsten algebraisch abgeschlossenen Erweiterung* Ω *von* $\mathfrak{N}$ *enthaltenen universellen Zerlegungskörper in bezug auf* K' *mit* $\mathfrak{N}$ *darstellbar. Und umgekehrt ist der Durchschnitt jedes in* Ω *liegenden universellen Zerlegungskörpers in bezug auf* K' *mit* $\mathfrak{N}$ *ein Zerlegungskörper von* $\mathfrak{N}$ *in bezug auf* K'.

24. Reduzierter universeller Zerlegungskörper. Man kann im Falle der Charakteristik p dem Satz IV einen analogen Satz über die reduzierten Zerlegungskörper an die Seite stellen. Es sei $\mathfrak{A}^{*'}$ die Gesamtheit der in bezug auf K' algebraischen Größen erter Art aus $\bar{K}'$ — $\mathfrak{A}^{*'}$ ist also die „größte“ Erweiterung erster Art zwischen K' und $\mathfrak{A}'$ —. Ist Q eine beliebige algebraische Erweiterung von K' und $\mathfrak{N}'$ die irgendwie bewertete Norm von Q in bezug auf K', Ω die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung

von $\mathfrak{R}$, so kann Ω zu Ω' so bewertet werden, daß die Bewertung $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ dadurch mitgeliefert wird. Der Körper Ω' besitzt dann einen zu $\mathfrak{A}^{*'}$ analytisch isomorphen Unterkörper $\mathfrak{Z}^{*'}$, der zugleich die größte im zugehörigen universellen Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}'$ enthaltene algebraische Erweiterung erster Art von K' ist. Wir werden $\mathfrak{Z}^{*'}$ als einen *reduzierten universellen Zerlegungskörper* in bezug auf K' bezeichnen.

Nun liefert der Durchschnitt von $\mathfrak{R}'$ mit $\mathfrak{Z}'$ den zu $\mathfrak{R}'$ gehörenden Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}_0'$ in bezug auf K'. Die Größen erster Art aus $\mathfrak{Z}_0'$ liegen zugleich in $\mathfrak{Z}^{*'}$. Daher ist $\mathfrak{Z}_0'$ der Durchschnitt von $\mathfrak{Z}^{*'}$ mit $\mathfrak{R}'$. Damit folgt aus IV weiter:

V. *Die Behauptung von IV bleibt im Falle der Charakteristik p erhalten, wenn die Zerlegungskörper und universellen Zerlegungskörper durch die reduzierten Zerlegungskörper ersetzt werden. Im Falle der Charakteristik* 0 *ist der Begriff des reduzierten universellen Zerlegungskörpers identisch mit dem Begriff des universellen Zerlegungskörpers.*

25. Algebraische Charakterisierung relativ perfekter Körper. Der Begriff des universellen reduzierten Zerlegungskörpers ist besonders wichtig, weil mit seiner Hilfe *eine algebraische Charakterisierung von relativ perfekten Körpern* gegeben werden kann. Es gilt nämlich der Satz:

VI. *Ein bewerteter Körper K' ist dann und nur dann relativ perfekt, wenn er sein eigener reduzierter universeller Zerlegungskörper in bezug auf sich selbst ist. Mit anderen Worten, wenn jede in bezug auf K' algebraische Größe erster Art aus einer bewerteten Erweiterung von K', die sich als Grenzwert der Größen aus K' darstellen läßt, dann auch bereits selbst in K' liegt.*

Beweis: Es sei α eine in bezug auf K' algebraische Größe erster Art aus einer bewerteten Erweiterung Q' von K', und es sei K' relativ perfekt. Es genüge α der in K' irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus K':

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{5,1}$$

die nach Annahme lauter verschiedene Wurzeln $\alpha^{(1)} = \alpha, \alpha^{(2)} \ldots, \alpha^{(n)}$ hat, und es möge für noch so kleine positive ε für ein geeignetes a aus K'

$$\|\alpha - a\| < \varepsilon$$

sein. Es sei m die kleinste Bewertung der nicht verschwindenden Differenzen

$$\alpha^{(\mu)} - \alpha^{(\nu)}, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, n, \quad \nu \gtrless \mu.$$

Dann gibt es ein solches a aus K', daß

$$\|\alpha - a\| < m < \|\alpha^{(\mu)} - \alpha^{(\nu)}\|, \quad (\nu \gtrless \mu)$$

ist. Man setze nun in (5, 1) $x = a + y$. Dann ergibt sich für die Größen $\alpha^{(\nu)} - a$ die Gleichung

$$F(y) \equiv \prod_{\nu=1}^{n} (y - (\alpha^{(\nu)} - a)) = 0.$$

Das Newtonsche Diagramm von $F(y)$ besitzt nun eine steilste Seite, die dem ersten Faktor $y - (\alpha - a)$ entspricht, da die Steigungen der Newtonschen Diagramme, die zu den übrigen Faktoren von $F(y)$ gehören, durchweg kleiner sind. Denn es gilt für $\nu > 1$

$$\| \alpha^{(\nu)} - a \| = \| (\alpha^{(\nu)} - \alpha) + (\alpha - a) \| = \| \alpha^{(\nu)} - \alpha \| > m > \| \alpha - a \|.$$

Daher läßt sich im relativ perfekten Körper K' von $F(y)$ der erste Faktor abspalten, und $\alpha - a$ — und damit auch α — gehört in der Tat zu K'.

Es besitze umgekehrt der bewertete Körper K' die Eigenschaft, daß jede Größe aus einer bewerteten Erweiterung von K', die von der ersten Art in bezug auf K' ist und sich als Grenzwert von Größen von K' darstellen läßt, zu K' gehört. Es sei $F(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus K' und einem gebrochenen Newtonschen Diagramm. Es genügt zu beweisen, daß $F(x)$ sich bereits in K' in Faktoren zerlegt, die nur geradlinige Newtonsche Diagramme besitzen. — Dabei wollen wir annehmen, daß sowohl in $F(x)$ als auch in allen Faktoren von $F(x)$ die höchsten Koeffizienten gleich 1 sind. Es sei nun $\bar{K}'$ der derivierte Körper von K', in dem

$$F(x) = F_1(x) \dots F_k(x)$$

ist, wo $F_1(x), \dots, F_k(x)$ den einzelnen Seiten des Diagramms von $F(x)$ entsprechen. Die Koeffizienten von $F_1(x), \dots, F_k(x)$ sind algebraisch in bezug auf K', und sind, weil sie in $\bar{K}'$ liegen, Grenzwerte von Größen aus K'. Im Falle der Charakteristik 0 gehören sie daher nach Voraussetzung K' an, und unsere Behauptung ist bewiesen. Ist aber K' von der Charakteristik p, so gibt es eine solche Potenz p^e von p, daß die p^e-ten Potenzen sämtlicher Koeffizienten von $F_1(x), \dots, F_k(x)$ von der ersten Art in bezug auf K' sind und daher, da sie auch in $\bar{K}'$ liegen, sich als Grenzwerte von Größen aus K' darstellen lassen und folglich bereits zu K' gehören. Dies bedeutet aber, daß die Koeffizienten von

$$(F_1(x))^{p^e}, \dots, (F_k(x))^{p^e}$$

zu K' gehören. Nun muß aber dann der größte gemeinsame Teiler $F_\varkappa(x)$ von $F(x)$ und $(F_\varkappa(x))^{p^e}$ $(\varkappa = 1, \dots, k)$ gleichfalls Koeffizienten aus K' besitzen, womit alles bewiesen ist.

Aus dem Satz VI folgt offenbar vermöge der Sätze IV und V, daß wenn Q' eine bewertete algebraische Erweiterung eines relativ perfekten Körpers K' ist, K' der reduzierte Zerlegungskörper von Q' in bezug auf K' ist.

26. Primdivisoren und Dedekindsche Primideale. Es sei K ein endlicher algebraischer Zahlkörper über dem Körper R der rationalen Zahlen. $\mathfrak{y}$ sei ein Dedekindsches Primideal in K. π sei eine ganze Zahl aus K, die durch $\mathfrak{y}$, nicht aber durch $\mathfrak{y}^2$ teilbar ist. Für jede Zahl α aus K gibt es ein ganzes n — die Ordnung von α in bezug auf $\mathfrak{y}$ — derart, daß α/π^n sich als Quotient von zwei ganzen durch $\mathfrak{y}$ nicht teilbaren Zahlen darstellen läßt. Offenbar hängt n von der Wahl von π nicht ab, da, wenn π_1 eine zweite Zahl von gleicher Beschaffenheit ist, π/π_1 sich als Quotient von zwei zu $\mathfrak{y}$ teilerfremden Zahlen schreiben läßt. Ist c eine feste positive Konstante, so ordnen wir nc unserem α als seine Ordnungszahl $\omega(\alpha)$ zu. Diese Ordnungsfunktion $\omega(\alpha)$ genügt den Bedingungen des § 1, so daß also zu $\mathfrak{y}$ eine Klasse äquivalenter Primdivisoren von K gehört.

Es sei umgekehrt $\mathfrak{P}$ ein Primdivisor von K, $\omega(\alpha)$ die zugehörige Ordnungsfunktion. In bezug auf $\mathfrak{P}$ hat jede ganze rationale Zahl als Summe von Einheiten eine nicht negative Ordnungszahl. Ist α ganz in K und genügt α der Gleichung

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{5, 2}$$

mit ganzen rationalen $a_1, \ldots, a_n$, so würde für eine *negative* Ordnungszahl von α die Bewertung des ersten Gliedes in (5, 2) überwiegen. Daher ist $\omega(\alpha) \geqq 0$. Folglich bilden alle ganzen Zahlen α aus K mit $\omega(\alpha) > 0$ ein Ideal $\mathfrak{y}$, in dem die Zahl 1 nicht vorkommt. Liegt eine ganze Zahl β nicht in $\mathfrak{y}$, so ist $\omega(\beta) = 0$. $\mathfrak{y}$ ist nun ein Primideal. Denn sonst gibt es zwei ganze Zahlen α und β aus K, die nicht in $\mathfrak{y}$ liegen, während $\alpha\beta$ in $\mathfrak{y}$ enthalten ist. Dann müßte aber $\omega(\alpha) = \omega(\beta) = 0$, daher auch $\omega(\alpha\beta) = \omega(\alpha) + \omega(\beta) = 0$ sein, was einen Widerspruch liefert.

Es sei π eine ganze Zahl aus K, die durch $\mathfrak{y}$, nicht aber durch $\mathfrak{y}^2$ teilbar ist, und es sei $\omega(\pi) = c > 0$. Zu einer Zahl α gibt es ein ganzes rationales n, so daß $\frac{\alpha}{\pi^n} = \frac{\beta}{\gamma}$ ist, wo β und γ ganz und zu $\mathfrak{y}$ teilerfremd sind. Daher gilt:

$$\omega\left(\frac{\alpha}{\pi^n}\right) = \omega(\beta) - \omega(\gamma) = 0,$$

$$\omega(\alpha) = \omega(\pi^n) = n\,\omega(\pi) = nc,$$

so daß also unser Primdivisor $\mathfrak{P}$ gerade zum Primideal $\mathfrak{y}$ im oben charakterisierten Sinne gehört.

VII. *In einem endlichen algebraischen Zahlkörper ist die Ordnungsfunktion eines beliebigen Primdivisors* $\mathfrak{P}$ *gleich dem Produkt der Ordnung in bezug auf ein Dedekindsches Primideal* $\mathfrak{y}$ *mit einer von* $\mathfrak{P}$ *abhängigen positiven Konstanten.*

Ist insbesondere K der Körper R der rationalen Zahlen selbst und p eine gewöhnliche Primzahl, so kann man den zugehörigen derivierten Körper offenbar auffassen als Gesamtheit von Ausdrücken

$$\sum_{\nu=-n}^{\infty} a_\nu p^\nu$$

für beliebige ganze n, wo die ganzen Zahlen a_ν ein vollständiges Repräsentantensystem für die p Restklassen mod p durchlaufen und als Repräsentant der Nullklasse die Zahl 0 angenommen wird. Dies ist der Henselsche Körper der rationalen p-adischen Zahlen.

27. Die Hilbertschen Zerlegungskörper. Es sei $\mathfrak{N}'$ eine normale bewertete algebraische Erweiterung von K', $\mathfrak{P}$ der $\mathfrak{N}'$ entsprechende Primdivisor von $\mathfrak{N}$. Wir betrachten die zu $\mathfrak{P}$ gehörende Zerlegungsgruppe H (vgl. § 4, Nr. 16), die jedes Element des Zerlegungskörpers von $\mathfrak{N}'$ invariant läßt. Wir haben die Zerlegungsgruppe H ursprünglich dadurch definiert, daß sie jedes Element von K' und die Bewertung $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}$ invariant läßt, d. h. also, daß für sie jedes Element von $\mathfrak{N}'$ dieselbe Bewertung hat, wie sein Bild vermöge einer Permutation aus H. Man könnte sich auch darauf beschränken, zu verlangen, daß bei jeder Permutation von H (natürlich jedes Element von K' in sich übergeht und) ein Element von $\mathfrak{N}'$ mit positiver Ordnungszahl stets wieder in ein solches übergeführt wird. Denn unter dieser Bedingung muß die neue Bewertungsfunktion $\omega_1(\alpha)$ mit der alten $\omega(\alpha)$ identisch sein. Sie kann nämlich von $\omega(\alpha)$ nicht bloß um eine multiplikative Konstante verschieden sein, da ja die Ordnungszahlen der Größen aus K' fest bleiben. Wäre aber $\omega_1(\alpha)$ nicht äquivalent zu $\omega(\alpha)$, so muß es in $\mathfrak{N}'$, wie wir bereits beim Beweise des Satzes X gezeigt haben, ein Element α geben mit positivem $\omega(\alpha)$ und negativem $\omega_1(\alpha)$.

Die Elemente von $\mathfrak{N}'$, die bei allen Permutationen von H unverändert bleiben, bilden einen Zwischenkörper $\mathfrak{H}'$ zwischen K' und $\mathfrak{N}'$, den wir als den zu $\mathfrak{P}$ gehörenden *Hilbertschen Zerlegungskörper* bezeichnen.

Es seien nun Q, $\mathfrak{M}$ die größten in $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{N}$ enthaltenen Erweiterungen erster Art von K. Dann muß nach den Bemerkungen am Schlusse der Nr. 17 Q mit dem reduzierten Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}^*$ von $\mathfrak{N}'$ identisch sein, so daß also jede Größe erster Art in bezug auf K aus $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{Z}^*$ liegen muß. Hatnun K die Primzahlcharakteristik p und enthält $\mathfrak{N}$ eine Größe α, deren p^l-te Potenz β in $\mathfrak{Z}^*$ enthalten ist, so liegt α selbst in $\mathfrak{H}$, da ja α

die einzige Wurzel der Gleichung $\alpha^{p^f} = \beta$ ist und daher durch jede Permutation von H in sich übergeht. Wir sehen:

VIII. *Der Hilbertsche Zerlegungskörper $\mathfrak{H}$ des Primdivisors $\mathfrak{P}$ einer bewerteten normalen algebraischen Erweiterung $\mathfrak{N}'$ eines bewerteten Körpers K' ist identisch mit dem größten in $\mathfrak{N}'$ liegenden Wurzelkörper in bezug auf den reduzierten Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ von $\mathfrak{N}'$. Der gewöhnliche Zerlegungskörper $\mathfrak{Z}'$ ist ein Zwischenkörper zwischen $\mathfrak{Z}^{*\prime}$ und $\mathfrak{H}'$. Im Falle der Charakteristik 0 fallen die drei Zerlegungskörper zusammen.*

Insbesondere ergibt sich, daß jede Größe erster Art aus dem Hilbertschen Zerlegungskörper $\mathfrak{H}$ in bezug auf einen Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{N}$ nach einer noch so hohen Potenz $\mathfrak{P}^A$ von $\mathfrak{P}$ einer Größe aus K' kongruent ist. Im Falle der gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper sehen wir:

IX. *Ist Ω eine normale algebraische Erweiterung des Körpers R der rationalen Zahlen, $\mathfrak{P}$ ein Primdivisor von Ω, so umfaßt der zu $\mathfrak{P}$ gehörende Zerlegungskörper von Ω alle und nur die Größen von Ω, die nach einer beliebig hohen Potenz von $\mathfrak{P}$ einer rationalen Zahl kongruent sind, so daß dieser Zerlegungskörper als der größte Unterkörper von Ω aufgefaßt werden kann, der mit einem Unterkörper des Körpers der rationalen p-adischen Zahlen isomorph ist.*

Danach liegt die Bedeutung des rationalen p-adischen Zahlkörpers H darin, daß seine algebraischen Unterkörper gewissermaßen ein darstellungsmäßiges Modell für die Zerlegungskörper normaler algebraischer Zahlkörper liefern [18]).

---

[18]) Da ferner der (absolut perfekte) Körper H der p-adischen Zahlen der Zerlegungskörper jeder algebraischer Erweiterung von H ist, folgt durch die genaue Übertragung der bekannten Hilbertschen Überlegungen, daß jede algebraische Gleichung mit Koeffizienten aus H algebraisch auflösbar ist. Den auf Gleichungen, deren linke Seite mod p irreduzibel ist, bezüglichen Spezialfall dieses Satzes habe ich in O. 5 1913 direkt bewiesen. Den vollständigen Satz habe ich im Oktober 1917 gefunden und eine Aufzeichnung darüber, in der die Theorie der Verzweigungskörper nach der Methode von Weber (Lehrb. d. Algebra 2, 2. Aufl., S. 664—670) behandelt wurde, Herrn Hensel unter dem 29. 10. 1917 mitgeteilt. Wie ich später von Herrn Hensel erfuhr, hatte er bereits in seinen Vorlesungen die Hilbertsche Theorie des Galoisschen Zahlkörpers vorgetragen, wobei die Theorie der höheren Verzweigungskörper im genauen Anschluß an Hilbert gebracht wurde.

(Eingegangen am 2. August 1932.)

Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper.

(Die Theorie der Teilbarkeit in allgemeinen Körpern.) Teil II und III.

Von

Alexander Ostrowski in Basel.

Teil II.

Struktur bewerteter Körper und Zerlegung von Primdivisoren in algebraischen Erweiterungen.

§ 6.

Restklassenkörper, Verzweigungsindex und Verzweigungsgrad algebraischer Erweiterungen.

28. Restklassenkörper. Halbbewertete Körper. Ist K' ein bewerteter Körper, und faßt man die in diesem Körper einander kongruenten Größen als identisch auf, so gelangt man zum sogenannten *Restklassenkörper* $\mathfrak{K}$ des bewerteten Körpers K' oder des zugehörigen Primdivisors $\mathfrak{p}$. Wir werden den Restklassenkörper und die zugehörigen Größen in der Regel mit gotischen Buchstaben bezeichnen. Entspricht einem Element a von K' ein Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{K}$, so sagen wir a und $\mathfrak{a}$ seien *kongruent* — eine offenbar transitive Beziehung.

Bewertet man z. B. den Körper der rationalen Zahlen so, daß einer festen Primzahl p als Bewertung $1/e$ zugeordnet wird, während alle anderen Primzahlen die Bewertung 1 erhalten, so ist dabei der Restklassenkörper der endliche Körper aller Restklassen mod p.

Enthält ein bewerteter Körper K' einen Unterkörper, dessen sämtliche Elemente, bis auf 0, die Bewertung 1 haben, so nennen wir diesen Unterkörper *halbbewertet*.

I. *Ist eine Größe α eines bewerteten Körpers K' algebraisch in bezug auf einen halbbewerteten Unterkörper K_0, so ist auch der in K' liegende Körper $K_0(\alpha)$ halbbewertet.* —

Denn genügt eine Größe β von $K_0(\alpha)$, $\beta \neq 0$, einer in K_0 irreduziblen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

wo $\|a_n\| = 1$ ist, so ist das Newtonsche Diagramm des Polynoms $f(x)$ eine Strecke auf der ν-Achse. Daher besitzen auch alle im derivierten

Körper von K' irreduziblen Faktoren von $f(x)$ Strecken auf der ν-Achse als Diagramme, wenn man sie durch die Festsetzung normiert, daß der höchste Koeffizient gleich 1 ist.

Ist dann

$$x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

ein solcher Faktor, so ist $\|b_m\|^{1/m} = 1$, so daß β nur die Bewertung 1 haben kann.

29. Kern eines bewerteten Körpers. Wir greifen zu jedem Element des Restklassenkörpers $\mathfrak{K}$ ein ihm kongruentes Element von K' heraus — *den Repräsentanten der zugehörigen Restklasse.* Das so entstehende System S hat die Eigenschaft, daß man von jedem Element von K' mit der Ordnung 0 ein solches eindeutig bestimmmtes Element von S abziehen kann, daß die Differenz eine positive Ordnung erhält.

Insbesondere sind alle Elemente eines halbbewerteten Unterkörpers K_0 von K' untereinander inkongruent und können daher sämtlich in das System S aufgenommen werden. Ist damit das vollständige Repräsentantensystem des Restklassenkörpers erschöpft, ist also jedes Element von K' einem Element von K_0 kongruent, so nennen wir K_0 einen *Kern* von K'.

Bewertet man den Körper aller rationalen Zahlen, wie oben angegeben, mit Hilfe einer festen Primzahl, so besitzt der so entstehende bewertete Körper keinen Kern. Betrachtet man den Körper aller formalen Dirichletschen Reihen mit Koeffizienten aus einem festen Körper, und bewertet man ihn nach der Vorschrift von § 1, so besitzt dieser Körper den Koeffizientenkörper als Kern.

30. Verzweigungsindex einer Erweiterung. Es sei L' eine bewertete Erweiterung des bewerteten Körpers K', und es seien $\mathfrak{m}_{K'}$, $\mathfrak{m}_{L'}$ die *Bewertungsmoduln von K' und L'* (vgl. § 1, Nr. 3). Dann sind alle Elemente von $\mathfrak{m}_{K'}$ in $\mathfrak{m}_{L'}$ enthalten:

$$\mathfrak{m}_{K'} < \mathfrak{m}_{L'}.$$

Zwei Elemente von $\mathfrak{m}_{L'}$ heißen *kongruent in bezug auf* $\mathfrak{m}_{K'}$, wenn ihre Differenz in $\mathfrak{m}_{K'}$ liegt. So zerfällt der Bewertungsmodul $\mathfrak{m}_{L'}$ in endlich oder unendlich viele elementenfremde Restklassen (mod $\mathfrak{m}_{K'}$). Die Anzahl dieser Restklassen, mag sie endlich oder unendlich sein, nennen wir den *Verzweigungsindex* von L' in bezug auf K' und bezeichnen ihn mit $\frac{\mathfrak{m}_{K'}}{\mathfrak{m}_{L'}}$.

Offenbar ist jedes System von k Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ von L', deren Bewertungen zu durchweg *verschiedenen* Restklassen (mod $\mathfrak{m}_{K'}$) gehören, linear unabhängig in bezug auf K'. Daher ist der Verzweigungsindex j von L' in bezug auf k' höchstens gleich dem Relativgrade von L'

in bezug auf K'. Insbesondere ist j stets *endlich*, wenn L' endlich in bezug auf K' ist.

II. *Es sei M' eine bewertete algebraische Erweiterung von L', L' eine bewertete algebraische Erweiterung von K'. Sind j, j_1, j_2 die Verzweigungsindizes von M' in bezug auf K', M' in bezug auf L', und L' in bezug auf K', so gilt*

(6, 1) $$j = j_1 \cdot j_2.$$

Denn es seien $\mathfrak{m}_{M'}$, $\mathfrak{m}_{L'}$, $\mathfrak{m}_{K'}$ die Bewertungsmoduln von M', L', K'. Durchläuft a alle j_1 Elemente eines Repräsentantensystems aus $\mathfrak{m}_{M'} \pmod{\mathfrak{m}_{L'}}$ und b unabhängig von a alle j_2 Elemente eines Repräsentantensystems aus $\mathfrak{m}_{L'} \pmod{\mathfrak{m}_{K'}}$, so durchläuft $a + b$ ein aus j Elementen bestehendes Repräsentantensystem von $\mathfrak{m}_{M'} \pmod{\mathfrak{m}_{K'}}$. Daher ist in der Tat $j = j_1 j_2$ oder

(6, 2) $$\frac{\mathfrak{m}_{K'}}{\mathfrak{m}_{M'}} = \frac{\mathfrak{m}_{K'}}{\mathfrak{m}_{L'}} \cdot \frac{\mathfrak{m}_{L'}}{\mathfrak{m}_{M'}} \qquad (K' < L' < M').$$

31. Verzweigungsmodulgruppe, Verzweigungsinvarianten, Verzweigungszahl. Es sei nun L' eine endliche bewertete Erweiterung von K' und j der Verzweigungsindex von L' in bezug auf K'. Dann bilden die j Restklassen des Moduls $\mathfrak{m}_{L'}$ in bezug auf $\mathfrak{m}_{K'}$ eine in bezug auf Addition *Abelsche Gruppe von der Ordnung j*. Wir werden diese Gruppe als die *Verzweigungsmodulgruppe von L' in bezug auf K'* bezeichnen. Jedes Element dieser Gruppe besitzt eine *Ordnung k*, die stets ein Teiler von j ist, derart, daß dieses Element, mit k und ganzzahligen Vielfachen von k multipliziert, gleich dem Einheitselement ist, und daher für jedes Element ω von $\mathfrak{m}_{L'}$ aus dieser Restklasse das Produkt $k\omega$ zu $\mathfrak{m}_{K'}$ gehört — während für kein ganzes nicht durch k teilbares l $l\omega$ in $\mathfrak{m}_{K'}$ liegt. Wir werden dieses k zugleich als die Ordnung von ω selbst in bezug auf $\mathfrak{m}_{K'}$ bezeichnen.

Nun ist aus der Theorie der endlichen multiplikativen Abelschen Gruppen bekannt, daß sich eine jede solche Gruppe durch eine Basis in der Form darstellen läßt:

(6, 3) $$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n},$$

wo A_ν die Primzahlpotenzordnung a_ν hat und jedes α_ν unabhängig von den andern alle Werte $0, 1, \dots, a_\nu - 1$ durchläuft. Der Ausdruck (6, 3) liefert eine eindeutige Darstellung aller Elemente der Gruppe, so daß das Produkt $a_1 \dots a_n$ gleich der Ordnung der Gruppe ist. Die Elemente $A_1, \dots, A_n$ der Basis lassen sich zwar auf verschiedene Weise wählen, die Primzahlpotenzen $a_1, \dots, a_n$ sind aber bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt und heißen *die Invarianten der Abelschen Gruppe*, da sie den Isomorphietypus der Gruppe eindeutig festlegen. Insbesondere ergibt sich,

daß es zu jedem Primteiler der Ordnung der Gruppe in der Gruppe Elemente gibt, deren Ordnung durch diesen Primteiler teilbar ist.

Zu den einzelnen Primteilern der Ordnung der Gruppe können auch mehrere Basiselemente gehören, und damit auch mehrere Invarianten. Bildet man das Produkt der größten Invarianten einer endlichen Abelschen Gruppe, die zu den einzelnen Primteilern der Ordnung gehören, so ist dieses Produkt die größte Ordnung, die die Elemente der Gruppe haben können. Diese Maximalordnung ist durch die Ordnung jedes Elements der Gruppe teilbar und selbst in der Ordnung der Gruppe als Teiler enthalten. Dieses Produkt ist zugleich die maximale Ordnung einer zyklischen Untergruppe der gegebenen Gruppe.

Wir werden nun die Invarianten der Restklassengruppe des Bewertungsmoduls $\mathfrak{m}_{L'}$ einer bewerteten Erweiterung L' von K' in bezug auf $\mathfrak{m}_{K'}$ als die *Verzweigungsinvarianten* von L' in bezug auf K' bezeichnen, und die maximale Ordnung eines Elements von $\mathfrak{m}_{L'}$ in bezug auf $\mathfrak{m}_{K'}$ als die *Verzweigungszahl* von L' in bezug auf K'. Die Verzweigungszahl ist nach dem Obigen ein Teiler des Verzweigungsindex und durch jeden Primteiler des Verzweigungsindex teilbar.

Wir beweisen endlich den Hilfssatz:

III. *Ist L' eine endliche bewertete Erweiterung eines bewerteten relativ perfekten Körpers K' vom Relativgrade n, so ist die Verzweigungszahl von L' in bezug auf K' — und damit jeder Primteiler des Verzweigungsindex — ein Teiler von n.* — Es genügt zu beweisen, daß die Ordnung jedes Elements von $\mathfrak{m}_{L'}$ in bezug auf $\mathfrak{m}_{K'}$ ein Teiler von n ist. Es sei nun α ein Element von L', mit $\omega(\alpha) = \omega$; und es sei

$$f(x) \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

die in K' irreduzible Gleichung, der α genügt. Dann ist m ein Teiler von n und andererseits

$$\|\alpha\| = \|a_m\|^{1/m}, \quad m\omega = \omega(a_m),$$

so daß die Ordnung von ω in bezug auf $\mathfrak{m}_{K'}$ ein Teiler von m und erst recht ein Teiler von n ist.

32. Verzweigungsgrad, Trägheitsgrad und Defekt algebraischer Erweiterungen. Es sei nun wieder L' eine bewertete algebraische Erweiterung von K', und die Restklassenkörper von L' und K' seien $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{K}$. Wir nennen dann den Grad $t = [\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$ von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{K}$ *den Trägheitsgrad von L' in bezug auf K'* Ist t endlich und n der Grad von L' in bezug auf K', so nennen wir $v = \frac{n}{t} = \frac{[L' : K']}{[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]}$ *den Verzweigungsgrad von L' in bezug auf K'.* Endlich nennen wir, wenn t und

der Verzweigungsindex j von L' in bezug auf K' endlich sind, $\delta = \frac{v}{j} = \frac{n}{tj}$ *den Defekt von* L' *in bezug auf* K' [19]).

Wir beweisen nun:

IV. *Sind* j, v, δ *Verzweigungsindex, Verzweigungsgrad und Defekt einer endlichen bewerteten Erweiterung* L' *eines bewerteten Körpers* K', *so ist*

(6, 4) $$j \leqq v, \qquad \text{d. h.} \qquad \delta \geqq 1.$$

Beweis: Es seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$ die Restklassenkörper von L' bzw. K', und es sei $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}] = m$, $[L' : K'] = n$; dann ist zu zeigen, daß $mj \leqq n$ ist. Es sei nun $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ ein System von m in bezug auf $\mathfrak{K}$ linear unabhängigen Größen aus $\mathfrak{L}$, $a_1, \ldots, a_m$ ein System von Größen aus L', die respektive kongruent $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ sind. Wir zeigen zunächst, daß, wenn $c_1, \ldots, c_m$ in K' liegen, die Bewertung einer Summe

(6, 5) $$c_1 a_1 + \ldots + c_m a_m$$

gleich der größten unter den Bewertungen von $c_1, \ldots, c_m$ ist, und daß daher eine solche Summe nur dann verschwinden kann, wenn alle $c_\mu = 0$ sind. Denn ist die größte unter den Zahlen $\|c_\mu\|$ gleich β, so dürfen wir $\beta = 1$ annehmen, da wir sonst die Summe (6, 5) durch einen der entsprechenden Koeffizienten c durchdividieren könnten. Wäre aber dann die Bewertung von (6, 5) kleiner als 1, so würde daraus die Gleichung in $\mathfrak{K}$

(6, 51) $$\mathfrak{i}_1 \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{i}_m \mathfrak{a}_m = 0$$

folgen, wo $\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_m$ die $c_1, \ldots, c_m$ entsprechenden Größen aus $\mathfrak{K}$ sind, die wegen $\beta = 1$ nicht alle verschwinden. (6, 51) widerspricht aber der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ in bezug auf $\mathfrak{K}$.

Es gibt andererseits j Größen $b_1, \ldots, b_j$ in L', deren Ordnungszahlen ein vollständiges Restklassensystem in bezug auf den Bewertungsmodul $\mathfrak{m}_{K'}$ bilden. Hieraus folgt, daß, wenn eine Relation

(6, 52) $$\sum_{i=1}^{j} d_i b_i = 0$$

gilt, wo die Ordnungen von $d_1, \ldots, d_j$ zu $\mathfrak{m}_{K'}$ gehören, sämtliche d_i verschwinden müssen. Daraus folgt aber weiter, daß die mj Elemente

$$\begin{array}{c} a_1 b_1, \ldots, a_1 b_j, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_\mu b_1, \ldots, a_\mu b_j, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_m b_1, \ldots, a_m b_j \end{array}$$

[19]) Die Begriffsbildungen des Verzweigungsgrades und des Defektes werden erst für die Theorie der Teilbarkeit wesentlich, wenn es sich um relativ perfekte Körper handelt. Indessen ist es von Interesse, einige Eigenschaften dieser Begriffsbildungen herzuleiten, ohne diese Annahme zu machen. Wir werden daher K' bis zur Nr. 38 als einen beliebigen bewerteten Körper voraussetzen.

linear unabhängig in bezug auf K' sind. Denn aus einer Relation

$$(6, 53) \qquad \sum_{i=1}^{j} \sum_{\mu=1}^{m} c_{i\mu} b_i a_\mu = \sum_{i=1}^{j} d_i b_i = 0$$

mit Koeffizienten $c_{i\mu}$ aus K' und mit

$$d_i = \sum_{\mu=1}^{m} c_{i\mu} a_\mu$$

folgt erstens, daß die Ordnungen der Größen d_i zum Bewertungsmodul $\mathfrak{m}_{K'}$ gehören, da die Bewertung von d_i gleich der größten unter den Bewertungen von $c_{i\mu}$ für $\mu = 1, \ldots, m$ ist. Dann aber muß nach dem über (6, 52) Bemerkten durchweg $d_i = 0$ sein, daher müßten auch sämtliche $c_{i\mu} = 0$ sein, da sonst d_i eine von 0 verschiedene Bewertung haben und daher von 0 verschieden sein müßte. Damit ist IV bewiesen.

33. Trägheitserweiterungen. Insbesondere folgt aus IV, wegen $j \geqq 1$, daß

$$[L' : K'] \geqq [\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$$

ist, so daß stets der Verzweigungsgrad $v \geqq 1$ ist. Ist insbesondere $v = 1$, d. h. $[L' : K'] = [\mathfrak{L} : \mathfrak{K}]$, so nennen wir L' eine *Trägheitserweiterung von* K'.

Eine unendliche algebraische Erweiterung L' von K' nennen wir eine *Trägheitserweiterung* von K', wenn jede in ihr liegende endliche Erweiterung von K' eine Trägheitserweiterung von K' ist. Aus Satz IV folgt nun:

V. *Der Verzweigungsindex einer Trägheitserweiterung L' eines bewerteten Körpers K' in bezug auf K' ist gleich* 1.

Für endliche Trägheitserweiterungen folgt dies aus IV unmittelbar. Wäre nun der Verzweigungsindex einer unendlichen Trägheitserweiterung L' von K' in bezug auf K' größer als 1, so gäbe es in L' ein Element a, dessen Bewertung in K' nicht vorkommt. Daher müßte der Verzweigungsindex des bewerteten Körpers $K'(a)$ in bezug auf K' größer als 1 sein; $K'(a)$ ist aber eine endliche Erweiterung von K', die zugleich nach Voraussetzung eine Trägheitserweiterung von K' sein muß. Damit ist V bewiesen.

VI. *Ist L' eine bewertete algebraische Erweiterung von K', und M' ein Zwischenkörper zwischen L' und K', so ist der Trägheitsgrad von L' in bezug auf K' gleich dem Produkt des Trägheitsgrades von L' in bezug auf M' mit dem Trägheitsgrad von L' in bezug auf K'.*

Denn sind $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{K}$ die Restklassenkörper von L', M', K', so gilt nach Steinitz 1, S. 200

$$[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}] = [\mathfrak{L} : \mathfrak{M}]\,[\mathfrak{M} : \mathfrak{K}].$$

VII. *Ist L' eine bewertete algebraische Erweiterung eines bewerteten Körpers K' von endlichem Trägheitsgrad t in bezug auf K', und M' ein*

Zwischenkörper zwischen L' und K', so ist der Verzweigungsgrad v von L' in bezug auf K' gleich dem Produkt des Verzweigungsgrades v_1 von L' in bezug auf M' mit dem Verzweigungsgrad v_2 von M' in bezug auf K'.

Denn sind die Grade von L' in bezug auf M', M' in bezug auf K', und L' in bezug auf K' bzw. n_1, n_2, n, und die Trägheitsgrade von L' in bezug auf M', und M' in bezug auf K' bzw. t_1, t_2, so gilt nach Definition und nach Satz VI

$$(6, 6) \qquad t = t_1 t_2, \quad n = n_1 n_2, \quad v = \frac{n}{t} = \frac{n_1}{t_1} \cdot \frac{n_2}{t_2} = v_1 v_2.$$

Zusatz zum Satz VII. *Ist aber nicht nur t, sondern auch der Verzweigungsindex j von L' in bezug auf K' endlich, so folgt aus II weiter, daß auch der Defekt von L' in bezug auf K' gleich dem Produkt der Defekte von L' in bezugauf M' und M' in bezug auf K' ist.*

34. Verzweigungsgrad und Defekt für Erweiterungen von unendlichem Trägheitsgrad bzw. Verzweigungsindex. Wir wollen nun den Begriff des Verzweigungsgrades auch für solche algebraische bewertete Erweiterungen L' eines bewerteten Körpers K' definieren, deren Trägheitsgrad *unendlich* ist. Zu dem Zwecke bemerken wir, daß, wie aus dem Obigen folgt, der Verzweigungsgrad von L' in bezug auf K' im Falle des endlichen Trägheitsgrades gleich der oberen Grenze der Verzweigungsgrade der in bezug auf K' *endlichen* Unterkörper von L' ist. Wir nehmen dies nun *als Definition des Verzweigungsgrades im Falle des unendlichen Trägheitsgrades von L' in bezug auf K' an.*

Was aber den Defekt von L' in bezug auf K' anbetrifft, so könnte man im Falle des unendlichen Trägheitsgrades von L' in bezug auf K', sofern der Verzweigungsindex von L' in bezug auf K' endlich bleibt, den Defekt wieder definieren als den Quotienten des Verzweigungsgrades durch den Verzweigungsindex. Wir ziehen es aber vor, den Defekt direkt auch im Falle des unendlichen Verzweigungsindex so zu definieren:

Ist L' eine bewertete algebraische Erweiterung von K', so verstehen wir unter dem Defekt δ von L' in bezug auf K' die — endliche oder unendliche — obere Grenze der Defekte der in bezug auf K' endlichen Zwischenkörper zwischen L' und K'.

Diese Definition deckt sich, nach dem am Schlusse des letzten Abschnitts Bemerkten, mit der früheren Definition, wenn der Trägheitsgrad t und der Verzweigungsindex j endlich sind. Ist aber t unendlich, aber wenigstens der Verzweigungsindex j von L' in bezug auf K' endlich, so wollen wir noch zeigen, daß *δ gleich dem Quotienten des Verzweigungsgrades durch den Verzweigungsindex ist.*

Denn ist der Verzweigungsgrad von L' in bezug auf K' unendlich, so besitzt L' Unterkörper, die endliche Erweiterungen von beliebig hohem

Verzweigungsgrad in bezug auf K' sind. Und da nach Satz II auch für diese endlichen Erweiterungen der Verzweigungsindex nicht größer als j bleibt, muß in ihnen der Quotient des Verzweigungsgrades durch den Verzweigungsindex, d. h. der Defekt, beliebig große Werte annehmen, so daß nach der obigen Definition der Defekt unendlich ist.

Ist aber der Verzweigungsgrad von L' in bezug auf K' endlich und gleich v, so gibt es einen in bezug auf K' endlichen Unterkörper Q' von L', dessen Verzweigungsgrad in bezug auf K' gleich v ist. Wir können ferner annehmen, daß der Verzweigungsindex von Q' gleich j ist, da wir sonst nur endlich viele Größen aus L' zu Q' zu adjungieren haben und dann wieder eine endliche Erweiterung erhalten. Da dann der Defekt von Q' in bezug auf K' gleich v/j ist, haben wir nur zu zeigen, daß größere Werte des Defektes bei einem in bezug auf K' endlichen Unterkörper Q_1' von L' nicht vorkommen können. Wäre dies nun der Fall, so betrachten wir den Körper Q_2', der aus Q' entsteht, wenn man zu Q' die Elemente einer Basis von Q_1' in bezug auf K' adjungiert. Dann wäre nach Satz II auch der Defekt von Q_2' größer als v/j, da Q_2' eine *endliche* Erweiterung von Q_1' ist. Da aber auch Q' in Q_2' enthalten ist, ist auch der Verzweigungsindex von Q_2' in bezug auf K' gleich j, und der Verzweigungsgrad von Q_2' kann nach Voraussetzung nicht größer als v sein. Daher kann der Defekt von Q_1' nicht größer als v/j sein, und v/j ist in der Tat die obere Grenze der Defekte aller in bezug auf K' endlichen Unterkörper von L'.

35. Ein Hilfssatz über Reduktion durch Adjunktion unendlicher Erweiterungen. Bevor wir nun das Analogon des Satzes VII für Körper vom unendlichen Trägheitsgrad beweisen, leiten wir den folgenden Hilfssatz her:

VIII. *Es sei L' eine endliche bewertete Erweiterung von M', die aus M' durch Adjunktion von endlich vielen Größen $A_1, \ldots, A_m$ hervorgeht, so daß $L' = M'(A_1, \ldots, A_m)$ ist. Es sei M' eine unendliche algebraische Erweiterung von K'. Es seien n, t, v, j bzw. der Grad, Trägheitsgrad, Verzweigungsgrad und Verzweigungsindex von L' in bezug auf M'. Dann gibt es eine endliche Erweiterung K_0' von K' zwischen M' und K', so daß für die obigen Konstanten des Körpers $K_0'(A_1, \ldots, A_m)$ in bezug auf K_0': Grad n', Trägheitsgrad t', Verzweigungsgrad v' und Verzweigungsindex j' gilt: $n' = n$, $t' \geqq t$, $v' \leqq v$, $j' \geqq j$.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{a}_1', \ldots, \mathfrak{a}_l'$ eine Basis des Restklassenkörpers $\mathfrak{L}$ von L' in bezug auf den Restklassenkörper $\mathfrak{M}$ von M'. Dann bestehen zwischen den $\mathfrak{a}_\tau'$ die Relationen

$$\mathfrak{a}_i' \mathfrak{a}_k' = \sum_{\tau=1}^{l} \mathfrak{c}_{ik\tau}' \mathfrak{a}_\tau', \tag{6, 7}$$

wo $c'_{ik\tau}$ zu $\mathfrak{M}$ gehören. Wir wählen irgendwie t Größen $a'_1, \ldots, a'_t$ in L' und t^3 Größen $c'_{ik\tau}$ in M', die resp. den Größen a'_τ bzw. den Größen $c'_{ik\tau}$ kongruent sind. Wir bezeichnen nun eine aus Potenzprodukten der A_μ bestehende Basis von L' in bezug auf M' mit $a_1, \ldots, a_n$. Dann gilt

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} e_{\mu\nu} a_\nu,$$

wo die $e_{\mu\nu}$ zu M' gehören. Ebenso bestehen zwischen den n Größen a_ν die n^3 Beziehungen

$$a_i a_k = \sum_{\tau=1}^{n} c_{ik\tau} a_\tau, \tag{6, 70}$$

wo die n^3 Größen $c_{ik\tau}$ zu M' gehören. Ferner lassen sich die Größen a'_τ durch die Basis a_ν in der Form ausdrücken

$$a'_\tau = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\tau\nu} a_\nu,$$

wo die nt Größen $b_{\tau\nu}$ zu M' gehören. Es seien ferner $b_1, \ldots, b_j$ j Größen aus L', deren Ordnungszahlen ein vollständiges Repräsentantensystem in bezug auf den Bewertungsmodul $\mathfrak{m}_{M'}$ darstellen. Diese j Größen lassen sich durch die Basis a_ν in der Form darstellen

$$b_i = \sum_{\nu=1}^{n} k_{i\nu} a_\nu, \qquad (i = 1, \ldots, j)$$

wo die $k_{i\nu}$ zu M' gehören. Es sei nun K'_0 der aus K' durch Adjunktion der $t^3 + n^3 + nt + jn + nm$ Größen $c_{ik\tau}$, $c'_{ik\tau}$, $b_{\tau\nu}$, $k_{i\nu}$, $e_{\mu\nu}$ entstehende Körper. Dann hat der Körper $K'_0(A_1, \ldots, A_m)$ in bezug auf K'_0 bereits *den Grad n*. Denn einerseits sind die Größen $a_1, \ldots, a_n$ in bezug auf K'_0 unabhängig, weil sie es sogar in bezug auf M' sind. Andererseits aber lassen sich alle Größen aus $K'_0(A_1, \ldots, A_m)$ linear durch $a_1, \ldots, a_n$ ausdrücken mit Koeffizienten aus K'_0. Denn jede Größe aus $K'_0(A_1, \ldots, A_m)$ läßt sich als ein Polynom in $a_1, \ldots, a_n$ mit Koeffizienten aus K'_0 darstellen, und dieses Polynom läßt sich vermöge der Relationen (6, 70) in eine Linearform in $a_1, \ldots, a_n$ umformen. Andererseits ist *der Trägheitsgrad t'* von $K'_0(A_1, \ldots, A_m)$ in bezug auf K'_0 wenigstens gleich t. Denn bezeichnen wir den Restklassenkörper von K'_0 mit $\mathfrak{K}_0$, so sind die t Größen $\mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_t$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$ linear unabhängig, weil sie es sogar in bezug auf $\mathfrak{M}$ sind. Daher gilt auch

$$v' = \frac{n'}{t'} \leqq \frac{n}{t} = v.$$

Ferner kommen unter den Ordnungszahlen von $K'_0(A_1, \ldots, A_m)$ die Ordnungszahlen von $b_1, \ldots, b_j$ vor, die inkongruent nach dem Modul $\mathfrak{m}_{M'}$ und daher erst recht nach dem Modul $\mathfrak{m}_{K'}$ sind. Daher ist der Ver-

zweigungsindex von $K_0'(A_1, \ldots, A_m)$ in bezug auf K_0' wenigstens gleich j, und unser Hilfssatz ist bewiesen [20]).

36. Produktsätze für Verzweigungsgrade und Defekte. Wir beweisen nunmehr das Analogon zum Satze VII:

IX. *Es sei L' eine bewertete algebraische Erweiterung von M', M' eine bewertete algebraische Erweiterung von K'; v, δ; v_1, δ_1; v_2, δ_2 seien bzw. die Verzweigungsgrade und Defekte von L' in bezug auf K', L' in bezug auf M' und M' in bezug auf K'. Dann gilt*

$$v \leqq v_1 v_2, \quad \delta \leqq \delta_1 \delta_2. \tag{6, 71}$$

Es sei L_1' ein endlicher Körper n-ten Grades über K', der in L' liegt und etwa eine Basis $a_1, \ldots, a_n$ in bezug auf K' besitzt. Sein Verzweigungsgrad sei v', sein Defekt δ', beide in bezug auf K'. Dann haben wir nur zu beweisen, daß

$$v' \leqq v_1 v_2, \quad \delta' \leqq \delta_1 \delta_2$$

ist. Wir betrachten nun den Körper $L_0' = M'(a_1, \ldots, a_n)$, der eine endliche Erweiterung von M' ist, und für den daher (in bezug auf M') der Verzweigungsgrad v_1' höchstens gleich v_1, und der Defekt höchstens

---

[20]) Es sei hier ein mit dem Satz VIII zusammenhängendes Beispiel einer endlichen Erweiterung mit positivem Defekt angegeben. Es sei U der Körper aller rationalen Funktionen einer Unbestimmten u mit ganzen rationalen Koeffizienten, die modulo p zu nehmen sind. V sei der Körper aller formalen Potenzreihen, die nach ganzen ins Unendliche wachsenden Potenzen einer Unbestimmten v fortschreiten und beliebige Koeffizienten aus U haben. Man bewerte V zu V', indem man allen von o verschiedenen Größen aus U die Bewertung 1 zuordnet und der Unbestimmten v die Bewertung $1/e$, also die Ordnungszahl 1. Es sei W die in einer perfekten und algebraisch abgeschlossenen Erweiterung Ω' von V' liegende Größe $u^p v^{1/p} + u^{2p} v^{1/p^2} + \ldots + u^{\nu p} v^{p^{-\nu}} + \ldots$, und man setze $K' = V'(W)$, $K'(v^{1/p}) = L'$. Dann ist der Relativgrad von L' in bezug auf K' gleich p, der Trägheitsgrad gleich 1, und man hat nur zu zeigen, daß der Verzweigungsindex gleich 1 ist, um einzusehen, daß der Defekt den Wert p hat. Hierzu genügt es aber zu beweisen, daß der Bewertungsmodul von K' aus allen Brüchen besteht, deren Nenner Potenzen von p sind. In der Tat enthält K' mit W auch

$$W^{p^{\varkappa-1}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} u^{\nu p^{\varkappa}} v^{p^{-\nu+\varkappa-1}} = u^{(\varkappa-1)p^{\varkappa}} \sum_{\nu=1}^{\infty} u^{\nu p^{\varkappa}} v^{p^{-\nu}} + \sum_{\nu=1}^{\varkappa-1} u^{\nu p^{\varkappa}} v^{p^{-\nu+\varkappa-1}}$$

daher auch

$$W_{\varkappa} = \sum_{\nu=1}^{\infty} u^{\nu p^{\varkappa}} v^{p^{-\nu}}, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots.$$

Da aber die Determinante $|u^{\nu p^{\varkappa}}|$, $(\nu, \varkappa = 1, 2, \ldots, m)$ als Differenzenprodukt der Größen $u^p, u^{p^2}, \ldots, u^{p^m}$ multipliziert mit einer Potenz von u nicht o ist, kann man in U m Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ so wählen, daß die Entwicklung von $\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu} W_{\mu}$ mit $v^{p^{-m}}$ beginnt, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

gleich δ_1 ist. Zu diesem Körper gibt es nach VIII einen endlichen, in M' liegenden Körper K_0' über K' derart, daß $K_0'(a_1, \ldots, a_n)$ in bezug auf K_0' höchstens den Verzweigungsgrad $v_1' \leqq v_1$ hat und einen Defekt δ_1', der höchstens gleich dem Defekt von $M'(a_1, \ldots, a_n)$ in bezug auf M' und daher erst recht höchstens gleich δ_1 ist. Der Verzweigungsgrad und der Defekt von K_0' in bezug auf K' seien v_2', δ_2', wo $v_2' \leqq v_2$, $\delta_2' \leqq \delta_2$ ist. Dann ist nach VI der Verzweigungsgrad von $K_0'(a_1, \ldots, a_n)$ in bezug auf K' gleich $v_1' v_2'$, und der Defekt hat den Wert $\delta_1' \delta_2'$. Da aber der Körper L_1' offenbar in $K_0'(a_1, \ldots, a_n)$ enthalten ist, sind v', δ' höchstens gleich dem Verzweigungsgrad bzw. dem Defekt von $K_0'(a_1, \ldots, a_n)$ in bezug auf K'.

$$v' \leqq v_1' v_2', \quad \delta' \leqq \delta_1' \delta_2',$$
$$v' \leqq v_1 v_2, \quad \delta' \leqq \delta_1 \delta_2,$$

w. z. b. w.

Aus dem damit bewiesenen Satz folgt nun weiter:

X. *Es sei L' eine bewertete algebraische Erweiterung von M', M' eine bewertete algebraische Erweiterung von K'. Sind L' und M' Trägheitserweiterungen von M' bzw. von K', so ist L' eine Trägheitserweiterung von K'.*

Denn reine Trägheitserweiterungen sind charakterisiert durch $v = 1$, und so folgt X sofort aus der in IX bewiesenen Relation $v \leqq v_1 v_2$.

37. Trägheitsgrößen. Wir beweisen endlich:

XI. *Es sei K' ein bewerteter Körper, $\mathfrak{R}$ sein Restklassenkörper. Es sei*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

ein in K' irreduzibles Polynom mit ganzen Koeffizienten aus K', derart, daß auch das zu $f(x)$ kongruente Polynom

$$\mathfrak{f}(x) = x^n + \mathfrak{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathfrak{a}_n$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ irreduzibel ist. Adjungiert man zu K' eine Wurzel α von $f(x)$, so läßt sich der so entstehende Körper $K'(\alpha)$ auf eine einzige Weise als Erweiterung von K' bewerten, und ist eine reine Trägheitserweiterung von K'.

Beweis: Daß $K'(\alpha)$ sich auf eine einzige Weise als Erweiterung von K' bewerten läßt, folgt nach Satz V, § 4 daraus, daß $f(x)$ auch im derivierten Körper $\bar{K}'$ von K' irreduzibel bleibt. Denn wäre in $\bar{K}'$

$$f(x) = (x^m + \ldots)(x^{n-m} + \ldots), \qquad 0 < m < n,$$

so würde daraus durch Übergang zu kongruenten Größen aus $\mathfrak{R}$ die Reduzibilität von $\mathfrak{f}(x)$ in $\mathfrak{R}$ folgen.

Ist nun $\mathfrak{L}$ der Restklassenkörper von $K'(\alpha)$ und $\mathfrak{a}$ das zu α kongruente Element aus $\mathfrak{L}$, so genügt $\mathfrak{a}$ der in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Gleichung

$\mathfrak{f}(x) = 0$, deren Grad gleich n ist. Daher ist $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}] \geqq n$, und da andererseits $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}] \leqq [K'(\alpha) : K'] = n$ ist, folgt $[\mathfrak{L} : \mathfrak{K}] = [K'(\alpha) : K']$, w. z. b. w.

Ist L' eine bewertete Erweiterung von K', so bezeichnen wir eine in bezug auf K' algebraische Größe aus L' als *Trägheitsgröße* in bezug auf K', wenn der Zwischenkörper $K'(\alpha)$ zwischen K' und L' eine Trägheitserweiterung von K' ist.

Die Eigenschaft von α, eine Trägheitsgröße in bezug auf K' zu sein, braucht nicht nur von der in K' irreduziblen Gleichung abzuhängen, der α genügt, sondern kann auch von der Bewertung von α oder genauer von $K'(\alpha)$ abhängig sein. Ist aber diese Gleichung in $\mathfrak{K}'$ irreduzibel, so ist α nach XI immer eine Trägheitsgröße in bezug auf K'.

38. Charakterisierung des Trägheitssatzes, Verzweigungssatzes und Defektsatzes. Wir haben bisher den Körper K' als einen beliebigen bewerteten Körper angenommen. *Von nun an werden wir ihn dagegen als relativ perfekt voraussetzen.* Es entspricht dies der folgenden Auffassung der sukzessiven Zerlegung eines Primteilers $\mathfrak{S}$ von K, der der Bewertung K' entspricht, in einer algebraischen Erweiterung Q von K[21]): Mit dem Übergang von K' zum derivierten Körper oder auch nur zu einem in der Norm von Q in bezug auf K' enthaltenen Zerlegungkörper wird von $\mathfrak{S}$ ein Primteiler $\mathfrak{p}$ abgespalten, ohne daß dabei der Restklassenkörper erweitert wird oder neue Elemente zum Bewertungsmodul hinzukommen. Daher ist der Grad des Zerlegungskörpers in bezug auf K' gleich seinem Verzweigungsgrad nach der bisher benutzten Definition. Wir werden daher von nun an K' von vornherein als relativ perfekt voraussetzen. Dann hat man sich die *Erweiterung* von K' zur irgendwie bewerteten algebraischen Erweiterung Q' eigentlich in zwei Schritten zu denken. Mit dem ersten Schritt — dem Übergang zum größten in Q' enthaltenen Trägheitskörper — wird die maximale Erweiterung des Restklassenkörpers bewirkt. Durch eine *weitere Erweiterung* wird sodann die Ergänzung des Bewertungsmoduls entsprechend dem Verzweigungsindex von Q' in bezug auf K' erzielt. Sodann kommt eventuell eine Erweiterung zu Q', bei der sowohl Trägheitsgrad als auch Verzweigungsindex nicht mehr vergrößert werden, sondern nur der Verzweigungsgrad und damit der Defekt. Der soeben geschilderte Sachverhalt tritt allerdings in der Regel nicht in so reiner Form auf.

Wir werden sagen, daß für die algebraische Erweiterung von Q' in bezug auf K' der *Trägheitssatz* gilt, wenn sie einen Zwischenkörper enthält, der eine Trägheitserweiterung von K' ist und in bezug auf den der Trägheitsgrad von Q' gleich 1 ist.

---

[21]) Vgl. hierzu die Entwicklungen in § 9, Nr. 58.

Wir werden ferner sagen, daß in Q' der *Verzweigungssatz* gilt, wenn der Verzweigungsgrad von Q' in bezug auf K' gleich dem Verzweigungsindex und damit der Defekt von Q' in bezug auf K' gleich 1 ist.

Gilt der Verzweigungssatz aber nicht, so werden wir beweisen, daß der Defekt von Q' in bezug auf K', wenn er endlich ist, immer eine ganze Zahl und zwar eine Primzahlpotenz ist. Diesen Sachverhalt werden wir als den *Defektsatz* bezeichnen. Aus dem Defektsatz folgt insbesondere, daß stets *der Verzweigungsgrad von Q' in bezug auf K' eine ganze Zahl und folglich der Trägheitsgrad von Q' in bezug auf K' ein Teiler des Relativgrades von Q' in bezug auf K' ist, und ebenso der Verzweigungsindex ein Teiler des Verzweigungsgrades.*

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse, wenn sowohl der Körper K' als auch sein Restklassenkörper die Charakteristik 0 haben. Wir werden dann vom *funktionentheoretischen Fall* sprechen. Demgegenüber haben wir es mit dem *zahlentheoretischen Fall* zu tun, wenn entweder der zu untersuchende Körper K' die Charakteristik p hat, oder wenn er zwar die Charakteristik 0 hat, sein Restklassenkörper aber die Charakteristik p, so daß es sich um die Primteiler der rationalen Primzahl p handelt.

Es wird sich nun ergeben, daß im funktionentheoretischen Fall der Trägheitssatz und der Verzweigungssatz stets gelten; im zahlentheoretischen Fall auf jeden Fall dann, wenn der Grad der betreffenden Erweiterung zur Primzahl p teilerfremd ist. bzw. wenn die Gradzahlen ihrer in bezug auf K' endlichen Unterkörper zu p teilerfremd sind. Ist aber der Grad der Erweiterung durch p teilbar oder gilt dies für in bezug auf K' endliche Unterkörper, so braucht der Trägheitssatz nicht zu gelten, und der Defekt braucht nicht gleich 1 zu sein, muß aber dann stets eine Potenz von p sein.

39. Ein Beispiel reiner Defekterweiterungen. Wir geben zum Schluß dieses Paragraphen ein rein zahlentheoretisches Beispiel, an dem man erstens das Auftreten von Erweiterungen mit einem Defekt größer als 1 erkennt, und in dem zweitens die in der Formulierung des Satzes VIII angegebene Ungleichung $\delta \leqq \delta_1 \delta_2$ sich nicht durch die Gleichung $\delta = \delta_1 \delta_2$ ersetzen läßt.

Es sei K der aus dem Körper R aller rationalen Zahlen durch Adjunktion aller reellen Wurzeln $\sqrt[2^n]{2}$ für $n = 1, 2, \ldots$ entstehende unendliche Körper. Wir adjungieren nun zu K $\sqrt{3}$ und behaupten, daß, wenn der Körper R bewertet wird, indem der Primzahl 2 die Ordnungszahl 1 und allen anderen Primzahlen die Ordnungszahl 0 zugewiesen wird, dann für die entsprechenden bewerteten Körper K' und $K'(\sqrt{3})$ die Defekte in

bezug auf R' gleich 1 sind, während der Defekt von $K'(\sqrt{3})$ in bezug auf K' gleich 2 ist. — Wir betrachten zuerst den Körper $K'_n = R'(\xi)$, $\xi = \sqrt[2^n]{2}$ und daneben den Körper $K'_n(\sqrt{3})$. Der Verzweigungsindex von K'_n in bezug auf R' ist wenigstens gleich 2^n und höchstens gleich dem Grade von K'_n in bezug auf K', daher genau gleich 2^n, so daß die K'_n definierende Gleichung für ξ vom Grade 2^n und mit Koeffizienten aus R' auch im derivierten Körper von R' irreduzibel bleibt, und K'_n läßt sich folglich nur auf eine Weise bewerten.

Da ξ in K'_n ein Primideal ersten Grades mit der Norm 2 ist, ist jede durch ξ nicht teilbare ganze Zahl von K'_n mod ξ kongruent einer natürlichen Zahl und daher kongruent 1. Wir behaupten nun, daß im Körper $K'_n(\sqrt{3})$ das Primideal ξ von K'_n *das Quadrat eines Primideals* wird. Um dies zu beweisen, zeigen wir, daß $\sqrt{3}$ nicht in K'_n liegt und daß ξ in der Relativdifferente von $K'(\sqrt{3})$ in bezug auf K' aufgeht, d. h., daß, wenn $a + b\sqrt{3}$ eine ganze Zahl aus $K'_n(\sqrt{3})$ ist, wo a und b in K'_n liegen, dann $2b\sqrt{3}$ durch ξ teilbar ist. Die erste Behauptung folgt aus der weiter unten nachgewiesenen Unmöglichkeit der Kongruenz (6, 80) in K'_n. Ist aber $a + b\sqrt{3}$ ganz, so müssen die Spur $2a$ und die Norm $a^2 - 3b^2$ von $a + b\sqrt{3}$ in bezug auf K'_n ganz sein. Dann ist

$$12(a^2 - 3b^2) = 3(2a)^2 - (6b^2)^2 \equiv 0 \pmod 4 \tag{6, 8}$$

eine durch 4 teilbare ganze Zahl, und da $2a$ ganz ist, muß auch $6b$ ganz sein. Wäre nun $6b = \beta$ durch ξ nicht teilbar, so könnte auch $2a = \alpha$ durch ξ nicht teilbar sein. Dann gilt aber für $\beta \equiv \gamma\alpha \pmod 4$ nach (6, 8)

$$3 \equiv \gamma^2, \quad \gamma^2 + 1 \equiv 0 \pmod 4. \tag{6, 80}$$

Da dann γ die Form $1 + \pi\delta_1$ haben muß, wo π eine Potenz von ξ und $\delta_1 \equiv 1 \pmod \xi$ ist, folgt

$$2 + \pi^2\delta_1^2 + 2\pi\delta_1 \equiv 0 \pmod 4. \tag{6, 81}$$

Daher ist π^2 durch $2 = \xi^{2^n}$ teilbar, offenbar aber durch keine höhere Potenz von ξ, da sonst auch 2 durch eine höhere Potenz von ξ teilbar sein müßte. Daher ist $\pi = \xi^{2^{n-1}}$, und aus (6, 81) folgt

$$1 + \delta_1^2 + \xi^{2^{n-1}}\delta_1 \equiv 0 \pmod{\xi^{2^n}}.$$

Es gelte nun für ein m mit $1 \leqq m \leqq n$, und ein ganzes δ_m aus K'_n

$$1 + \delta_m^2 + \xi^{2^{n-m}}\delta_m \equiv 0 \pmod{\xi^{2^{n-m+1}}}, \tag{6, 82}$$

wo δ_m offenbar durch ξ nicht teilbar und daher kongruent 1 (mod ξ) ist. Setzen wir dann $\delta_m = 1 + \pi\delta'$, wo π eine Potenz von ξ und $\delta' \equiv 1 \pmod \xi$ ist, so folgt aus (6, 82)

$$2 + 2\pi\delta' + \pi^2\delta'^2 + \xi^{2^{n-m}}(1 + \pi\delta') \equiv 0 \pmod{\xi^{2^{n-m+1}}}$$

oder, da ξ^{2^n-m+1} in 2 aufgeht,

$$\pi^2\delta'^2 + \xi^{2^n-m}\pi\delta' + \xi^{2^n-m} \equiv 0 \pmod{\xi^{2^n-m+1}}.$$

Daher muß π^2 *genau* durch ξ^{2^n-m} teilbar sein, und es ist folglich $\pi = \xi^{2^n-m-1}$ und daher

$$1 + \delta'^2 + \xi^{2^n-m-1}\delta' \equiv 0 \pmod{\xi^{2^n-m}}.$$

Dies ist aber die zu (6, 8 2) analoge Relation für $m+1$. Da nun die Relation (6, 8 2) für $m = 1$ besteht, müßte sie auch für $m = n$ bestehen, die Zahl $\pi = \xi^{2^n-n-1} = \sqrt{\xi}$ kommt aber in K_n' nicht vor, so daß (6, 80) in K_n' unmöglich ist.

Daher ist der Verzweigungsindex von $K_n'(\sqrt{3})$ in bezug auf R' gleich 2^{n+1} und also gleich dem Grade von $K_n'(\sqrt{3})$ in bezug auf K'. Daher folgt, daß für jeden in bezug auf R' endlichen Unterkörper von K' und $K'(\sqrt{3})$ der Verzweigungsindex gleich dem Grade dieses Unterkörpers und daher sowohl der Trägheitsgrad als auch der Defekt von K' und $K'(\sqrt{3})$ gleich 1 sind. Nun sind aber für den Körper $K'(\sqrt{3})$, wie man sofort einsieht, der Trägheitsgrad und der Verzweigungsindex in bezug auf K' gleich 1, so daß $K'(\sqrt{3})$ den Defekt 2 in bezug auf K' hat. In der Tat könnte der Verzweigungsindex von $K'(\sqrt{3})$ in bezug auf K', wenn er größer als 1 wäre, nur den Wert 2 haben; dann gäbe es aber in $K'(\sqrt{3})$ eine Größe mit einer Ordnungszahl ω derart, daß 2ω eine in K' und daher in einem K_n' vorkommende Ordnungszahl wäre. Dann müßte aber nach der Definition des Körpers K' auch ω Ordnungszahl einer Größe aus K' sein. Daß aber $K'(\sqrt{3})$ in bezug auf K' den Trägheitsgrad 1 hat, folgt aus Satz VIII. Daher ist in der Tat, wie behauptet, $K'(\sqrt{3})$ eine „*reine Defekterweiterung*" von K'.

Die Betrachtungen dieser Nummer bleiben unverändert bestehen, wenn unter dem Körper R' der Körper aller rationalen p-adischen Zahlen für $p = 2$ verstanden wird. Dies ist deshalb wichtig, weil dann der Körper K' relativ perfekt wird.

§ 7.

Über die Abspaltung der Trägheitskörper.

40. Charakterisierung von Trägheitsgrößen durch Kongruenzen. In diesem ganzen Paragraphen wird K' ein relativ perfekter Körper sein. Wir beginnen mit zwei Reduzibilitätssätzen.

I. *Es sei L' eine bewertete algebraische Erweiterung des relativ perfekten Körpers K'. Es sei*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus K' derart, daß das zu $f(x)$ kongruente Polynom $\mathfrak{f}(x)$ mit Koeffizienten aus dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von K' in $\mathfrak{K}$ irreduzibel und von der ersten Art ist. Es sei α eine ganze Größe aus L', die in L' der Kongruenz genügt:

$$f(\alpha) \equiv 0 \qquad (L').$$

Dann besitzt $f(x)$ in L' eine und nur eine Wurzel a, die kongruent α ist, und diese Wurzel liegt bereits im Körper $K'(\alpha)$.

Beweis: Wir setzen in $f(x)$ $x = \alpha + y$, dann verwandelt sich die Gleichung $f(x) = 0$ in

$$g(y) \equiv f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} y + \ldots + y^n = 0.$$

Hier ist aber $f'(\alpha)$ sicher nicht kongruent 0, da aus dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Kongruenzen $f(\alpha) \equiv 0$, $f'(\alpha) \equiv 0$ folgen würde, daß $\mathfrak{f}(x)$ von der zweiten Art wäre. Andererseits sind die Koeffizienten von $f(x)$ ganz, und daher gilt das gleiche für die Koeffizienten von $g(y)$. Daher besteht das Newtonsche Diagramm von $g(y)$ aus zwei Seiten, von denen die eine von P_0 bis P_{n-1} auf der ν-Achse liegt, während die andere von P_{n-1} bis P_n eine *positive* Steigung besitzt. Nach Nr. 21 ist also $g(y)$ im relativ perfekten Körper $K'(\alpha)$ reduzibel und zerfällt in zwei Faktoren, von denen der eine linear ist, während der andere den Grad $n-1$ hat und ein auf der ν-Axe liegendes Newtonsches Diagramm, so daß seine Wurzeln die Ordnung Null besitzen müssen. Daher besitzt die Gleichung $g(y) = 0$ im Körper $K'(\alpha)$ eine Wurzel, die in L' kongruent α ist, und diese Wurzel bleibt in jeder bewerteten Erweiterung von $K'(\alpha)$ die einzige, die kongruent α ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

41. Ein Kongruenzkriterium für Reduzibilität. II. *Es sei*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus einem relativ perfekten bewerteten Körper K', und es sei das diesem Polynom kongruente Polynom $\mathfrak{f}(x)$ mit Koeffizienten aus dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von K' in $\mathfrak{K}$ in der Form darstellbar:

$$(7,1) \qquad \mathfrak{f}(x) = \varphi_1(x)^{k_1} \varphi_1(x)^{k_2} \ldots \varphi_m(x)^{k_m},$$

wo $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ verschiedene in $\mathfrak{K}$ irreduzible Polynome mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, den höchsten Koeffizienten 1 und den Graden $l_1, \ldots, l_m$ sind. Dann zerfällt $f(x)$ in K' in ein Produkt von m Faktoren, die bzw. kongruent $\varphi_1(x)^{k_1}, \ldots, \varphi_m(x)^{k_m}$ sind[22]).

[22]) Dieser Satz folgt auch leicht aus einem allgemeinen Resultat von Rychlik (Rychlik 1, S. 100ff.).

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß unser Satz für alle Polynome niedrigeren Grades bereits bewiesen ist, denn er ist für Polynome ersten Grades trivial. Es genügt daher zu zeigen, daß $f(x)$ in K' einen Teiler mit dem höchsten Koeffizienten 1 besitzt, der kongruent einer Potenz von $\varphi_1(x)$ ist. Es sei $h(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus K', das kongruent $\varphi_1(x)$ ist und den höchsten Koeffizienten 1 hat. $h(x)$ ist in K' irreduzibel. L' sei eine endliche algebraische Erweiterung von K', in der $h(x)$ vollständig zerfällt, $\mathfrak{L}$ der zugehörige Restklassenkörper, in dem offenbar $\varphi_1(x)$ vollständig zerfallen muß. Es seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ die verschiedenen Wurzeln von $\varphi_1(x)$ in $\mathfrak{L}$, von denen jede die Mehrfachheit t haben möge. — t ist nur dann größer als 1, wenn $\varphi_1(x)$ von der zweiten Art ist, und dann hat nach Steinitz (1, S. 231) jede der Größen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ die gleiche Mehrfachheit $t = p^f$, wo f der Exponent von $\varphi_1(x)$ und p die Charakteristik von $\mathfrak{R}$ ist. — Es sei α eine Größe aus L', die kongruent $\mathfrak{a}_1$ ist. Setzen wir in $f(x)$ $x = \alpha + y$, so gilt

$$g(y) = f(\alpha + y) \equiv \varphi_1(\alpha + y)^{k_1} \ldots \varphi_m(\alpha + y)^{k_m} \qquad (L'),$$

und die rechte Seite hierin ist nach unseren Annahmen kongruent

$$y^{tk_1}(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + y^{n-tk_1}),$$

wo $b_0 \not\equiv 0$ ist. Daher hat $g(y)$ die Gestalt

$$g(y) = c_0 + c_1 y + \ldots + c_{tk_1-1} y^{tk_1-1} + c_{tk_1} y^{tk_1} + \ldots + y^n,$$

wo $c_0, \ldots, c_{tk_1-1}$ kongruent Null sind, während c_{tk_1} zwar ganz, aber sicher nicht kongruent Null in L' ist. Da aber alle Koeffizienten von $g(y)$ ganze Größen aus L' sind, hat das Newtonsche Diagramm von $g(y)$ eine auf der v-Axe liegende Seite von P_0 bis P_{n-tk_1}, an die sich eine oder mehrere Seiten positiver Steigung anschließen. Daher läßt sich $g(y)$ im relativ perfekten Körper $K'(\alpha)$ als ein Produkt von zwei Faktoren darstellen, von denen der eine $E(y)$ vom Grad $n - tk_1$ ein gradliniges auf der v-Axe liegendes Newtonsches Diagramm hat, während der andere nur den Anfangspunkt seines Newtonschen Diagramms auf der v-Axe und die übrigen Punkte sämtlich oberhalb dieser Axe hat:

$$g(y) = (y^{tk_1} + g_\alpha^*(y))\, E(y).$$

Daraus folgt weiter

$$f(x) = ((x - \alpha)^{tk_1} + f_\alpha^*(x))\, E_\alpha(x), \qquad (7,2)$$

wo sämtliche Koeffizienten von $f_\alpha^*(x)$ in $K'(\alpha)$, daher auch in L' liegen und positive Ordnungszahlen haben. In der Formel (7, 2) setzen wir nun für α sämtliche Wurzeln von $h(x)$ aus L' ein und multiplizieren. Es ist dabei zu beachten, daß, da der Körper K' relativ perfekt ist, die in bezug auf diesen Körper konjugierten Größen gleiche Bewertungen besitzen, so daß

das über (7, 2) Gesagte für jedes α gilt. Multiplizieren wir die so entstehenden Gleichungen, so erhalten wir

$$f(x)^{l_1} = \prod_{\lambda=1}^{l_1} ((x-\alpha_\lambda)^{tk_1} + f^*_{\alpha_\lambda}(x)) \prod_{\lambda=1}^{l_1} E_{\alpha_\lambda}(x).$$

Das an der ersten Stelle stehende Produkt ist aber ein Polynom $F(x)$ mit Koeffizienten aus K' und dem höchsten Koeffizienten 1, für das in L' und daher auch in K'

$$F(x) \equiv h(x)^{tk_1} \equiv \varphi_1(x)^{tk_1} \qquad (K')$$

gilt. Daher muß der größte gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $F(x)$ wegen der Irreduzibilität von $\varphi_1(x)$ im Körper $\mathfrak{R}$ einen im Körper K' liegenden Teiler mit dem höchsten Koeffizienten 1 besitzen, der einer Potenz von $\varphi_1(x)$ kongruent ist. Dividieren wir $f(x)$ durch diesen Teiler, so ist damit der Grad von $f(x)$ vermindert und nach unserer Annahme der Satz bewiesen. —

42. Der maximale Relativgrad der Elemente eines Restklassenkörpers. Ist L eine endliche Erweiterung eines Körpers K vom Grade n in bezug auf K, so ist n im Falle der Charakteristik 0 zugleich der maximale Grad eines Elements von L in bezug auf K und bekanntlich durch den Grad jedes Elements von L in bezug auf K teilbar. Ist aber die Charakteristik von K und L eine Primzahl p, so braucht dies nicht richtig zu sein; immerhin ist auch dann der maximale Grad g eines Elements von L in bezug auf K durch den Grad jedes Element von L in bezug auf K teilbar und selbst ein Teiler von n. Dann ist aber n/g stets eine Potenz von p, und, wenn p überhaupt ein Teiler von n ist, ist auch g durch p teilbar, so daß also g auf jeden Fall durch jeden Primteiler von n teilbar ist.

III. *Es sei L' eine bewertete endliche Erweiterung eines relativ perfekten Körpers K' vom Grade n in bezug auf K'. Dann ist der maximale Grad eines Elements des Restklassenkörpers $\mathfrak{L}$ von L' in bezug auf den Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von K' ein Teiler des maximalen Grades eines Elements von L' in bezug auf K', daher auch ein Teiler von n. Insbesondere ist n durch jeden Primteiler des Trägheitsgrades von L' in bezug auf K' teilbar.*

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{f}(x) \equiv x^t + \mathfrak{a}_1 x^{t-1} + \ldots + \mathfrak{a}_t$$

das in $\mathfrak{K}$ irreduzible Polynom mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$, dessen Wurzel ein Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{L}$ vom maximalen Grad t in bezug auf $\mathfrak{K}$ ist. Es sei α eine zu $\mathfrak{a}$ kongruente Größe aus L', und

$$g(x) \equiv x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

sei das in K' irreduzible Polynom mit Koeffizienten aus K', dessen Wurzel α ist. Da α ganz und K' relativ perfekt ist, sind die Koeffizienten $b_1, \ldots, b_m$ ganz. Es sei

$$\mathfrak{g}(x) \equiv x^m + \mathfrak{b}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathfrak{b}_m$$

das zu $g(x)$ kongruente Polynom mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$. Da K' relativ perfekt und $g(x)$ in K' irreduzibel ist, muß nach II $\mathfrak{g}(x)$ eine Potenz eines in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Polynoms sein. Da aber $\mathfrak{g}(x)$ mit $\mathfrak{f}(x)$ eine gemeinsame Wurzel $\mathfrak{a}$ hat, ist $\mathfrak{g}(x)$ durch $\mathfrak{f}(x)$ teilbar und daher gleich einer Potenz von $\mathfrak{f}(x)$. Daher ist t ein Teiler von m, und folglich auch ein Teiler des maximalen Grades eines Elements von L' in bezug auf K'.

43. Reguläre Trägheitsgrößen. Es sei α eine Trägheitsgröße in bezug auf einen relativ perfekten bewerteten Körper K', und es sei $f(x)$ das in K' irreduzible Polynom mit Koeffizienten aus K', dessen Wurzel α ist:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Ist nun das zu $f(x)$ kongruente Polynom mit Koeffizienten aus dem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von K' in $\mathfrak{R}$ irreduzibel und von der ersten Art, so nennen wir α eine *reguläre* Trägheitsgröße in bezug auf K'. Dann ist also die zu α kongruente Größe $\mathfrak{a}$ aus dem Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von $K'(\alpha)$ eine primitive Größe von $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{R}$. Eine endliche bewertete Trägheitserweiterung L' des relativ perfekten Körpers K' nennen wir eine *reguläre* Trägheitserweiterung von K', wenn sie als primitives Element eine reguläre Trägheitsgröße in bezug auf K' besitzt. Hierzu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von L' ein primitives Element erster Art $\mathfrak{a}$ in bezug auf den Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von K' besitzt, also von der ersten Art in bezug auf $\mathfrak{R}$ ist. Denn das zu $\mathfrak{a}$ kongruente Element aus L' kann keiner Gleichung niedrigeren Grades in bezug auf K' genügen, als $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{R}$.

IV. *Es sei L' eine bewertete Erweiterung des relativ perfekten Körpers K', $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$ seien die zugehörigen Restklassenkörper, $\mathfrak{a}$ sei ein Element von $\mathfrak{L}$ von der ersten Art in bezug auf $\mathfrak{R}$, dann gibt es in L' eine zu $\mathfrak{a}$ kongruente, in bezug auf K reguläre Trägheitsgröße a.*

Beweis: Denn ist $\mathfrak{a}$ Wurzel des in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Polynoms

$$\mathfrak{f}(x) = x^n + \mathfrak{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathfrak{a}_n$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, und ist

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

ein zu $\mathfrak{f}(x)$ kongruentes Polynom mit Koeffizienten aus K', so gilt für jedes zu $\mathfrak{a}$ kongruente Element α aus L' die Kongruenz

$$f(\alpha) \equiv 0 \qquad (L').$$

Daher besitzt nach Satz I das Polynom $f(x)$ in L' eine Wurzel a, die kongruent α und daher auch kongruent $\mathfrak{a}$ ist. Und da der Grad von $f(x)$ wiederum gleich n ist, ist a eine reguläre Trägheitsgröße in bezug auf K', deren Existenz behauptet wurde.

V. *Es sei L' eine algebraische bewertete Erweiterung eines relativ perfekten Körpers K', M' ein Zwischenkörper zwischen K' und L' und α eine Größe aus L, die eine reguläre Trägheitsgröße in bezug auf K' ist. Dann ist α eine reguläre Trägheitsgröße auch in bezug auf M'.*

Beweis: Ist α Wurzel des in K' irreduziblen Polynoms

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

so ist das kongruente Polynom mit Koeffizienten aus dem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von K':

$$\mathfrak{f}(x) = x^n + \mathfrak{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathfrak{a}_n$$

in $\mathfrak{R}$ irreduzibel. Ist $g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ der in M' irreduzible Teiler von $f(x)$ mit Koeffizienten aus M', dessen Wurzel α ist, so haben wir nur zu beweisen, daß das zu $g(x)$ kongruente Polynom mit Koeffizienten aus dem Restklassenkörper $\mathfrak{M}$ von M'

$$\mathfrak{g}(x) = x^m + \mathfrak{b}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathfrak{b}_m$$

im Körper $\mathfrak{M}$ irreduzibel ist. Nun ist aber $\mathfrak{g}(x)$ sicher ein Polynom mit lauter verschiedenen Wurzeln, da es ein Teiler von $\mathfrak{f}(x)$ ist und das letzte Polynom nach Voraussetzung in $\mathfrak{R}$ irreduzibel und von der ersten Art ist. Wäre aber dann $\mathfrak{g}(x)$ in $\mathfrak{M}$ reduzibel, so müßte nach Satz II auch $g(x)$ im relativ perfekten Körper M' reduzibel sein.

44. Reguläre Trägheitserweiterungen. Wir nennen nun eine beliebige Trägheitserweiterung L' des relativ perfekten Körpers K' eine *reguläre Trägheitserweiterung* von K', wenn jede in ihr liegende endliche Erweiterung von K' regulär in bezug auf K' ist. Es läuft dies darauf hinaus, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von L' eine Erweiterung erster Art des Restklassenkörpers $\mathfrak{R}$ von K' ist. Jeder Zwischenkörper zwischen L' und K' ist dann wiederum eine reguläre Trägheitserweiterung von K'.

VI. *Es sei L' eine reguläre Trägheitserweiterung von M', M' eine reguläre Trägheitserweiterung des relativ perfekten Körpers K', dann ist L' eine reguläre Trägheitserweiterung von K'.* — Denn sind $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}$ die Restklassenkörper von L', M', K', so sind nach Voraussetzung $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ in bezug auf $\mathfrak{M}$ von der ersten Art, daher ist auch $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{R}$ von der ersten Art (Steinitz 1, S. 235).

VII. *Sind in einer bewerteten Erweiterung L' eines relativ perfekten Körpers K' zwei reguläre Trägheitserweiterungen M' und M_1' von K' enthalten, so ist auch das in L' enthaltene kleinste gemeinsame Vielfache Q' von M' und M_1' eine reguläre Trägheitserweiterung von K'.* Es genügt,

den Beweis für den Fall zu führen, daß M' und M_1' *endlich* in bezug auf Q' sind, da jeder in bezug auf K' endliche Zwischenkörper zwischen Q' und K' bereits im kleinsten gemeinsamen Vielfachen von zwei in bezug auf K' *endlichen* Unterkörpern von M' und M_1' steckt. Es sei nun α ein primitives Element von M_1' in bezug auf K', das zugleich eine reguläre Trägheitsgröße in bezug auf K' ist. Dann ist nach V α eine reguläre Trägheitsgröße in bezug auf M', daher ist das kleinste gemeinsame Vielfache $M'(\alpha)$ von M' und M_1' eine reguläre Trägheitserweiterung von M' und daher nach Satz VI auch eine reguläre Trägheitserweiterung von K'.

Dem Satz VII läßt sich ein anderer an die Seite stellen, in dem etwas weniger vorausgesetzt und etwas weniger behauptet wird.

VIII. *Sind in einer bewerteten Erweiterung L' eines relativ perfekten Körpers K' zwei Trägheitserweiterungen M' und M_1' von K' enthalten, von denen die eine eine reguläre Trägheitserweiterung ist, so ist auch das in L' liegende kleinste gemeinsame Vielfache von M' und M_1' eine Trägheitserweiterung in bezug auf K'.*

Beweis: Es sei M_1' eine reguläre Trägheitserweiterung von K'. Wie beim Beweis von VI darf man M' uud M_1' als *endliche* Erweiterungen von K' annehmen. Ist $M_1' = K'(\alpha)$, wo α eine reguläre Trägheitsgröße in bezug auf K' ist, so ist α nach V auch eine reguläre Trägheitsgröße in bezug auf M', daher ist wiederum das kleinste gemeinsame Vielfache $M'(\alpha)$ von M' und M_1' eine Trägheitserweiterung von M', und daher nach Satz VII, § 6 auch eine Trägheitserweiterung von K'.

IX. *Ist in einer bewerteten Erweiterung L' eines relativ perfekten Körpers K' eine Menge S von regulären Trägheitserweiterungen in bezug auf K' enthalten, so ist das in L' liegende kleinste gemeinsame Vielfache Q' der Erweiterungen aus S eine reguläre Trägheitserweiterung von K'.* — Denn jeder in bezug auf K' endliche Unterkörper von Q' liegt bereits im kleinsten gemeinsamen Vielfachen von *endlich vielen* Erweiterungen von S und dieses kleinste gemeinsame Vielfache ist, wie durch wiederholte Anwendung des Satzes VII folgt, eine reguläre Trägheitserweiterung von K'.

45. Spezieller und allgemeiner Trägheitssatz. Wir können nunmehr leicht den Beweis des folgenden Satzes führen:

X. Der spezielle Trägheitssatz. *Es sei L' eine bewertete algebraische Erweiterung des relativ perfekten Körpers K'. Dann gibt es in L' einen eindeutig bestimmten Zwischenkörper M' zwischen K' und L', der eine reguläre Trägheitserweiterung von K' ist und jede in bezug auf K' reguläre Trägheitsgröße aus L' enthält. Es gibt dann keinen Zwischenkörper zwischen L' und M', der von M' verschieden wäre und eine reguläre Trägheitserweiterung von M' wäre. Sind die Restklassenkörper von L', M', K' bzw. $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$,*

so ist $\mathfrak{M}$ eine Erweiterung erster Art von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ ein Wurzelkörper in bezug auf $\mathfrak{M}$.

Denn jede in bezug auf K' reguläre Trägheitsgröße aus L' definiert eine reguläre Trägheitserweiterung von K'. Das kleinste gemeinsame Vielfache M' dieser regulären Trägheitserweiterungen ist nach VIII eine reguläre Trägheitserweiterung von K' und enthält jede in bezug auf K' reguläre Trägheitsgröße aus M'. Der Restklassenkörper $\mathfrak{M}$ von M' ist von der ersten Art in bezug auf $\mathfrak{K}$. Gäbe es im Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von L' ein Element $\mathfrak{a}$ von der ersten Art in bezug auf $\mathfrak{M}$, so wäre $\mathfrak{a}$ auch in bezug auf $\mathfrak{K}$ von der ersten Art, und eine zu $\mathfrak{a}$ kongruente Größe α von L' wäre nach Satz I eine reguläre Trägheitsgröße in bezug auf K', gehörte also zu M', und $\mathfrak{a}$ gehörte daher zu $\mathfrak{M}$. Daher ist $\mathfrak{L}$ ein Wurzelkörper in bezug auf $\mathfrak{M}$. Wäre ferner α eine reguläre Trägheitsgröße aus L' vom Grade $n > 1$ in bezug auf M', so ist das entsprechende Element $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{L}$ eine Größe erster Art vom Grade $n > 1$ in bezug auf $\mathfrak{M}$, was unmöglich ist. Daher muß α zu M' gehören, womit X bewiesen ist. — Wir werden den Körper M' als *die größte in L' enthaltene reguläre Trägheitserweiterung von K' bezeichnen.*

Ist im funktionentheoretischen Fall $\mathfrak{L}$ von der Charakteristik 0, so muß im Satz X $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{M}$ identisch sein, und L' besitzt dann den Trägheitsgrad 1 in bezug auf M'. Ist im zahlentheoretischen Fall p die Charakteristik von $\mathfrak{K}$, und ist $\mathfrak{L}$ nicht identisch mit $\mathfrak{M}$, so ist der Grad jedes in bezug auf $\mathfrak{M}$ endlichen Zwischenkörpers zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ eine Potenz von p, und daher ist nach Satz III der Grad eines geeigneten Zwischenkörpers zwischen L' und M' durch p teilbar. Daher folgt:

XI. *Im funktionentheoretischen Fall gilt der Trägheitssatz. Im zahlentheoretischen Fall gilt der Trägheitssatz, wenn der Relativgrad der betreffenden Erweiterung bzw. jeder in ihr enthaltenen endlichen Erweitererung zur Charakteristik p teilerfremd ist.*

46. Ein Gegenbeispiel zum Trägheitssatz. Charakteristik 0. Wir zeigen nunmehr an zwei Beispielen, daß der Trägheitssatz in den beiden zahlentheoretischen Fällen nicht zu gelten braucht.

A. Es sei R_t der Körper aller rationalen Funktionen der Unbestimmten t mit gewöhnlichem rationalen Zahlenkoeffizient. p sei eine beliebige Primzahl. Man adjungiere zu R_t die Größe

$$x = \sqrt[p]{t + \sqrt[p]{p}}, \tag{7,3}$$

wodurch ein Körper $R_t(x)$ vom Grade p^2 in bezug auf R_t entsteht. Bewertet man den Körper R_t, indem jeder Größe, die „genau" durch p^ω teilbar ist, ω als Ordnungszahl, und damit $e^{-\omega}$ als Bewertung zugewiesen

wird, so ist der Bewertungsmodul von R_t der Modul aller ganzen Zahlen. Da in $R_t(x)$ die Größe $x^p - t$ gleich $\sqrt[p]{p}$ ist, ist der Verzweigungsindex j von $R_t(x)$ in bezug auf R_t wenigstens gleich p. Andererseits ist der Restklassenkörper $\mathfrak{R}_t$ von R_t die Gesamtheit aller mod p genommenen rationalen Funktionen von t mit rationalen Zahlenkoeffizienten. Adjungiert man zu $\mathfrak{R}_t$ die Restklasse $\mathfrak{x}$ der in $R_t(x)$ zu x kongruenten Größen, so gilt im Körper $\mathfrak{R}_t(\mathfrak{x})$ die Relation $\mathfrak{x}^p - t = 0$, deren linke Seite in $\mathfrak{R}_t$ irreduzibel ist. Daher ist der Trägheitsgrad τ von $R_t(x)$ in bezug auf R_t wenigstens gleich p. Da aber nach Satz IV, § 6 $\tau j \leqq p^2$ ist, folgt $j = \tau = p$. Daher ist $\mathfrak{R}_t(\mathfrak{x})$ der Restklassenkörper von $R_t(x)$, und der Bewertungsmodul von $R_t(x)$ besteht aus allen rationalen Zahlen mit dem Nenner p. Wir behaupten nun, daß $R_t(x)$ keinen Unterkörper Q' besitzt, der eine Trägheitserweiterung von R_t wäre. Denn sonst müßte der Grad von Q' in bezug auf R gleich p sein, und der Restklassenkörper von Q' müßte mit $\mathfrak{R}_t(\mathfrak{x})$ identisch sein. Es gäbe dann in Q' eine Größe α mit

$$\alpha \equiv \mathfrak{x}, \quad \alpha^p \equiv t \qquad (Q').$$

Da aber der Trägheitsgrad von Q' in bezug auf R_t gleich $p = [Q' : R_t]$ ist, muß der Verzweigungsindex von Q' in bezug auf R_t gleich 1 sein, so daß

$$\alpha^p \equiv t \pmod{p}$$

folgen würde. Da aber α auch in $R_t(x)$ liegt, folgt

$$(x - \alpha)^p \equiv x^p - \alpha^p = t + \sqrt[p]{p} - \alpha^p \equiv \sqrt[p]{p} \pmod{p},$$

so daß

$$\omega\left((x - \alpha)^p\right) = \frac{1}{p}, \quad \omega(x - \alpha) = \frac{1}{p^2}$$

wäre. Dann wäre aber der Verzweigungsindex von $R_t(x)$ wenigstens gleich p^2 und nicht p. Daher ist die Existenz des Zwischenkörpers Q' unmöglich. — Wir sehen zugleich, daß, wenn zu unserem Köper eine Größe α adjungiert wird, die eine reine Trägheitserweiterung von R_t vom Grade p erzeugt und in der ein Element α existiert mit $\alpha^p \equiv t \pmod{p}$, durch diese Trägheitserweiterung von $R_t(x)$ der Verzweigungsindex von $R_t(x)$ auf p^2 erhöht wird, während, da der Gesamtgrad des entstehenden Körpers gleich p^3 ist, der Trägheitsgrad gleich p bleibt, dafür aber eine reine Trägheitserweiterung von R_t abgelöst werden kann. Wie man sieht, enthält der Körper $R_t(x)$ gewissermaßen latent sowohl eine reine Trägheitserweiterung in bezug auf R_t, als auch Größen mit der Ordnungszahl $1/p^2$.

47. Zweites Gegenbeispiel zum Trägheitssatz. Charakteristik p. B. Es sei andererseits R_t ein Körper von der Charakteristik p, und zwar die Gesamtheit aller rationalen Funktionen der Unbestimmten t mit gewöhnlichen rationalen Zahlenkoeffizienten, die mod p zu nehmen sind.

Man adjungiere zu R_t eine neue Unbestimmte y, die zugleich als *Primzahl* anzusehen ist, so daß, wenn eine Größe aus $R_t(y)$ „genau" durch y^ω teilbar ist, dieser Größe die Ordnungszahl ω und die Bewertung $e^{-\omega}$ zuzuweisen ist. Wir adjungieren zu $R_t(y)$ die Größe

$$x = \sqrt[p]{t + \sqrt[p]{y}}, \tag{7,4}$$

die vom Grade p^2 in bezug auf $R_t(y)$ ist. Da in $R_t(y,x)$ $x^p - t = \sqrt[p]{y}$ vorkommt, ist der Verzweigungsindex j von $R_t(y,x)$ in bezug auf $R_t(y)$ wenigstens gleich p. Ist andererseits $\mathfrak{R}_t$ der Restklassenkörper von $R_t(y)$ — er ist isomorph zu R_t — und ist $\mathfrak{x}$ die Restklasse der in $R_t(y,x)$ zu x kongruenten Größen, so gilt in $\mathfrak{R}_t(\mathfrak{x})$

$$\mathfrak{x}^p - t = 0,$$

und, da die linke Seite dieser Gleichung in $\mathfrak{R}_t$ irreduzibel ist, ist der Grad von $\mathfrak{R}_t(\mathfrak{x})$ in bezug von $\mathfrak{R}_t$ wenigstens gleich p. Daher ist der Trägheitsgrad τ von $R_t(y,x)$ in bezug auf $R_t(y)$ wenigstens gleich p, und aus $j\tau \leqq p^2$ folgt wiederum $j = \tau = p$, so daß $\mathfrak{R}_t(\mathfrak{x})$ der Restklassenkörper von $R_t(y,x)$ ist, und der Bewertungsmodul von $R_t(y,x)$ wiederum aus allen rationalen Zahlen mit dem Nenner p besteht. Enthielte nun $R_t(y,x)$ einen Unterkörper Q', der eine Trägheitserweiterung von $R_t(y)$ wäre, so wäre wiederum $p = [Q' : R_t(y)]$, und es existierte in Q' eine Größe α mit

$$\alpha \equiv \mathfrak{x}, \quad \alpha^p \equiv t \qquad (Q').$$

Da aber der Grad von Q' in bezug auf $R_t(y)$ gleich seinem Trägheitsgrade p ist, müßte

$$\alpha^p \equiv t \pmod{y}$$

sein. Daraus folgt wieder

$$(x - \alpha)^p = x^p - \alpha^p \equiv \sqrt[p]{y} \pmod{y},$$

$$\omega\left((x-\alpha)^p\right) = \frac{1}{p}, \quad \omega(x-\alpha) = \frac{1}{p^2},$$

so daß der Verzweigungsindex von $R_t(y,x)$ in bezug auf $R_t(y)$ gleich p^2 wäre — auch hier enthält der Körper $R_t(y,x)$ gewissermaßen latent sowohl die Möglichkeit des Verzweigungsindex p^2, als auch die Existenzmöglichkeit einer ablösbaren maximalen Trägheitserweiterung von $R_t(y)$.

48. Algebraische Erweiterungen von Körpern mit Kern. Wir beweisen zum Schluß dieses Paragraphen einen Satz über algebraische Erweiterungen von bewerteten Körpern, die einen *Kern* besitzen.

XII. *Es besitze der relativ perfekte bewertete Körper K' einen Kern Q', so daß jedes Element des Restklassenkörpers $\mathfrak{K}$ von K' einem und nur einem Element von Q' kongruent ist und umgekehrt, und es sei ferner die Charakteristik von $\mathfrak{K}$ gleich 0. Es sei L' eine bewertete algebraische Erweiterung*

von K'. Dann besitzt auch L' einen Kern, der aus der Gesamtheit $Q^{*'}$ aller in L' liegenden, in bezug auf Q' algebraischen Größen besteht.

Beweis. $Q^{*'}$ bildet offenbar einen halbbewerteten Körper, dessen Elemente, von 0 abgesehen, die Bewertung 1 haben, wie aus den Sätzen II. III des § 3 folgt. Insbesondere sind daher je zwei verschiedene Elemente von $Q^{*'}$ in L' inkongruent.

Es sei nun $\mathfrak{L}$ der Restklassenkörper von L'. Wir haben dann nur zu beweisen, daß jedes Element von $\mathfrak{L}$ einem Element von $Q^{*'}$ kongruent ist. $\mathfrak{a}$ sei nun ein Element von $\mathfrak{L}$, das eine Wurzel des in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Polynoms

$$\mathfrak{f}(x) = x^n + \mathfrak{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathfrak{a}_n$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ ist.

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

sei das eindeutig bestimmte zu $\mathfrak{f}(x)$ kongruente Polynom mit Koeffizienten aus Q'. Ist α eine zu $\mathfrak{a}$ kongruente Größe aus L', so gilt

$$f(\alpha) \equiv 0 \qquad (L').$$

Daher besitzt $f(x)$ nach Satz I in L', und daher in $Q^{*'}$ eine einzige Wurzel a, die kongruent zu $\mathfrak{a}$ ist, womit XII bewiesen ist. — Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, die Isomorphie der Zuordnung zwischen $\mathfrak{a}$ und a direkt zu beweisen.

Es mögen in der Tat den Elementen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{L}$ vermöge unserer Zuordnung die Elemente a, b von L' entsprechen. Wir beweisen, daß $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ vermöge unserer Zuordnung den Größen $a \pm b$, $a\,b$ entsprechen. In der Tat erhält man die Gleichung, der $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}$ genügt, wenn man im Produkt

(7, 5) $$\Pi\,(x - (\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}))$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ unabhängig voneinander alle Wurzeln der in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Gleichungen $\mathfrak{f}(x) = 0$ bzw. $\mathfrak{g}(x) = 0$ durchlaufen läßt, denen $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ genügen. Die Koeffizienten von (7, 5) lassen sich durch die Koeffizienten von $\mathfrak{f}(x)$ und $\mathfrak{g}(x)$ rational mit ganzen rationalen Koeffizienten ausdrücken, und (7, 5) ist dann eine — k-te — Potenz des in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Polynoms $\mathfrak{F}(x)$, dessen Wurzel $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}$ ist.

Es sei $F(x)$ das eindeutig bestimmte, in Q' irreduzible Polynom mit dem höchsten Koeffizienten 1 und den Koeffizienten aus Q', das $\mathfrak{F}(x)$ kongruent ist. Die (7, 5) entsprechende Gleichung $T(x) = 0$, deren Wurzel $a \pm b$ ist, erhält man durch ganz analoges Verfahren, wobei man die Koeffizienten von $T(x)$ in genau der gleichen Weise aus den Koeffizienten der zu $\mathfrak{f}(x)$, $\mathfrak{g}(x)$ kongruenten Polynome $f(x)$, $g(x)$ mit Koeffizienten aus Q' bildet, und zwar durch ganze rationale Operationen. — Daher sind die Koeffizienten von $T(x)$ kongruent den Koeffizienten von (7, 5), und $T(x)$

ist die k-te Potenz von $F(x)$, so daß $a \pm b$, als die einzige Wurzel von $F(x)$, die kongruent $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}$ ist, in der Tat die vermöge unserer Vorschrift $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}$ zugeordnete Größe ist.

Genau analog beweist man unsere Behauptung für $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$.

Ist endlich $\mathfrak{b} \neq 0$, und ist $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{c}$ und c die $\mathfrak{c}$ vermöge unserer Vorschrift zugeordnete Größe, so folgt aus $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ auch $bc = a, c = \frac{a}{b}$, womit die Isomorphie der oben definierten Zuordnung bewiesen ist.

§ 8.

Der Verzweigungssatz.

49. Verzweigungserweiterungen. Wir werden im Folgenden unter einer *Verzweigungserweiterung* eines relativ perfekten Körpers K' eine solche algebraische Erweiterung L' von K' verstehen, daß die größte in ihr enthaltene reguläre Trägheitserweiterung von K' mit K' identisch ist. Dann ist der Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ von L' ein Radikalkörper über dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von K', und sein Relativgrad in bezug auf $\mathfrak{K}$ ist daher, wenn er endlich ist, eine Potenz der Charakteristik p, so daß der Trägheitsgrad t einer endlichen Verzweigungserweiterung eine Potenz der Primzahlcharakteristik p oder gleich 1 ist. Nach Satz XI, § 7 ist daher t gleich 1, wenn der Grad der Erweiterung zu p teilerfremd ist.

Ist der zu einer Verzweigungserweiterung L' gehörende Restklassenkörper $\mathfrak{L}$ überhaupt identisch mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von K', und ist der Defekt von L' gleich 1, so werden wir L' als eine *reguläre Verzweigungserweiterung* von K' bezeichnen. Aus dem Zusatz zum Satze VII, § 6 und der in Nr. 34 begründeten Definition des Defektes folgt, daß jeder Zwischenkörper zwischen K' und einer regulären Verzweigungserweiterung von K' wieder eine reguläre Verzweigungserweiterung von K' ist.

I. *Der Verzweigungsindex einer Verzweigungserweiterung L' vom Grade $n > 1$ eines relativ perfekten Körpers K' ist sicher größer als* 1, *wenn n in K' nicht kongruent* 0 *ist.*

Beweis: Es genüge eine, nach unseren Annahmen sicher existierende, die Erweiterung L' definierende Größe α der in K' irreduziblen Gleichung

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Wir können annehmen, daß $a_1 = 0$ ist, da dies sonst durch die bekannte Transformation $x = x' - \frac{a_1}{n}$ zu erreichen ist. Ferner können wir annehmen, daß die Größen $a_2, \ldots, a_n$ ganz sind, da man sonst $x = \frac{x'}{a}$ setzen kann, wo die Ordnungszahl von a groß genug ist. Da $f(x)$ im relativ perfekten Körper K' irreduzibel ist, ist das Newtonsche Diagramm

von $f(x)$ gradlinig. Wäre nun der Verzweigungsindex von L' in bezug auf K' gleich 1, so müßte für ein a aus L' $\omega(a) = \omega(\alpha)$ sein. Setzt man dann $x = ay$, so erhält man für y eine neue Gleichung mit Koeffizienten aus K'

$$g(y) = y^n + b_2 y^{n-2} + \ldots + b_n,$$

wo die b_ν ganz sind und $\omega(b_n) = 0$ ist, da ja nach unserer Substitution das Newtonsche Diagramm von $g(y)$ gradlinig bleibt. Und auch die Wurzel α/a von $g(y)$ wäre eine L' definierende Größe. Wir betrachten nun das zu $g(y)$ kongruente Polynom $\mathfrak{g}(y)$ mit Koeffizienten aus dem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von K'

$$\mathfrak{g}(y) = y^n + \mathfrak{b}_2 y^{n-2} + \ldots + \mathfrak{b}_n,$$

wo $\mathfrak{b}_n \neq 0$ ist. Hätte $\mathfrak{g}(y)$ zwei teilerfremde Teiler in $\mathfrak{R}$, so müßte nach Satz II, § 7 $g(y)$ in K' reduzibel sein. Es gilt also $\mathfrak{g}(y) = P(x)^q$ mit $q \geqq 1$, wo $P(x)$ in $\mathfrak{R}$ irreduzibel ist und Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ hat. Andererseits ist nach Voraussetzung der Restklassenkörper von L' identisch mit $\mathfrak{R}$. Daher muß y einer Größe $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ kongruent sein, so daß $P(\mathfrak{a}) = 0$ folgen würde. Daher wäre $P(x)$ linear und gleich $x - \mathfrak{a}$, so daß, wenn b eine zu $\mathfrak{a}$ kongruente Größe aus K' ist,

$$(8, 1) \qquad g(y) \equiv (y-b)^n, \quad nb \equiv 0, \quad b^n \equiv b_n$$

wäre. Da aber weder $b_n \equiv 0$, noch $n \equiv 0$ ist, ist (8, 1) unmöglich.

50. Adjunktion von Verzweigungsgrößen. II. *Es sei L' eine algebraische bewertete Erweiterung eines relativ perfekten Körpers K'. Es sei α eine Größe aus L', und es sei l die kleinste ganze positive Zahl mit der Eigenschaft, daß die Bewertung von α^l bereits im Körper K' anzutreffen ist. Ist $l \not\equiv 0$ im Körper K' und gibt es Größen a aus K' mit $\frac{\alpha^l}{a} \equiv 1$ (L'), so ist im Körper $K'(\alpha)$ stets eine Wurzel ξ der Gleichung*

$$(8, 2) \qquad x^l - a = 0$$

für jedes solche a enthalten, und zwar eine solche, für die $\frac{\alpha}{\xi} \equiv 1$ ist.

Beweis: Es genüge α der in K' irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus K'

$$(8, 3) \qquad f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Man bilde eine algebraische Erweiterung L^* von L', in der sämtliche Wurzeln der Gleichung $x^l = a$ liegen und bewerte diese Erweiterung zu $L^{*\prime}$.

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_l$ die l Wurzeln von (8, 2) in $L^{*\prime}$, so folgt aus $\frac{\alpha^l}{a} \equiv 1$

$$\prod_{\lambda=1}^{l} \left(\frac{\alpha}{\xi_\lambda} - 1\right) \equiv 0 \qquad (L^{*\prime}).$$

Es gibt daher wenigstens eines unter den ξ_λ — wir bezeichnen es mit ξ —, so daß $\frac{\alpha}{\xi} \equiv 1$ $(L^{*\prime})$ ist. Wir betrachten nun den Körper $K'(\alpha, \xi)$

und seinen Unterkörper $K'(\xi)$. Setzen wir $x = \xi y$, so ergibt sich aus (8, 3) eine Gleichung n-ten Grades in y

$$g(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

deren eine Wurzel $\frac{\alpha}{\xi}$ ist, und deren Koeffizienten dem Körper $K'(\xi)$ angehören und ganz sind, da das Newtonsche Diagramm von $f(x)$ gradlinig sein muß, und daher dasselbe für $g(y)$ gilt. Da aber der Verzweigungsindex l von $K'(\xi)$ in bezug auf K' gleich dem Grade von $K'(\xi)$ in bezug auf K' ist, ist der Trägheitsindex von $K'(\xi)$ in bezug auf K' gleich 1, so daß jede Größe aus $K'(\xi)$ einer Größe des Restklassenkörpers $\mathfrak{R}$ von K' kongruent ist. Daher ist $g(y)$ kongruent einem Polynom $\mathfrak{g}(y)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ vom Grade n. Dieses Polynom enthält aber nur solche Potenzen von y, deren Exponenten durch l teilbar sind. Denn da allgemein $b_\nu = \frac{a_\nu}{\xi^\nu}$ ist, kann b_ν nur dann inkongruent 0 sein, wenn

$$\nu\,\omega(\alpha) = \nu\,\omega(\xi) = \omega(a_\nu)$$

d. h., da $\omega(a_\nu)$ im Bewertungsmodul $\mathfrak{m}_{K'}$ liegt, wenn ν durch l teilbar ist. Daher hat $\mathfrak{g}(y)$ die Gestalt $\mathfrak{g}^*(y^l)$, wo $\mathfrak{g}^*$ wiederum ein Polynom mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ ist. Da aber die eine Wurzel α/ξ von $g(y)$ kongruent 1 ist, folgt $g(1) \equiv 0$, $\mathfrak{g}^*(1) = 0$, so daß $\mathfrak{g}^*(z)$ durch $z - 1$ teilbar ist. Es sei nun $\mathfrak{g}^*(z) = (z-1)^m \gamma(z)$, wo $\gamma(1) \not\equiv 0$ ist. Dann gilt

$$\mathfrak{g}^*(y^l) = (y^l - 1)^m \gamma(y^l) = (y-1)^m \left(\frac{y^l - 1}{y-1}\right)^m \gamma(y^l).$$

Hier ist aber, wegen $\left(\frac{y^l-1}{y-1}\right)^m \equiv l^m$, $\gamma(y^l) \equiv \gamma(1) \pmod{y-1}$ die rechte Seite als Produkt von $(y-1)^m$ und einem Polynom $h(y)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ darstellbar, wo $h(y)$ für $y = 1$ nicht verschwindet und daher zu $(y-1)^m$ teilerfremd ist. Daher läßt sich nach Satz II, § 7 das zu $\mathfrak{g}^*(y^l)$ kongruente Polynom $g(y)$ mit Koeffizienten aus dem relativ perfekten Körper $K'(\xi)$ im Körper $K'(\xi)$ in zwei Faktoren zerspalten, von denen der eine die Gestalt

$$(8, 4) \qquad (y-1)^m + g_1(y)$$

hat, wo der Grad von $g_1(y)$ kleiner als m ist und die Koeffizienten von $g_1(y)$ zu $K'(\xi)$ gehören und kongruent 0 sind, während für $y = 1$ der andere Faktor inkongruent 1 bleibt. Daher ist α/ξ eine Wurzel des Polynoms (8, 4). Setzen wir nun in (8, 4) $y = \frac{x}{\xi}$ und multiplizieren mit ξ^m, so ergibt sich ein Faktor m-ten Grades von $f(x)$ mit Koeffizienten aus $K'(\xi)$

$$(8, 5) \qquad (x-\xi)^m + f_1(x),$$

dessen eine Wurzel α ist. Hier ist aber m höchstens gleich dem Grade n/l von $\mathfrak{g}^*(z)$, so daß sicher $ml \leqq n$ ist. Nun ergibt sich der Körper $K'(\alpha, \xi)$ aus dem Körper $K'(\xi)$ durch Adjunktion der Größe α, deren Grad in bezug auf $K'(\xi)$ höchstens gleich dem Grade m von (8, 5) ist. Daher ist der Grad von $K'(\alpha, \xi)$ in bezug auf K' höchstens gleich $ml \leqq n$. Andererseits enthält $K'(\alpha, \xi)$ den Körper $K'(\alpha)$, der nach Voraussetzung genau vom Grade n in bezug auf K' ist. Daher ist $ml = n$, und die Körper $K'(\alpha)$ und $K'(\alpha, \xi)$ sind miteinander identisch, so daß im Körper $K'(\alpha)$ in der Tat, wie behauptet, eine Wurzel ξ der Gleichung (8, 2) liegt, und zwar gerade eine solche, für die $\frac{\alpha}{\xi} \equiv 1$ ist. Damit ist II bewiesen.

51. Zusammensetzung von Erweiterungen vom Trägheitsgrad 1. Es sei nun L' eine endliche bewertete Erweiterung des relativ perfekten Körpers K', vom *Trägheitsgrad* 1 in bezug auf K'. Ist dann α ein Element von L', und ist die kleinste ganze positive Zahl l, für die die Bewertung von α^l in K' angetroffen wird, in K' inkongruent 0, so sieht man leicht ein, daß es in K' stets Größen a gibt mit $\frac{\alpha^l}{a} \equiv 1\ (L')$. Denn ist A aus K' so gewählt, daß $\omega(\alpha^l) = \omega(A)$ ist, so ist $\frac{\alpha^l}{A} \equiv B$, wo B zu K' gehört, da der Trägheitsgrad von L' in bezug auf K' als 1 vorausgesetzt wurde. Und da $\omega(B) = 0$ ist, gilt weiter $\frac{\alpha^l}{AB} \equiv 1\ (L')$, so daß $AB = a$ gesetzt werden kann.

Es sei nun der Relativgrad n von L' in bezug auf K' nicht kongruent 0 in L'. Es sei j der Verzweigungsindex und $b_1, \ldots, b_m$ seien die Verzweigungsinvarianten von L' in bezug auf K', denen Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_m$ von $\mathfrak{m}_{L'}$ entsprechen. Dann gibt es in L' zu jedem $\omega_\mu\ (\mu = 1, \ldots, m)$ ein α_μ mit $\omega(\alpha_\mu) = \omega_\mu$, und nach dem soeben Bewiesenen kann dieses α_μ als eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha_\mu^{b_\mu} - a_\mu = 0, \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gewählt werden, wo a_μ Elemente von K' sind. Dann ist der Körper $L_1' = K'(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ höchstens vom Grade $b_1 \ldots b_m = j$ in bezug auf K'. In L_1' kommen bereits die Ordnungszahlen $\omega_1, \ldots, \omega_m$ vor, und da der Bewertungsmodul von L_1' auch $\mathfrak{m}_{K'}$ enthält, und andererseits in $\mathfrak{m}_{L'}$ enthalten ist, muß der Bewertungsmodul von L_1' mit $\mathfrak{m}_{L'}$ identisch sein. Daher ist der Verzweigungsindex von L_1' in bezug auf K' gleich j, und da sein Grad in bezug auf K' höchstens j ist, muß $[L_1' : K']$ genau gleich j sein. Nun ist L' in bezug auf L_1' vom Grade n/j und nach den Sätzen II, VI von § 6 vom Trägheitsgrad 1 und Verzweigungsindex 1. Dann muß aber nach Satz I, da n/j sicher nicht kongruent 0 in L' ist, $\frac{n}{j} = 1$,

$n = j$ und daher L' mit $L_1' = K'(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ identisch sein. Insbesondere gilt für L' der Verzweigungssatz. Wir sehen:

III. *Ist L' eine endliche bewertete Erweiterung des relativ perfekten Körpers K' vom Relativgrad n und Trägheitsgrad 1 in bezug auf K', und ist n nicht kongruent 0 in L', so ist der Verzweigungsindex von L' in bezug auf K' gleich n, und L' läßt sich als das kleinste gemeinsame Vielfache von Radikalkörpern $K'(\alpha_1), \ldots, K'(\alpha_m)$ mit in K' irreduziblen bestimmenden Gleichungen*

$$x^{b_\mu} - a_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

darstellen, für die die Grade $b_1, \ldots, b_m$ die Verzweigungsinvarianten und die Zahlen $\omega(a_\mu)/b_\mu$ Repräsentanten der Basis der Verzweigungsmodulgruppe von L' in bezug auf K' sind, so daß $b_1 b_2 \ldots b_m = n$ ist.

52. Verzweigungssatz im funktionentheoretischen Fall und in einem Unterfall des zahlentheoretischen Falles. Aus Satz III folgt weiter im funktionentheoretischen Fall, da dann eine beliebige bewertete algebraische Erweiterung L' eines relativ perfekten Körpers K' sich nach Satz XI, § 7 als eine Verzweigungserweiterung einer gewissen zwischen L' und K' liegenden regulären Trägheitserweiterung M' von K' darstellen läßt, und auf jeden in bezug auf M' endlichen Zwischenkörper zwischen L' und M' der Satz III anwendbar ist, daß der Defekt von L' in bezug auf M' — und daher auch von L' in bezug auf K' — gleich 1 ist. Dann gilt also der Verzweigungssatz.

Genau ebenso läßt sich im zahlentheoretischen Fall schließen, wenn der Grad jedes in bezug auf K' endlichen Zwischenkörpers zwischen L' und K' zur Charakteristik p des Restklassenkörpers teilerfremd ist. Auch dann gilt daher der Verzweigungssatz. Wir sehen:

IV. *Ist L' eine bewertete algebraische Erweiterung eines relativ perfekten Körpers K', und ist für keine in L' liegende endliche Erweiterung von K' der Relativgrad in bezug auf K' kongruent 0 in K' — und diese Voraussetzung ist im funktionentheoretischen Falle immer erfüllt —, so ist der Defekt von L' in bezug auf K' gleich 1; es gilt der Verzweigungssatz.*

Ferner können wir aus dem Satz III auch im Falle einer unendlichen algebraischen Erweiterung L' des relativ perfekten Körpers K' vom Trägheitsgrad 1 in bezug auf K' ohne weiteres Aufschlüsse über die *Struktur* von L' erhalten, falls für keine in L' liegende endliche Erweiterung von K' der Relativgrad in bezug auf K' kongruent 0 ist. Denn ist q irgendeine von der Charakteristik des Restklassenkörpers von K' verschiedene Primzahl, die in den Gradzahlen der Zwischenkörper zwischen L' und K' in bezug auf K' als Teiler vorkommt, so adjungiere man zu K' sämtliche Größen aus L', die Wurzeln aus Größen von K' sind, und deren Wurzelexponenten

Potenzen von q sind. Dadurch entsteht ein Zwischenkörper L'_q zwischen L' und K', dessen sämtliche in bezug auf K' endliche Unterkörper Gradzahlen besitzen, die Potenzen von q sind. Aus Satz III folgt nun, daß L' *das kleinste gemeinsame Vielfache der sämtlichen Körper* L'_q *ist.*

Auch die Struktur der Körper L'_q läßt sich an Hand der neueren Ergebnisse über unendliche Abelsche Gruppen[23]) noch weiter diskutieren, doch würde dies uns hier zu weit führen.

Es sei über die Tragweite dieser Sätze noch folgendes bemerkt: An sich wird dabei der Grundkörper K' als relativ perfekt vorausgesetzt. Bedenkt man aber, daß die Körperreduktion nur durch Adjunktion *natürlicher*, d. h. im zugehörigen Normalkörper liegender „Irrationalitäten" erfolgt, so sieht man, daß für die Gültigkeit unserer Sätze es bereits genügt, wenn K' die Zerlegungskörper der in Frage kommenden Erweiterungen enthält. So kann z. B. im Satz II die Voraussetzung, daß K' relativ perfekt ist, durch die Voraussetzung ersetzt werden, daß L' sowohl den zu $K'(\alpha)$ gehörenden reduzierten Zerlegungskörper als auch einen der zur kleinsten die Funktion $x^l - a$ vollständig zerfällenden Erweiterung von K' gehörenden reduzierten Zerlegungskörper enthält.

53. Beispiel eines Körpers Dirichletscher Reihen. Ein Beispiel für die obigen Betrachtungen wird durch die in § 1 definierten Körper $K' = D(\Lambda_\nu)$ geliefert, deren Koeffizientenkörper Q' von der Charakteristik 0 sind. In bezug auf die a. a. O. definierte Bewertung des Körpers K' ist ein solcher Körper relativ perfekt (§ 2, Nr. 8; § 3, Nr. 9) und besitzt den Koeffizientenkörper Q als Kern. Ist

$$\Phi(y) \equiv D_0(s)\, y^n + D_1(s)\, y^{n-1} + \ldots + D_n(s) = 0$$

eine Gleichung, deren Koeffizienten zu $D(\Lambda_\nu)$ gehören, so liefern die obigen Ergebnisse folgende Tatsachen über die Lösungen dieser Gleichung:

$\Phi(y)$ zerfällt in $D(\Lambda_\nu)$ in ein Produkt von irreduziblen Polynomen, deren Koeffizienten wieder zu $D(\Lambda_\nu)$ gehören. Ist $\Phi_\varkappa(y)$ eines von diesen Polynomen vom Grade $n_\varkappa$, $\Delta(s)$ eine Wurzel dieses Polynoms, so entsteht der Körper $K'(\Delta)$ aus dem Körper K' erstens durch Adjunktion einer Trägheitsgröße, die in diesem Falle nach Satz XII, § 7 als algebraisch vom Grade $t_\varkappa$ in bezug auf den Koeffizientenkörper Q' von K' gewählt werden kann; zweitens von Wurzeln gewisser Gleichungen

$$x^{b_\mu} = a^{(u)}\, e^{-\lambda^{(u)}},$$

wo die Zahlen $\lambda^{(u)}, b_u$ eine Basis der Verzweigungsmodulgruppe von $K'(\Delta)$ in bezug auf K' bilden. Dann ist aber das Produkt $t_\varkappa b_1 b_2 \ldots = n_\varkappa$.

[23]) Vgl. hierzu H. Prüfer, Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 165 ff.; **22** (1925), S. 222 ff.; Pietrkowski, Math. Annalen **104** (1931), S. 535, sowie die in diesen Abhandlungen angegebene Literatur.

Ist nun $i_\varkappa$ die zugehörige Verzweigungszahl, so ist $i_\varkappa$ sicher ein Teiler von $n_\varkappa$. Andererseits ist $i_\varkappa$ offenbar die kleinste Zahl, derart, daß jeder Exponent von $\Delta(s)$ sich linear und ganzzahlig durch Λ_ν ausdrücken läßt, wobei nur Λ_ν aus einem endlichen Vorrat negative Koeffizienten haben können. Und dieses $i_\varkappa$ ist offenbar für sämtliche $n_\varkappa$ Wurzeln von $\Phi_\varkappa(y)$ dasselbe. Damit sehen wir, daß die in § 2, Satz II erwähnte Zahl m sich stets kleiner wählen läßt als der Grad der Gleichung, sowie daß es unter den Wurzeln des Polynoms Φ wenigstens m solche gibt, die zu diesem m gehören. Ist der Koeffizientenkörper ein Zahlenkörper, so sehen wir zugleich, daß die zu adjungierenden Zahlenirrationalitäten eine Erweiterung vom Grade $t_\varkappa \leqq n_\varkappa \leqq n$ des Koeffizientenkörpers von $D(\Lambda_\nu)$ erzeugen.

§ 9.

Der Defektsatz.

Zerlegung von Primdivisoren in algebraischen Erweiterungen.

54. Körpertheoretische Hilfssätze. Die allgemeine Untersuchung des zahlentheoretischen Falles stützen wir auf den folgenden körpertheoretischen Hilfssatz:

I. *Es sei L eine endliche Erweiterung erster Art vom Grade n des unendlichen Körpers K. Es sei für eine Primzahl p: $n = p^f m$, wo $(m, p) = 1$ ist. Dann gibt es in der kleinsten in bezug auf K normalen Erweiterung K^* von L eine algebraische Erweiterung erster Art L^* von K, deren Grad in bezug auf K höchstens durch die $(f-1)$-te Potenz von p teilbar ist, und in bezug auf die L vom Grade p ist.*

Beweis: Es genüge eine die Erweiterung L von K definierend Größe α_1 der in K irreduziblen Gleichung

$$h(x) = 0,$$

und es seien $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Konjugierten von α_1 in bezug auf K. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind nach Voraussetzung alle untereinander verschieden. Wir bilden alle $N = \binom{n}{p}$ Kombinationen $C_1, \ldots, C_N$ zu je p unter n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und betrachten für jede solche Kombination $C = (\nu_1, \ldots, \nu_p)$ das Produkt

$$Q_C(u) = (u - \alpha_{\nu_1}) \ldots (u - \alpha_{\nu_p}).$$

Die N Polynome $Q_{C_1}(u), \ldots, Q_{C_N}(u)$ sind paarweise untereinander verschieden, da sie, gleich 0 gesetzt, verschiedene Systeme von p Wurzeln besitzen. Da K unendlich viele Elemente besitzt, kann für u eine solche Größe u_0 aus K eingesetzt werden, daß die N Größen $Q_{C_\nu}(u_0) = q_\nu$ untereinander verschieden sind. Bilden wir das Produkt

$$F(v, u) = \prod_{\nu=1}^{N} (v - Q_{C_\nu}(u)), \tag{9, 1}$$

so sind die Koeffizienten der verschiedenen Potenzprodukte von v und u in (9, 1) ganzzahlige symmetrische Polynome in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und lassen sich daher durch die Koeffizienten von $f(x)$ als Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten ausdrücken. Daher ist $F(v, u_0)$ ein Polynom in v mit Koeffizienten aus K und N verschiedenen Wurzeln. Es sei nun δ_C eine bestimmte symmetrische Funktion von $\alpha_{\nu_1}, \ldots, \alpha_{\nu_p}$, wenn $C = (\nu_1, \ldots, \nu_p)$ ist. Dann ist

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{F(v, u_0)}{v - q_\nu} \delta_{C_\nu} = S(v), \tag{9, 2}$$

wo $S(v)$ ein Polynom in v mit Koeffizienten aus K ist. Für $v = q_\nu$ ergibt sich aus (9, 2)

$$\delta_{C_\nu} = \frac{S(q_\nu)}{F'_v(q_\nu, u_0)},$$

wo nach Voraussetzung

$$F'_v(q_\nu, u_0) = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{N} (q_\nu - q_\mu)$$

ist. Daher sind alle Koeffizienten von $Q_{C_\nu}(u)$ nach Adjunktion von q_ν zu K gegeben. Nun ist der Grad von $F(v, u_0)$

$$N = \frac{p^f m (p^f m - 1)(p^f m - 2) \ldots (p^f m - p + 1)}{p!}$$

genau durch p^{f-1} teilbar, daher besitzt $F(v, u_0)$ wenigstens einen in K irreduziblen Faktor $G(v)$, dessen Grad n^* höchstens durch p^{f-1} teilbar ist. Ist $q = (u_0 - \alpha_{\nu_1}) \ldots (u_0 - \alpha_{\nu_p})$ eine Wurzel von $G(v)$ und α eine der Größen $\alpha_{\nu_1}, \ldots, \alpha_{\nu_p}$, so entsteht aus K durch Adjunktion von q ein Körper L^* vom Grade n^* in bezug auf K, in bezug auf den der Grad g von α höchstens gleich p ist. Dieser Grad g muß aber gleich p sein, da er sonst zu p teilerfremd wäre und ein zu L konjugierter Körper im Körper $L^*(q)$ vom Grade gn^* in bezug auf K liegen muß, während $n = p^f m$ dann nicht in gn^* aufgehen könnte.

Damit ist unser Satz für eine gewisse Wurzel α von $h(x)$ bewiesen. Beachtet man aber, daß L^* in K^* enthalten ist, und daß andererseits wegen der Irreduzibilität von $h(x)$ es Permutationen von K^* in sich gibt, die α in jede andere Wurzel von $h(x)$ überführen, so ist damit unser Satz allgemein bewiesen.

Durch wiederholte Anwendung von I folgt:

II. *Es sei L eine endliche Erweiterung erster Art des unendlichen Körpers K vom Grade $n = p^f m$ in bezug auf K, wo p Primzahl und $(m, p) = 1$ ist. Dann enthält die kleinste in bezug auf K normale Erweiterung K^* von L eine Erweiterung erster Art L^* von K, deren Relativ-*

grad in bezug auf K zu p teilerfremd ist, derart, daß eine primitive Größe α von L in bezug auf K den Grad p^f in bezug auf L^* hat und durch f Mal wiederholte Adjunktion von Größen p-ten Grades zu L^* adjungiert werden kann.

Ist insbesondere im Satze II L eine normale Erweiterung von K, also identisch mit K^*, so muß L^* ein Unterkörper von K^* sein, und wir erhalten den Satz:

III. *Ist L eine endliche normale Erweiterung von der ersten Art eines unendlichen Körpers K, und gilt für den Grad n von L in bezug auf K*

$$n = p^f m, \quad (m, p) = 1, \quad f \geqq 1,$$

wo p eine Primzahl ist, so gibt es Zwischenkörper $L_0, \ldots, L_f = L$ zwischen K und L derart, daß der Grad von L_0 in bezug auf K gleich m, der Grad von L_1 in bezug auf L_0 gleich p, und allgemein L_ν den Körper $L_{\nu-1}$ enthält und in bezug auf ihn vom Grade p ist.

Dieser Satz ergibt sich übrigens auch unmittelbar aus dem bekannten Sylowschen Satze, wonach, wenn die Ordnung einer endlichen Gruppe durch eine Potenz p^g einer Primzahl p teilbar ist, diese Gruppe eine Untergruppe von der Ordnung p^g bezitzt. Denn die Unterkörper L des soeben bewiesenen Satzes „gehören" zu den Untergruppen von der Ordnung $p^{f-\nu}$ der Galoisschen Gruppe von L in bezug auf K. Da umgekehrt jede endliche Gruppe von der Ordnung n sich als Substitutionsgruppe von n Größen und daher auch als Galoissche Gruppe in bezug auf einen Unbestimmte enthaltenden Körper „realisieren" läßt, ist der Sylowsche Satz auch umgekehrt eine Folgerung aus dem Satze III, so daß unser Beweis des Satzes III einen neuen Beweis des Sylowschen Satzes mitliefert.

55. Beweis des Defektsatzes. Es sei nun L' eine endliche bewertete algebraische Erweiterung erster Art des relativ perfekten Körpers K' vom Relativgrade n, und es sei die Charakteristik des Restklassenkörpers von K' eine Primzahl p. Es sei

$$n = p^f m, \quad (p, m) = 1, \quad f \geqq 1.$$

Ist dann $K^{*\prime}$ die kleinste bewertete in bezug auf K' normale Erweiterung von L', so gibt es nach dem soeben bewiesenen Satze einen Zwischenkörper $L^{*\prime}$ zwischen K' und $K^{*\prime}$ vom Grade N in bezug auf K' mit $(p, N) = 1$, so daß, wenn α eine primitive Größe von L' in bezug auf K' ist, der Körper $L^*(\alpha)$ genau den Grad p^f in bezug auf $L^{*\prime}$ hat. Da der Grad von $L^{*\prime}$ in bezug auf K' zu p teilerfremd ist, ist der Defekt δ_1 von $L^{*\prime}$ in bezug auf K' nach Satz IV, § 8 gleich 1.

Sind t_2, j_2, δ_2 Trägheitsgrad, Verzweigungsindex und Defekt von $L^{*\prime}(\alpha)$ in bezug auf $L^{*\prime}$, so müssen nach III, § 6 und III, § 7 t_2 und j_2 Potenzen

der Primzahl p sein, da der Relativgrad von $L^{*'}(\alpha)$ in bezug auf $L^{*'}$ p^f ist. Überdies gilt nach IV, § 6 $t_2 j_2 \leqq p^f$, so daß $\delta_2 = \frac{p^f}{t_2 j_2}$ eine Potenz von p sein muß. Daher ist der Defekt $\delta_1 \delta_2$ von $L^{*'}(\alpha)$ in bezug auf K' ganz, positiv und eine Potenz von p.

Es sei nun δ der Defekt von L' in bezug auf K'. Da der Grad von $L^{*'}(\alpha)$ in bezug auf L' gleich $p^f N / p^f m$ und daher zu p teilerfremd ist, ist der Defekt $\delta_1 \delta_2$ von $L^{*'}(\alpha)$ in bezug auf K' nach IV, § 8 und dem Zusatz zum Satz VII, § 6 gleich dem Defekt δ von L' in bezug auf K', und wir sehen, daß für die Erweiterung L' von K' der Defektsatz gilt.

Dabei war L' als eine endliche Erweiterung erster Art in bezug auf K' vorausgesetzt. *Ist aber L' endlich in bezug auf K', aber nicht mehr von der ersten Art*, so gibt es zwischen L' und K' einen Zwischenkörper M', der von der ersten Art in bezug auf K' ist, während L' in bezug auf M' von der zweiten Art ist. Der Defekt von L' in bezug auf K' ist, wie soeben bewiesen, ganz, positiv und eine Potenz von p, eventuell gleich 1. Um den Defektsatz allgemein zu beweisen, braucht man also nur zu zeigen, daß der Defekt von L in bezug auf M eine Potenz von $p : p^k$, $(k = 0, 1, \ldots)$ ist. Nun ist der Grad von L' in bezug auf M' eine Potenz von p, etwa p^d, da L' aus M' durch sukzessive Adjunktion von Größen vom Relativgrad p erhalten werden kann. Und aus den Sätzen III, § 6 und III, § 7 folgt wieder, daß der Trägheitsgrad t und Verzweigungsgrad j von L' in bezug auf M' Potenzen von p sind, so daß nach Satz IV, § 6 der Defekt δ von L' in bezug auf M' gleich $\frac{p^d}{tj} \geqq 1$ und daher eine Potenz von p ist. *Damit ist der Defektsatz für endliche Erweiterungen bewiesen.*

Nach der Definition des Defekts für beliebige algebraische Erweiterungen in § 6 folgt nunmehr allgemein:

IV. Der Defektsatz. *Ist L' eine beliebige bewertete algebraische Erweiterung eines relativ perfekten Körpers K', so ist der Defekt von L' in bezug auf K', wenn er endlich ist, eine ganze positive Zahl und, wenn er größer als 1 ist, eine Potenz der Charakteristik $p > 0$ des Restklassenkörpers von K'.* — Es ergibt sich insbesondere nach Nr. 34:

V. *Ist L' eine beliebige bewertete algebraische Erweiterung eines relativ perfekten bewerteten Körpers K' und ist der Verzweigungsgrad von L' in bezug auf K' endlich, so ist er eine ganze Zahl und durch den Verzweigungsindex von L' in bezug auf K' teilbar. Ist der Grad von L' in bezug auf K' endlich, so ist er teilbar sowohl durch den Trägheitsgrad als auch durch den Verzweigungsgrad von L' in bezug auf K'.*

56. Bemerkungen über Erweiterungen mit $\delta > 1$. Daß der Fall eines Defektes $\delta > 1$ in der Tat vorkommen kann, haben wir oben in

Nr. 39 an einem Beispiel gezeigt. Was die allgemeine Frage anbetrifft, für welche Körper es endliche Erweiterungen mit einem Defekt $\delta > 1$ gibt, so wollen wir uns hier nur auf einige Angaben beschränken.

Es sei K' ein relativ perfekter bewerteter Körper und Q' eine endliche Erweiterung von K', deren Defekt $\delta = p^d$ in bezug auf K' größer als 1 ist, wobei p die Primzahlcharakteristik des Restklassenkörpers von K' bezeichnet. Nach Satz VII, § 6 und dem Zusatz zu diesem Satz hat auch die Norm von Q' in bezug auf K' die gleiche Eigenschaft, so daß wir von vornherein Q' als normal in bezug auf K' voraussetzen können. Nach dem Satz III gibt es zwischen K' und Q' zwei Zwischenkörper L_1' und L_2', derart, daß L_2' den Körper L_1' enthält und in bezug auf ihn den Grad und den Defekt p hat. Zugleich ist Q' auch in bezug auf L_1' normal. Die Erweiterung L_2' von L_1' besitzt eine primitive Größe α, da ihr Grad in bezug auf L_1' eine Primzahl ist. Ist $f(x) = 0$ die in L_1' irreduzible Gleichung, der α genügt, so sind die übrigen von α verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ dieser Gleichung höchstens vom Grade $p-1$ in bezug auf $L_2' = L_1'(\alpha)$. Durch ihre Adjunktion zu L_2' entsteht daher eine Erweiterung L_3' von L_2', deren Grad in bezug auf L_2' zu p teilerfremd ist. Ist nun M' die größte in L_3' enthaltene Trägheitserweiterung in bezug auf L_2' (vgl. die Sätze X, XI, § 7), so ist sie nach dem Satz III, § 7 eine einfache Erweiterung von L_2', und als eine primitive Größe von M' kann eine Größe gewählt werden, deren bestimmende in L_2' irreduzible Gleichung bereits in L_1' liegende Koeffizienten hat. Denn jede Größe von L_2' ist einer Größe aus L_1' kongruent, und nach Satz I, § 7 darf man eine solche bestimmende Gleichung durch jede ihr kongruente mit Koeffizienten aus L_2' ersetzen. Denken wir uns nun eine solche Größe β bereits zu L_1' adjungiert, so bleiben der Grad und der Defekt von L_2' in bezug auf L_1' gleich p. Wir dürfen daher annehmen, daß L_3' keine Trägheitsgröße in bezug auf L_2' enthält, die nicht bereits in L_2' enthalten wäre. Nach Satz III, § 8 entsteht aber dann L_3' aus L_2' durch Adjunktion von je einer Wurzel der Gleichungen von der Form

$$x^{a_\mu} - b_\mu = 0, \tag{9,3}$$

wo das Produkt $a_1 a_2 \ldots$ gleich dem Grade von L_3' in bezug auf L_2' ist. Dabei hängen die Größen α_μ nur von der Verzweigungsmodulgruppe von L_3' in bezug auf L_2' ab, — sie sind die Invarianten dieser Gruppe —, während die Größen b_μ noch in hohem Maße willkürlich sind. Man darf nämlich nach Satz II, § 8 eine solche Größe b_μ durch jede andere Größe b_μ' ersetzen, sofern $\frac{b_\mu'}{b_\mu} \equiv 1\ (L_2')$ ist. Da aber der Verzweigungsindex und der Trägheitsgrad von L_2' in bezug L_1' gleich 1 sind, gibt es zu

jeder Größe b_μ von L_2' eine solche Größe b_μ' von L_1', daß $\frac{b_\mu'}{b_\mu} \equiv 1\,(L_2')$ ist. Daher können die Größen b_μ von vornherein als Größen aus L_1' vorausgesetzt werden. Denken wir uns nun die in L_3' enthaltenen Wurzeln der Gleichungen (9, 3) von vornherein zu L_1' adjungiert, so bleiben der Grad und der Defekt von L_2' in bezug auf L_1' gleich p, L_2' ist aber nunmehr eine normale Erweiterung von L_1'. Wir sehen daher:

VI. *Gibt es endliche Erweiterungen Q' eines relativ perfekten bewerteten Körpers K' vom Defekt $p^d > 1$ in bezug auf K', so gibt es innerhalb der Norm von Q' in bezug auf K' endliche Erweiterungen L' von K', in bezug auf die es normale Erweiterungen vom Grad und Defekt p gibt.*

Wir können daher von vornherein annehmen, daß Q' eine normale Erweiterung vom Grad und vom Defekt p in bezug auf K' ist. Sorgen wir ferner dafür, daß im Körper K' alle $(p-1)$-ten Wurzeln der Einheit enthalten sind, so können wir im Falle, daß K' selbst die Charakteristik 0 hat, eine primitive Größe von Q' so wählen, daß sie einer *reinen* Gleichung p-ten Grades

$$x^p - a = 0 \tag{9,4}$$

mit a aus K' genügt. Ist aber K' selbst von der Charakteristik p, so sind zwei Fälle möglich[24]). Entweder läßt sich eine primitive Größe von Q' so wählen, daß sie wiederum einer in K' irreduziblen Gleichung (9, 4) mit a aus K' genügt, oder aber es gibt eine primitive Größe von Q', die einer Gleichung von der Form

$$x^p - x - a = 0 \tag{9,5}$$

genügt, wo a in K' liegt. Beide Fälle schließen sich übrigens gegenseitig aus. Da für den Fall eines Körpers von der Charakteristik 0 wir schon oben ein Beispiel gegeben haben, geben wir nunmehr ein Beispiel für den Fall der Ckarakteristik p, der dem zweiten der oben gekennzeichneten Unterfälle entspricht.

57. Ein weiteres Beispiel für $\delta > 1$. Wir adjungieren zum Primkörper P der Charakteristik p (d. h. zum Körper der p Restklassen mod p) eine Unbestimmte u und adjungieren zum so entstehenden Körper $P(u)$ alle Wurzeln u^{1/p^n}, $n = 1, 2, \ldots$ aus u. Den so entstehenden Körper K bewerten wir, indem wir der Größe u die Ordnungszahl 1 (also die Bewertung $1/e$) zuweisen. Da der so entstehende bewertete Körper K' ein Wurzelkörper in bezug auf $P(u)$ ist, ist in ihm die rechte Seite der Gleichung

$$x^p - u\,x - 1 = 0 \tag{9,6}$$

---

[24]) Vgl. Artin und Schreier, Hamb. math. Abh. 5 (1927), S. 225ff.

als Polynom erster Art irreduzibel. Wir bezeichnen mit P^* den derivierten Körper von $P(u)$. P^* ist perfekt, daher auch relativ perfekt. Adjungiert man zu P^* alle p-ten Wurzeln von u, so entsteht nach § 5, Satz I wieder ein relativ perfekter Körper $K^{*\prime}$, und wir dürfen annehmen, daß K' in $K^{*\prime}$ enthalten ist. Durch Adjunktion einer Wurzel α von (9, 6) entsteht aus $K^{*\prime}$ eine Erweiterung $K^{*\prime}(\alpha)$, von der wir beweisen werden, daß sie den Grad und den Defekt p in bezug auf K^* hat.

Es sei P_n^* der Unterkörper $P^*(u^{1/p^n})$ von K^*. Wir betrachten dann den Körper $P_n^*(\alpha)$. Nun folgt, wegen

$$\alpha^p - u\alpha - 1 = 0, \quad (\alpha - 1)^p = u\alpha, \tag{9,6 1}$$

da das Newtonsche Diagramm von (9, 6) gradlinig ist, daß α nach IV, § 3 auf jeden Fall die Bewertung 1 hat und $(\alpha - 1)^p$ die Ordnungszahl 1. Setzen wir daher für $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_0 - 1 = u^{1/p}\alpha_1$, so folgt aus (9, 6 1)

$$\alpha_1^p - u^{1/p}\alpha_1 - 1 = 0.$$

Hieraus folgt wiederum, daß die Ordnungszahl von $\alpha_1 - 1$ gleich $1/p^2$ ist und daher

$$\alpha_1 = 1 + u^{1/p^2}\alpha_2, \quad \alpha_2^p - u^{1/p^2}\alpha_2 - 1 = 0.$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine Folge von Größen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ mit

$$\alpha_{\nu-1} = 1 + u^{1/p^\nu}\alpha_\nu,$$

wo α_ν der Gleichung genügt:

$$\alpha_\nu^p - u^{1/p^\nu}\alpha_\nu - 1 = 0.$$

Hier können wir zuerst ν nur bis n laufen lassen, und erhalten für die in $P_n^*(\alpha)$ liegende Größe α_n die Gleichungen:

$$\alpha_n^p - u^{1/p^n}\alpha_n - 1 = 0, \quad (\alpha_n - 1)^p = u^{1/p^n}\alpha_n.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber, daß die Ordnungszahl von $\alpha_n - 1$ gleich $1/p^{n+1}$ ist. Daher ist der Verzweigungsindex von $P_n^*(\alpha)$ in bezug auf P_n^* wenigstens gleich p. Folglich ist $P_n^*(\alpha)$ in bezug auf P_n^* genau vom Grade p, so daß die Gleichung (9, 6) in jedem der Körper P_n^* irreduzibel bleibt und daher auch im Körper $K^{*\prime}$ irreduzibel ist. Daher ist der Grad von $K^{*\prime}(\alpha)$ in bezug auf $K^{*\prime}$ gleich p. Andererseits ist jeder in bezug auf $P^{*\prime}$ endliche Unterkörper von $K^{*\prime}(\alpha)$ ein Unterkörper eines der Körper $P_n^{*\prime}(\alpha)$ und hat daher in bezug auf $P^{*\prime}$ den Trägheitsgrad und den Defekt 1. Daher haben beide Körper $K^{*\prime}$ und $K^{*\prime}(\alpha)$ in bezug auf $P^{*\prime}$ sowohl den Trägheitsgrad als auch den Defekt 1. Nach § 6, Satz VI ist dann auch der Trägheitsgrad von $K^{*\prime}(\alpha)$ in bezug auf $K^{*\prime}$ gleich 1. Daher müßte entweder der Verzweigungsindex oder der Defekt von $K^{*\prime}(\alpha)$ in bezug auf $K^{*\prime}$ gleich p sein. Wäre aber der Verzweigungsindex von $K^{*\prime}(\alpha)$ in bezug auf $K^{*\prime}$ gleich p, so gäbe es in $K^{*\prime}(\alpha)$ eine Größe a, deren Ordnungszahl $\omega(a)$ nicht in $K^{*\prime}$ auftritt, während $p\,\omega(a)$ in $K^{*\prime}$ als Ord-

nungszahl einer gewissen Größe vorkommt. Da aber jene Größe von $K^{*\prime}$ in einem gewissen Körper $P_n^{*\prime}$ vorkommt, müßte $p\,\omega(a)$ ein rationaler Bruch mit dem Nenner p^n sein. Dann aber käme $\omega(a)$ als Ordnungszahl im Körper $P_{n+1}^{*\prime}$ und daher auch in $K^{*\prime}$ sicher vor. Daher hat $K^{*\prime}(\alpha)$ in bezug auf $K^{*\prime}$ den Defekt p, und wir haben zugleich ein weiteres Beispiel für den Fall, daß im Satze IX, § 6 in der zweiten Relation (6,71) das Kleinerzeichen gilt.

58. Die Zerlegung von Primdivisoren in algebraischen Erweiterungen mit Berücksichtigung der Mehrfachheit. Es sei K ein Körper, dessen Bewertung K' ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ in K entspricht. L sei eine endliche algebraische Erweiterung von K, in der $\mathfrak{p}$ in ein Produkt von k verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ zerfällt mit Partialgraden $n_\varkappa$, reduzierten Partialgraden $n_\varkappa^*$ und ersten Defekten $\delta_\varkappa'$, so daß, wenn n der Grad von L in bezug auf K ist,

$$n_\varkappa = n_\varkappa^*\,\delta_\varkappa', \quad n = \sum_{\varkappa=1}^{k} n_\varkappa$$

gilt.

Der einem Primdivisor $\mathfrak{P}_\varkappa$ entsprechend bewertete Körper L sei mit $L^{(\varkappa)}$ bezeichnet. Ist dann $\overline{K}^{(\varkappa)}$ eine mit $L^{(\varkappa)}$ verträgliche Erweiterung von K' zum derivierten Körper, so daß also $L^{(\varkappa)}$ und $\overline{K}^{(\varkappa)}$ in einer und derselben kleinsten bewerteten Erweiterung $M^{(\varkappa)}$ von K' liegen, so ist der Grad von $M^{(\varkappa)}$ in bezug auf $\overline{K}^{(\varkappa)}$ gleich $n_\varkappa^*$.

Es seien nun die Restklassenkörper von K' und $L^{(\varkappa)}$ mit $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{L}_\varkappa$ bezeichnet. Den Grad von $\mathfrak{L}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir als den Trägheitsgrad $t_\varkappa$ des Primdivisors $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{p}$. $t_\varkappa$ ist offenbar zugleich der Trägheitsgrad von $L^{(\varkappa)}$ in bezug auf K'. Den Verzweigungsindex $j_\varkappa$ von $L^{(\varkappa)}$ in bezug auf K' bezeichnen wir als den Verzweigungsindex von $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{p}$.

Nun sind der Trägheitsgrad und der Verzweigungsindex von $M^{(\varkappa)}$ in bezug auf $\overline{K}^{(\varkappa)}$ wiederum gleich $t_\varkappa$ bzw. $j_\varkappa$. Denn der Restklassenkörper von $\overline{K}^{(\varkappa)}$ ist offenbar wiederum $\mathfrak{R}$ isomorph, da ja jedes Element von $\overline{K}^{(\varkappa)}$ kongruent einem Element von K' ist. Der Restklassenkörper von $M^{(\varkappa)}$ ist aber wiederum $\mathfrak{L}_\varkappa$ isomorph, und zwar so, daß in dieser Isomorphiebeziehung die soeben erwähnte Isomorphie zwischen dem Restklassenkörper von $\overline{K}^{(\varkappa)}$ und $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Denn jedes Element von $M^{(\varkappa)}$ ist linear in gewissen Elementen von $L^{(\varkappa)}$ mit Koeffizienten aus $\overline{K}^{(\varkappa)}$, und diese Koeffizienten sind nach beliebig hohen Potenzen von $\mathfrak{P}_\varkappa$ kongruent gewissen Elementen von K'. Daher muß jedes Element vom $M^{(\varkappa)}$ einem Element von $L^{(\varkappa)}$ kongruent sein.

Genau ebenso ergibt sich, da die Elemente von $\overline{K}^{(\varkappa)}$ und $M^{(\varkappa)}$ nach beliebig hohen Potenzen der zugehörigen Primdivisoren kongruent zu ge-

eigneten Elementen aus K' bzw. $L^{(\varkappa)}$ sind, daß die Bewertungsmoduln $\mathfrak{m}_{\overline{K}^{(\varkappa)}}$, $\mathfrak{m}_{M^{(\varkappa)}}$ bzw. identisch sind mit den Bewertungsmoduln $\mathfrak{m}_{K'}$, $\mathfrak{m}_{L^{(\varkappa)}}$. Daher ist in der Tat $j_\varkappa$ der Verzweigungsindex von $M^{(\varkappa)}$ in bezug auf $\overline{K}^{(\varkappa)}$.

Nun folgt aus den Ergebnissen unserer Untersuchung über den Verzweigungssatz und den Defektsatz, angewandt auf die Erweiterung $M^{(\varkappa)}$ von $\overline{K}^{(\varkappa)}$, daß $n_\varkappa^*$ durch das Produkt $t_\varkappa j_\varkappa$ teilbar ist. Den Quotienten $\delta_\varkappa''$ — den Defekt von $M^{(\varkappa)}$ in bezug auf $\overline{K}^{(\varkappa)}$ — bezeichnen wir als den *zweiten Defekt* von $\mathfrak{P}_\varkappa$ in bezug auf $\mathfrak{p}$. $\delta_\varkappa''$ kann nur dann von 1 verschieden sein, wenn entweder K' von der Primzahlcharakteristik p ist, oder wenn eine natürliche Primzahl p im Körper K' kongruent 0 ist. In beiden Fällen muß $\delta_\varkappa''$ eine Potenz von p mit ganzem nicht negativem Exponenten sein. Damit erhalten wir

$$n_\varkappa^* = t_\varkappa j_\varkappa \delta_\varkappa'', \tag{9,7}$$

und daher folgt aus der Formel (4, 9)

$$n_\varkappa = t_\varkappa j_\varkappa \delta_\varkappa' \delta_\varkappa'' = t_\varkappa j_\varkappa \delta_\varkappa, \tag{9,8}$$

wo $\delta_\varkappa = \delta_\varkappa' \delta_\varkappa''$ als *der Totaldefekt von* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *in bezug auf* $\mathfrak{p}$ bezeichnet werden soll. So gilt schließlich:

$$n = \sum_{\varkappa=1}^{k} t_\varkappa j_\varkappa \delta_\varkappa' \delta_\varkappa'' = \sum_{\varkappa=1}^{k} t_\varkappa j_\varkappa \delta_\varkappa. \tag{9,9}$$

Im obigen sind der Trägheitsgrad und der Verzweigungsindex von $\mathfrak{P}_\varkappa$ definiert ohne Zuhilfenahme des derivierten Körpers. Dagegen benutzen wir zur Definition des Partialgrades bzw. des reduzierten Partialgrades den derivierten Körper oder wenigstens die zugehörigen Zerlegungskörper. Es ist aber wohl klar, daß man zur Definition der Zahl $n_\varkappa$ und $n_\varkappa^*$ auch ohne Betrachtung dieser besonderen Körper auskommen kann, indem man diese Zahlen für verschiedene einfache Erweiterungen aufstellt. Es handelt sich dann jedesmal darum, zu ermitteln, in welche Faktoren ein in K' irreduzibles Polynom $f(x)$ mit Koeffizienten aus K' zerfällt, wenn sämtliche Elemente des derivierten Körpers adjungiert werden, oder alle Elemente des derivierten Körpers, die algebraisch von der ersten Art in bezug auf K' sind. Eine solche Zerlegung ist aber immer möglich, sobald eine Zerlegung des betreffenden Polynoms in Faktoren nach einer hinreichend hohen Potenz des zugehörigen Primdivisors bekannt ist[25]) — sofern es sich um gegenseitig teilerfremde Faktoren handelt. Man hat daher zur Ermittlung von $n_\varkappa$ zuerst $f(x)$ in der Form zu schreiben:

$$f(x) = g(x^{p^d}),$$

[25]) Eine Abschätzung dieser Potenz kann der Abhandlung von Rychlik (Rychlik 1, S. 100) entnommen werden.

wo $g(y)$ nur einfache Wurzeln besitzt und d eine ganze nicht negative Zahl ist. Eine Zerlegung von g nach einer hinreichend hohen Potenz von $\mathfrak{p}$ in nicht weiter reduzible Faktoren liefert dann mit den Gradzahlen dieser Faktoren die Partialgrade $n_\varkappa$. Um allerdings nachzuprüfen, ob von 1 verschiedene erste Defekte auftreten, ob also $n_\varkappa^*$ von $n_\varkappa$ verschieden ist, muß für jede Folge von Teilern $g_\varkappa^{(\nu)}(x)$ von $g(x)$ nach ins Unendliche wachsenden Potenzen $\mathfrak{p}^{\mu_\nu}$, für die $g_\varkappa^{(\nu)}(x^{p^d})$ gegen einen Faktor von $f(x)$ konvergieren, untersucht werden, ob sie nach gleichfalls ins Unendliche wachsenden Potenzen von $\mathfrak{p}$ als Modul in K' p-ten Potenzen gewisser Polynome aus K' kongruent sind. In diesem Falle genügt es aber nicht mehr, daß solche Kongruenzen nach einer hinreichend hohen Potenz von $\mathfrak{p}$ erfüllt sind. Vielmehr impliziert das Auftreten eines ersten Defektes größer als 1 das Erfülltsein von *unendlich vielen Bedingungen*, sofern man diese Bedingungen mit Hilfe von Größen aus K allein formulieren will.

Ist endlich L eine *unendliche* algebraische Erweiterung von K, so kann man auch in diesem Falle eine Darstellung der Partialgrade mit Hilfe der Trägheitsgrade, Verzweigungsindizes und Defekte herleiten, wobei indessen „unendliche" Zahlen zu benutzen sind, und zwar Symbole, die Steinitz in seiner großen Körperabhandlung (Steinitz 1, S. 250) als G-Zahlen eingeführt hat. Indessen ist dies an Hand der von Steinitz gegebenen Festsetzungen mit Hilfe unserer Sätze so leicht durchzuführen, daß wir darauf nicht weiter eingehen.

Teil III.

Charakterisierung der allgemeinsten Bewertungstypen und der absoluten Riemannschen Fläche für beliebige Körper.

§ 10.

Spezielle Typen von Bewertungen transzendenter Erweiterungen.

59. Einfachste Bewertungstypen. Die Aufgabe, den Bewertungstypus eines bewerteten Körpers L' konstruktiv zu erfassen, werden wir in der Weise behandeln, daß wir zunächst einen auf besonders einfache Weise bewerteten Unterkörper K' von L' nachweisen und damit unsere Aufgabe auf diejenige zurückführen, alle Bewertungen einer Erweiterung eines gegebenen bewerteten Körpers K' zu finden, bei denen die Bewertung von K' fest bleibt. Da andererseits jede Erweiterung durch eine — eventuell transfinite — Folge von einfachen algebraischen und transzendenten Erweiterungen erfolgen kann und wir die algebraischen Erweiterungen nunmehr vollständig beherrschen, wird es sich sodann nur noch darum

handeln, alle Bewertungen einer einfachen transzendenten Erweiterung von K' aufzustellen, bei denen die Bewertung von K' unverändert bleibt.

Der Körper L' enthält einen kleinsten Unterkörper Π', der entweder mit dem Körper R' der rationalen Zahlen, oder im Falle der Primzahlcharakteristik p mit dem endlichen Körper P'_p der Restklassen mod p isomorph ist. P'_p ist immer halbbewertet, weil in ihm die $(p-1)$-te Potenz jedes von 0 verschiedenen Elements gleich 1 ist. In R' ist aber die Bewertung jeder ganzen Zahl als Summe von Einheiten immer höchstens gleich 1. Ist R' nicht halbbewertet, so gibt es wenigstens eine Primzahl p, deren Bewertung von 1 verschieden ist, und zwar muß dann $\|p\| < 1$ sein. *Für jede zu p teilerfremde Primzahl q ist aber dann* $\|q\| = 1$. Denn sind a und b zwei ganze Zahlen mit $ap + bq = 1$, so würde aus $\|q\| < 1$ folgen $\|1\| = \|ap + bq\| \leqq \mathrm{Max}(\|a\|\|p\|, \|b\|\|q\|) < 1$. Daher ist in diesem Falle die Bewertung von R' eine mit Hilfe der Primzahl p nach der Vorschrift von § 5, Nr. 26 erzeugte Bewertung, und $R' = R'_p$ kann als K' genommen werden.

Ist aber Π' halbbewertet, so gibt es in L' ein von 0 verschiedenes Element x, dessen Bewertung von 0 und 1 verschieden ist, und zwar können wir, da wir sonst x durch $1/x$ ersetzen können, annehmen, daß $\|x\| < 1$ ist. Nach Satz I, § 6, ist x sicher transzendent in bezug auf $\Pi'(x)$. Dann kann als K' der aus Π' durch Adjunktion von x erzeugte Körper $\Pi'(x)$ genommen werden. Und zwar ist dann jedes Element a von $\Pi'(x)$ eine rationale Funktion von x, die sich in der Form schreiben läßt:

$$a = x^k \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

wo $f_1(x)$, $f_2(x)$, Polynome in x mit Koeffizienten aus Π' sind, für die $f_1(0) \neq 0$, $f_2(0) \neq 0$ und k eine ganze rationale Zahl ist. Dann ist offenbar

$$\|a\| = \|x\|^k.$$

Im ersten Falle — K' gleich R'_p — ist der zugehörige derivierte Körper der Körper der Henselschen p-adischen Zahlen. Im zweiten Falle läßt sich aber der derivierte Körper von $\Pi'(x)$ als die Gesamtheit aller formalen Potenzreihen

$$\sum_{\nu=-m}^{\infty} c_\nu x^\nu \tag{10, 1}$$

auffassen, für beliebige ganze m und beliebige c_ν aus Π'.

60. Erweiterungen durch Adjunktion invariabler Elemente. Es sei K' ein bewerteter Körper. Wir führen eine neue Unbestimmte z ein und bilden den Körper $K'(z)$ aller rationalen Funktionen von z mit

Koeffizienten aus K'. Man kann nun diesen Körper auf folgende Weise bewerten: wir ordnen dem Element z selber eine beliebige positive Zahl g als Bewertung zu; ist $f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$ ein Element von $K'(z)$, wo a_μ in K' liegen, so ordne man diesem Element als Bewertung $\|f(z)\|$ das Maximum $\{f(z)\}_g$ der positiven oder verschwindenden Zahlen $\|a_\mu\| g^{m-\mu}$:

$$(10,2) \qquad \{f(z)\}_g = \mathrm{Max}\,(\|a_0\| g^m,\ \|a_1\| g^{m-1},\ \ldots,\ \|a_{m-1}\| g,\ \|a_m\|)$$

zu. Diese zuerst nur für Polynome in z definierte Funktion $\{f(z)\}_g$ genügt beiden charakteristischen Bedingungen einer Bewertungsfunktion:

$$(10,21) \qquad \begin{aligned} \{f_1(z)\}_g \{f_2(z)\}_g &= \{f_1(z) \cdot f_2(z)\}_g, \\ \{f_1(z) + f_2(z)\}_g &\leqq \mathrm{Max}\,(\{f_1(z)\}_g,\ \{f_2(z)\}_g). \end{aligned}$$

Daß die erste Bedingung erfüllt ist, folgt sofort aus dem Satz II in § 1. Um die zweite Relation zu beweisen, sei $\{f_1(z) + f_2(z)\}_g = \gamma$. Dann gibt es nach der Definition sicher wenigstens einen Index i, für welchen $\|a_{m-i} + b_{n-i}\| g^i = \gamma$ ist, wenn

$$\begin{aligned} f_1(z) &\equiv a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m, \\ f_2(z) &\equiv b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n \end{aligned}$$

gesetzt wird. Es ist aber $\|a_{m-i} + b_{n-i}\| \leqq \mathrm{Max}\,(\|a_{m-i}\|, \|b_{n-i}\|)$, also auch $\gamma \leqq \mathrm{Max}\,(\|a_{m-i}\| g^i, \|b_{n-i}\| g^i)$. Da aber

$$\|a_{m-i}\| g^i \leqq \|f_1(z)\|, \quad \|b_{n-i}\| g^i \leqq \|f_2(z)\|$$

gilt, so folgt schließlich

$$\{f_1(z) + f_2(z)\}_g \leqq \mathrm{Max}\,(\{f_1(z)\}_g,\ \{f_2(z)\}_g).$$

Es sei jetzt

$$r(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

ein beliebiges Element von $K'(z)$, wo $f_1(z)$, $f_2(z)$ zwei Polynome in z mit Koeffizienten aus K' sind. Dann ordnen wir $r(z)$ als die Bewertung $\|r(z)\|$ die Zahl

$$(10,22) \qquad \{r(z)\}_g = \frac{\{f_1(z)\}_g}{\{f_2(z)\}_g}$$

zu. Man sieht *erstens* leicht ein, daß diese Definition von $\{r(z)\}_g$ von der speziellen Wahl der Polynome $f_1(z)$, $f_2(z)$ in jener Darstellung von $r(z)$ unabhängig ist. Denn ist speziell

$$r(z) = \frac{\bar{f}_1(z)}{\bar{f}_2(z)}$$

eine solche Darstellung von $r(z)$, daß die Polynome $\bar{f}_1(z)$ und $\bar{f}_2(z)$ aus K' keinen gemeinsamen, von z abhängigen Teiler besitzen, so gilt für $f_1(z)$, $f_2(z)$:

$$f_1(z) = \bar{f}_1(z)\, g(z), \quad f_2(z) = \bar{f}_2(z)\, g(z),$$

wo $g(z)$ ein Polynom in z ist. Daraus folgt die Relation

$$\{r(z)\}_g = \frac{\{f_1(z)\}_g}{\{f_2(z)\}_g} = \frac{\{\bar{f}_1(z)\cdot g(z)\}_g}{\{f_2(z)\cdot g(z)\}_g} = \frac{\{\bar{f}_1(z)\}_g\{g(z)\}_g}{\{\bar{f}_2(z)\}_g\{g(z)\}_g} = \frac{\{\bar{f}_1(z)\}_g}{\{\bar{f}_2(z)\}_g},$$

welche unsere Definition von $\{r(z)\}_g$ rechtfertigt. Es sind *zweitens* die Bedingungen erfüllt, denen eine Bewertungsfunktion zu genügen hat. Denn sind

$$r(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}, \quad r^*(z) = \frac{f_1^*(z)}{f_2^*(z)}$$

zwei Elemente von $K'(z)$ und sind hier $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_1^*(z)$, $f_2^*(z)$ Polynome in z, so folgt

$$\{r(z)r^*(z)\}_g = \frac{\{f_1(z)f_1^*(z)\}_g}{\{f_2(z)f_2^*(z)\}_g} = \frac{\{f_1(z)\}_g\{f_1^*(z)\}_g}{\{f_2(z)\}_g\{f_2^*(z)\}_g} = \{r(z)\}_g\{r^*(z)\}_g$$

und

$$\{r(z)+r^*(z)\}_g = \frac{\{f_1(z)f_2^*(z)+f_1^*(z)f_2(z)\}_g}{\{f_2(z)f_2^*(z)\}_g}$$

$$\leqq \frac{\mathrm{Max}\,(\{f_1(z)f_2^*(z)\}_g,\ \{f_1^*(z)f_2(z)\}_g)}{\{f_2(z)\}_g\{f_2^*(z)\}_g}$$

$$= \mathrm{Max}\left(\frac{\{f_1(z)\}_g}{\{f_2(z)\}_g}, \frac{\{f_1^*(z)\}_g}{\{f_2^*(z)\}_g}\right) = \mathrm{Max}\,(\{r(z)\}_g, \{r^*(z)\}_g).$$

Also erhält man auf diesem Wege stets eine Bewertung von $K'(z)$[26]).

Im Obigen ist K' ein durchaus beliebiger bewerteter Körper. Wir sehen daher, daß ein beliebiger bewerteter Körper stets zu einem umfassenderen bewerteten Körper erweitert werden kann.

Wir führen nun allgemein den Begriff des invariablen Elementes durch die folgende Definition ein:

Besitzt ein in bezug auf K' transzendentes Element einer bewerteten Erweiterung L' des bewerteten Körpers K' die Eigenschaft, daß für jedes Element $r(z)$ des bewerteten Unterkörpers $K'(z)$ von L' die Relation gilt

$$\|r(z)\| = \{r(z)\}_g,$$

wo g eine positive Konstante ist, so nennen wir z invariabel in bezug auf K'.

61. Charakterisierung der invariablen Elemente. Aus den Relationen (10, 21) folgt leicht, daß, wenn z in einem bewerteten Körper $K'(z)$ in bezug auf K' invariabel sein soll, dazu schon hinreichend ist, wenn

[26]) Die Ansätze zu dieser Bewertungsmethode finden sich insofern bei Rella (Rella 1, S. 35 ff.), als er die obigen Relationen für *Polynome* herleitete und aus ihnen auch die Folgerung gezogen hat, daß jeder bewertete *Integritätsbereich* sich durch Adjunktion eines transzendenten Elements zu einem umfassenderen bewerteten Integritätsbereich erweitern läßt.

für jedes in K' *irreduzible* Polynom $f(x)$ mit Koeffizienten aus K' die Relation gilt:

$$\|f(z)\| = \{f(z)\}_\sigma.$$

Man kann nun eine einfachere charakteristische Eigenschaft der in bezug auf K' invariablen Elemente angeben, wenn man auf das Verhalten solcher Elemente in algebraischen Erweiterungen von K' eingeht.

I. *Es sei z invariabel in bezug auf K'. Es sei L' eine bewertete algebraische Erweiterung von K', welche zusammen mit $K'(z)$ in einem umfassenderen bewerteten Körper als Unterkörper enthalten ist. Dann ist z auch in bezug auf L' invariabel.*

Denn es sei $f_1(x)$ ein in L' irreduzibles Polynom in x mit Koeffizienten aus L'. Es ist zu beweisen, daß

$$\{f_1(z)\}_\sigma = \|f_1(z)\|$$

ist. Es sei $f(x)$ ein in K' irreduzibles Polynom, das durch $f_1(x)$ teilbar ist, und es sei $f(x) = f_1(x) f_2(x)$. Aus den charakteristischen Eigenschaften der Bewertung folgt, nach (1, 2),

$$\|f_1(z)\| \leqq \{f_1(z)\}_\sigma, \quad \|f_2(z)\| \leqq \{f_2(z)\}_\sigma.$$

Wäre nun $\|f_1(z)\| < \{f_1(z)\}_\sigma$, so würde daraus folgen $\|f(z)\| < \{f(z)\}_\sigma$, während $\|f(z)\| = \{f(z)\}_\sigma$ gilt, da z in bezug auf K' invariabel ist. Also ist $\|f_1(z)\| = \{f_1(z)\}_\sigma$, womit I, da $f_1(x)$ ein beliebiges in L' irreduzibles Polynom ist, bewiesen ist. Dieser Satz läßt sich offenbar umkehren:

II. *Ist L' eine bewertete algebraische Erweiterung von K', und ist z in bezug auf L' invariabel, so ist z auch in bezug auf K' invariabel,* weil nämlich jedes Polynom aus K' zugleich ein Polynom aus L' ist.

Wir nahmen oben an, daß L' und $K'(z)$ Unterkörper eines und desselben bewerteten Körpers sind. Aber auch im Falle, wo L' und $K'(z)$ nicht als Unterkörper eines und desselben bewerteten Körpers gegeben sind, kann man doch von den Beziehungen des Elementes z zu den Elementen von L' sprechen, und zwar auf Grund folgender allgemeiner Betrachtung:

Es sei $K'(z)$ eine bewertete Erweiterung von K', die durch Adjunktion des in bezug auf K' transzendenten Elementes z entsteht, L' eine bewertete algebraische Erweiterung von K', welche zunächst als *normal* in bezug auf K' vorausgesetzt sei. Nun gilt der folgende Satz:

III. *Ist $K'(z)$ eine bewertete Erweiterung von K', z transzendent in bezug auf K' und L' eine bewertete algebraische normale Erweiterung von K', so gibt es eine kleinste bewertete Erweiterung M' von $K'(z)$, welche einen mit L' analytisch isomorphen Unterkörper enthält, wobei die Elemente von K' sich selbst entsprechen. Jede andere Erweiterung von $K'(z)$, die diese*

Eigenschaften besitzt, ist mit M' so analytisch isomorph, daß die Elemente von $K'(z)$ sich selbst entsprechen.

In der Tat: ist N die Gesamtheit aller in K' irreduziblen Polynome, die in L' vollständig zerfallen, so bilde man die kleinste irgendwie bewertete Erweiterung M' von $K'(z)$, die alle Funktionen aus N vollständig zerfällt. Dann enthält offenbar M' eine kleinste Erweiterung von K', die alle Funktionen von N zerfällt — also nach Satz I, § 4 mit L' analytisch isomorph ist. Zerfallen andererseits in einer Erweiterung von $K'(z)$ alle Polynome von N — oder was dasselbe besagt, enthält sie einen mit L' isomorphen Unterkörper —, so enthält sie eine kleinste alle Funktionen von N zerfällende Erweiterung von $K'(z)$, welche nach I, § 4 mit M' analytisch isomorph ist. Und daß M' der kleinste diese Eigenschaften besitzende Körper ist, folgt daraus, daß jede Erweiterung von $K'(z)$, die einen mit L' isomorphen Unterkörper besitzt, alle Funktionen von N zerfällt. — Einen so gebildeten Körper M' wollen wir *kleinstes gemeinsames Vielfaches von L' und $K'(z)$* nennen.

Sprechen wir im Folgenden von den Beziehungen eines in bezug auf K' transzendenten Elementes z des bewerteten Körpers $K'(z)$ zu einer bewerteten algebraischen in bezug auf K' normalen Erweiterung L' von K', so verstehen wir darunter die Beziehungen von z zu dem mit L' analytisch isomorphen Unterkörper eines kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $K'(z)$ und L'. Ist aber L' nicht normal in bezug auf K', so kann L' zu einem normalen Körper erweitert werden — und dann können wir von den Beziehungen von z zu L' sprechen, indem wir L' als Unterkörper eines normalen Körpers auffassen. — Jetzt können wir folgenden Satz formulieren:

IV. *Ein Element z einer einfachen bewerteten Erweiterung $K'(z)$ von K' ist dann und nur dann invariabel in bezug auf K', wenn für jedes Element α jeder bewerteten algebraischen Erweiterung von K' $||z-\alpha||$ dem Maximum der Zahlen $||z||$, $||\alpha||$ gleich ist — wenn also die Bewertung von z durch Subtraktion von in bezug auf K' algebraischen Elementen nicht verkleinert werden kann.*

Beweis: Es sei $||z|| = g$, und es sei zuerst z invariabel in bezug auf K'. Dann können wir nach den vorhergehenden Sätzen annehmen, daß das Element α in einem Körper liegt, in bezug auf den z invariabel ist, und dann besagt unsere Behauptung nichts anderes, als daß

$$||z-\alpha|| = \{z-\alpha\}_g \tag{10,3}$$

gilt. Gilt umgekehrt (10, 3) für jedes in bezug auf K' algebraische Element α, und ist $f(x)$ ein beliebiges in K' irreduzibles Polynom in x, das

in einer geeigneten bewerteten algebraischen Erweiterung von K' in Linearfaktoren

$$x - \alpha_1,\ x - \alpha_2,\ \ldots,\ x - \alpha_n$$

zerfällt, so folgt aus (10, 3)

$$\|z - \alpha_1\| = \{z - \alpha_1\}_\varrho,\ \|z - \alpha_2\| = \{z - \alpha_2\}_\varrho,\ \ldots,\ \|z - \alpha_n\| = \{z - \alpha_n\}_\varrho,$$

und daraus durch Multiplikation $\|f(z)\| = \{f(z)\}_\varrho$, womit IV bewiesen ist.

Ist uns eine einfache transzendente Erweiterung $K'(z)$ von K' gegeben, so ist die Bewertung von $K'(z)$ durch die Angabe der Tatsache, daß z in bezug auf K' invariabel ist, und durch die Bewertung von z bereits vollständig bestimmt. Die Bewertungen durch invariable Elemente zerfallen, was ihre Wirkung auf den Restklassenkörper anbetrifft, in zwei wesentlich verschiedene Klassen. Wir werden im Folgenden sagen, daß eine reelle Zahl α *kommensurabel* mit dem Bewertungsmodul $\mathfrak{m}$ von K' ist, wenn ein von Null verschiedenes ganzzahliges Vielfaches von α in $\mathfrak{m}$ enthalten ist, sonst soll α *inkommensurabel* mit $\mathfrak{m}$ heißen. Wir nehmen nun zuerst an, daß die Ordnungszahl $\omega(z)$ eines in bezug auf K' invariablen Elements z mit dem Bewertungsmodul $\mathfrak{m}_{K'}$ kommensurabel ist. Dann gibt es eine Potenz z^m von z, deren Bewertung bereits in K' als Bewertung eines Elements a auftritt. z^m/a ist dann ein in bezug auf K' invariables Element, dessen Bewertung 1 ist. In der Tat kann für kein in bezug auf K' algebraisches Element b $\left\|\frac{z^m}{a} - b\right\| < 1$ werden, denn sonst müßte die Bewertung von $\|z^m - a\,b\|$ kleiner als die Bewertung von a, d. h. die Bewertung von z^m werden, entgegen der oben gegebenen Definition der invariablen Elemente.

Daher ist $u = \frac{z^m}{a}$ im Körper $K'(z)$ keinem Element von K' kongruent. Überdies kann für kein Polynom

$$f(u) = u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_n$$

mit ganzen Koeffizienten aus K' die Bewertung kleiner werden als die Bewertung von u^m, d. h. kleiner als 1. Ist daher $\mathfrak{R}$ der Restklassenkörper von K' und $\mathfrak{R}^*$ derjenige von $K'(u)$, und bezeichnen wir ferner das u im Körper $\mathfrak{R}^*$ entsprechende Element wiederum mit u, so ist $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}(u)$ eine *transzendente* Erweiterung von $\mathfrak{R}$. Und dasselbe gilt daher auch für den Restklassenkörper von $K'(z)$. Besitzt darüber hinaus K' einen halbbewerteten Unterkörper, so erfährt dieser Unterkörper durch Erweiterung zu $K'(z)$ selbst eine transzendente Erweiterung.

Es sei nun andererseits $\omega(z)$ inkommensurabel mit $\mathfrak{m}$. Wir können dann $\omega(z) > 0$ annehmen, da wir sonst nur z mit $1/z$ zu vertauschen brauchen. Dann ist die Bewertung jedes Ausdrucks

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n + \frac{a_{n+1}}{z} + \ldots + \frac{a_{n+k}}{z^k}$$

mit Koeffizienten a_ν aus K' gleich der maximalen Bewertung der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks. Hier kann aber nur das „freie" Glied a_n die Bewertung 1 haben. Hat daher $f(z)$ im Körper $K'(z)$ die Bewertung 1, so ist $f(z)$ kongruent a_n, also kongruent einem Element von K'. Daraus folgt sofort, daß in unserem Falle der Restklassenkörper von $K'(z)$ identisch mit dem Restklassenkörper von K' ist. Wir sehen:

V. *Ist $K'(z)$ eine transzendente Erweiterung von K' und z in bezug auf K' invariabel, so ist der Restklassenkörper von $K'(z)$ identisch mit dem Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von K', oder stellt eine transzendente Erweiterung von $\mathfrak{R}$ dar, je nachdem ob die Ordnungszahl von z inkommensurabel oder kommensurabel mit dem Bewertungsmodul von K' ist.*

Aus den Betrachtungen von Nr. 70 des § 11 (Satz XIII) wird sich ergeben, daß unter den Voraussetzungen des Satzes V jede in einer algebraischen Erweiterung von $K'(z)$ liegende einfache transzendente Erweiterung von K' auch durch Adjunktion eines invariablen Elements entsteht, und zwar von gleicher Art wie z.

§ 11.

Pseudokonvergenz. Fundamentalsatz über Bewertungen durch Adjunktion von Pseudolimes.

62. Pseudokonvergente Folgen. Die oben auseinandergesetzte Bewertungsmethode läßt sich auffassen als ein Spezialfall der sehr allgemeinen und wichtigen Bewertungsmethode durch pseudokonvergente Folgen.

Wir nennen eine unendliche Folge von Elementen eines bewerteten Körpers K'

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

pseudokonvergent, wenn für alle $n \geqq n_0$ entweder durchweg

$$\|a_{n+1} - a_n\| < \|a_n - a_{n-1}\|, \qquad n = n_0, n_0 + 1, \ldots, \tag{11,1a}$$

oder durchweg

$$\|a_{n+1} - a_n\| = 0, \qquad n = n_0, n_0 + 1, \ldots \tag{11,1b}$$

gilt.

Der Grenzwert der Zahlen $\|a_{n+1} - a_n\|$ für $n = \infty$ sei die *Breite* der pseudokonvergenten Folge genannt. Ist die Breite gleich 0, gilt also $\lim_{n=\infty} \|a_{n+1} - a_n\| = 0$, so gilt auch $\lim_{n=\infty} \|a_{n+p} - a_n\| = 0$ für beliebig sich ändernde, aber ganze positive Werte durchlaufende p, wie nach den charakteristischen Eigenschaften bewerteter Körper aus der Gleichung

$$a_{n+p} - a_n = (a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)$$

folgt. Also ist eine pseudokonvergente Folge mit der Breite 0 konvergent. Ist umgekehrt eine pseudokonvergente Folge (a_i) konvergent, so gilt

$$\lim_{n=\infty} ||a_{n+1} - a_n|| = 0,$$

und ihre Breite ist gleich 0. — Wir beweisen nun den Satz:

I. *Ist*

(11, 2) $$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

eine aus Elementen eines bewerteten Körpers K' gebildete pseudokonvergente Folge, so konvergiert die Folge der Zahlen

(11, 3) $$||a_1||, ||a_2||, \ldots, ||a_i||, \ldots,$$

und zwar so, daß für $i \geqq n_0$ entweder durchweg

$$||a_{i+1}|| = ||a_i||,$$

oder (für $i \geqq n_0$) durchweg

$$||a_{i+1}|| < ||a_i||$$

ist. Im ersten Falle heiße die pseudokonvergente Folge (11, 2) *von der ersten Art, im zweiten Falle von der zweiten Art.*

Beweis: Da die Richtigkeit unserer Behauptungen offenbar durch Weglassung endlich vieler Elemente von (11, 2) nicht beeinträchtigt wird, können wir annehmen, daß entweder für alle ganzen positiven n die Ungleichung

(11, 4) $$||a_{n+1} - a_n|| > ||a_{n+2} - a_{n+1}||, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

oder für alle ganzen $n \geqq 1$ die Gleichung

$$||a_{n+1} - a_n|| = 0, \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_i = \ldots$$

gilt. Wir können offenbar annehmen, daß stets (11, 4) gilt, da im zweiten Falle nichts zu beweisen ist. Gilt dann von einem n an stets $||a_n|| = ||a_{n+1}||$, so ist unser Satz bewiesen. Ist dies aber nicht der Fall, so behaupten wir, daß

(11, 41) $$||a_{n-1}|| > ||a_n|| > ||a_{n+1}|| \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

gilt. Denn aus $||a_n|| > ||a_{n+1}||$ folgt $||a_{n+1} - a_n|| = ||a_n||$, also, nach (11, 4), $||a_n - a_{n-1}|| > ||a_n||$, daher auch

$$||a_{n-1}|| = ||a_n - (a_n - a_{n-1})|| = ||a_n - a_{n-1}|| > ||a_n||.$$

Wenn aber aus $||a_n|| > ||a_{n+1}||$ auch $||a_{n-1}|| > ||a_n||$ folgt, so folgt aus $||a_{n-1}|| > ||a_n||$ weiter $||a_{n-2}|| > ||a_{n-1}||$ usf. Wenn daher (11, 41) nicht allgemein gilt, so muß von einem n an stets

(11, 42) $$||a_n|| \leqq ||a_{n+1}||$$

gelten, und zwar müßte dann in (11, 42) unendlich oft das Kleinerzeichen stehen. Es seien n, n' zwei solche Indizes, daß

$$||a_n|| < ||a_{n+1}|| = ||a_{n'}|| < ||a_{n'+1}||$$

gilt. Daraus würde aber $\|a_{n+1} - a_n\| = \|a_{n+1}\| = \|a_{n'}\| < \|a_{n'+1}\| = \|a_{n'+1} - a_{n'}\|$ folgen, und die Ungleichung

$$\|a_{n+1} - a_n\| < \|a_{n'+1} - a_{n'}\| \qquad (n' > n)$$

widerspricht (11, 4). Damit ist I bewiesen.

Wir wollen noch bemerken, daß für pseudokonvergente Folgen von der zweiten Art aus (11, 41) allgemein $\|a_{n+1} - a_n\| = \|a_n\|$ folgt, so daß

$$\lim_{n=\infty} \|a_n\| = \lim_{n=\infty} \|a_{n+1} - a_n\|$$

gleich der Breite der betreffenden Folge ist.

Wir wollen $\lim_{n=\infty} \|a_n\|$ die *Grenzbewertung* der Folge (11, 2) nennen. Aus I folgt, daß die Grenzbewertung von (11, 2) nur in zwei Fällen verschwinden kann: entweder, wenn (11, 2) eine pseudokonvergente Folge von der ersten Art ist, bei der alle a_n von einem n an verschwinden — oder, wenn (11,2) von der zweiten Art und konvergent ist und daher 0 zum Limes hat — also überhaupt dann und nur dann, wenn (11, 2) konvergent ist und 0 zum Limes hat.

63. Eine Verallgemeinerung des Satzes von der Grenzbewertung. Unser Satz von der Existenz der Grenzbewertung läßt sich nun bedeutend verallgemeinern. Es gilt nämlich der wichtige Satz:

II. *Ist $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ eine pseudokonvergente Folge aus einem bewerteten Körper K', und ist $f(x)$ ein Polynom in x mit Koeffizienten aus K', so hat die Folge*

(11, 43) $$\|f(a_1)\|, \ \|f(a_2)\|, \ldots, \|f(a_i)\|, \ldots$$

einen bestimmten Limes, der im allgemeinen positiv ist und nur dann verschwindet, wenn (11, 2) konvergent ist und eine Wurzel von $f(x)$ zum Limes hat. Und zwar werden entweder die Zahlen (11, 43) von einem n an einander gleich, oder aber es gilt durchweg von einem n an

$$\|f(a_{n+1})\| < \|f(a_n)\|.$$

Beweis: Wir bilden eine kleinste bewertete algebraische Erweiterung L' von K', in der $f(x)$ in lauter Linearfaktoren zerfällt

$$f(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n), \qquad \|c\| > 0.$$

Man kann offenbar vom Falle absehen, wo alle a_i von einem i an miteinander identisch sind. Man sieht dann ohne weiteres, daß jede der n Folgen

(11, 44) $$a_1 - \alpha_\nu, a_2 - \alpha_\nu, \ldots, a_i - \alpha_\nu, \ldots \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

pseudokonvergent ist. Denn es gilt $\|(a_{i+1} - \alpha_\nu) - (a_i - \alpha_\nu)\| = \|a_{i+1} - a_i\|$, also auch

$$\|(a_{i+1} - \alpha_\nu) - (a_i - \alpha_\nu)\| < \|(a_i - \alpha_\nu) - (a_{i-1} - \alpha_\nu)\|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

für alle i von einem gewissen an. Es hat also jede der n Folgen

$$||a_1 - \alpha_\nu||, ||a_2 - \alpha_\nu||, \ldots, ||a_i - \alpha_\nu||, \ldots, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

einen Grenzwert, dasselbe gilt daher auch von (11,43), weil ja

$$||f(a_i)|| = ||c|| \, ||a_i - \alpha_1|| \, ||a_i - \alpha_2|| \ldots ||a_i - \alpha_n||$$

ist. Sind nun alle Folgen (11, 44) von der ersten Art, so behalten von einem bestimmten i an alle Elemente jeder der Folgen (11, 44) eine und dieselbe Bewertung. Daher werden auch alle Zahlen (11, 43) von diesem i an einander gleich. Sind aber einige von den Folgen (11, 44) von der zweiten Art, so ist offenbar die Produktfolge (11, 43) monoton fallend.

Die Zahlen (11, 43) können endlich nur dann 0 zur Grenze haben, wenn für wenigstens ein ν

$$\lim_{i=\infty} ||a_i - \alpha_\nu|| = 0$$

ist, was aber eben besagt, daß α_ν der Limes von (11, 2) ist.

64. Ein Satz über pseudokonvergente Folgen. Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den Satz beweisen:

III. *Ist $f(x)$ ein Polynom in x mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper K', und ist* (11, 2) *eine pseudokonvergente Folge aus K', so ist auch die Folge*

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_i), \ldots \tag{11, 5}$$

pseudokonvergent.

Es sei indessen bemerkt, daß der Satz III, ebenso wie der ganze Inhalt dieser Nummer im Folgenden erst in Nr. 69 gebraucht wird, so daß Nr. 64 zuerst überschlagen werden kann.

Dem Beweise von III müssen wir ein Lemma vorausschicken:

IV. *Sind n reelle Zahlen*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

und eine Folge von reellen Zahlen α_i $(i = 1, 2, \ldots)$ mit

$$\alpha_{i+1} < \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

gegeben, und bildet man die n Funktionen

$$\varphi_1(\alpha_i) = c_1 + 1 \cdot \alpha_i, \quad \varphi_2(\alpha_i) = c_2 + 2 \cdot \alpha_i, \ldots, \quad \varphi_n(\alpha_i) = c_n + n\,\alpha_i,$$

so gibt es unter diesen Funktionen eine, $\varphi_m(\alpha_i)$, deren Wert von einem bestimmten i an die entsprechenden Werte der übrigen Funktionen übersteigt, so daß von diesem i an gilt

$$\varphi_m(\alpha_i) > \varphi_1(\alpha_i), \ldots, \quad \varphi_m(\alpha_i) > \varphi_{m-1}(\alpha_i), \quad \varphi_m(\alpha_i) > \varphi_{m+1}(\alpha_i), \ldots,$$
$$\varphi_m(\alpha_i) > \varphi_n(\alpha_i).$$

Es sei $\lim_{i=\infty} \alpha_i$ mit M bezeichnet, wo M auch gleich $-\infty$ sein kann. Man bilde die linearen Funktionen

$$\varphi_\nu(x) - \varphi_\mu(x)\ (\nu \gtrless \mu),\ \nu = 1, 2, \ldots, n,\ \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

Es sei A die kleinste von den Wurzeln dieser Funktionen, welche noch größer als M ist oder, falls es solche Wurzeln nicht gibt, $+\infty$. Es sei endlich t der erste Index, für welchen $\alpha_t < A$ ist. Für jeden Wert von x aus dem Intervall $A > x > M$ sind die Werte der Funktionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ voneinander verschieden. Es sei $\varphi_m(\alpha_t)$ die größte von den Zahlen $\varphi_1(\alpha_t), \varphi_2(\alpha_t), \ldots, \varphi_n(\alpha_t)$. Dann gilt allgemein für $A > x > M$:

$$\varphi_m(x) > \varphi_r(x), \qquad r = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n.$$

Da nun für $i \geqq t$ $A > \alpha_i > M$ gilt, so ist IV bewiesen. — IV läßt sich ebenso leicht durch eine geometrische Betrachtung beweisen.

Es ist jetzt nicht schwer, III zu beweisen. Wir nehmen zuerst an, es gäbe in einer geeigneten bewerteten algebraischen Erweiterung von K' ein solches Element α, daß die Folge

$$a_1 - \alpha, a_2 - \alpha, \ldots, a_i - \alpha, \ldots$$

eine pseudokonvergente Folge *zweiter Art* ist (in jener Erweiterung von K' natürlich). Dann ist, wie wir zeigen wollen, die Folge (11, 5) pseudokonvergent.

Bezeichnen wir allgemein $a_i - \alpha$ durch b_i, so hat das allgemeine Glied von (11, 5) die Gestalt $f(\alpha + b_i) = F(b_i)$, wo die Funktion

$$F(x) = d_0 x^n + d_1 x^{n-1} + \ldots + d_{n-1} x + d_n$$

die Koeffizienten aus dem bewerteten Körper $K'(\alpha)$ hat und ihr letzter Koeffizient $d_n = f(\alpha)$ ist. Um zu zeigen, daß $\|f(a_{i+1}) - f(a_i)\|$ von einem gewissen i an monoton abnimmt, genügt es daher, zu beweisen, daß die Folge

$$\varphi(b_1), \varphi(b_2), \ldots, \varphi(b_i), \ldots, \tag{11,51}$$

wo $\varphi(x) = F(x) - d_n = F(x) - f(\alpha) = f(\alpha + x) - f(\alpha)$ ist, pseudokonvergent ist, da

$$\begin{aligned} \|\varphi(b_{i+1}) - \varphi(b_i)\| &= \|(f(\alpha + b_{i+1}) - f(\alpha)) - (f(\alpha + b_i) - f(\alpha))\| \\ &= \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \end{aligned}$$

ist. Wir wollen nun die Bewertung von

$$\varphi(b_i) = d_0 b_i^n + d_1 b_i^{n-1} + \ldots + d_{n-2} b_i^2 + d_{n-1} b_i$$

für große i untersuchen. Der Logarithmus der Bewertung des Gliedes $d_\nu b_i^{n-\nu}$ von $\varphi(b_i)$ für $d_\nu \neq 0$ ist gleich $\lg\|d_\nu\| + (n-\nu)\lg\|b_i\|$. Und da nach unserer Annahme $\lg\|b_1\| > \lg\|b_2\| > \ldots > \lg\|b_i\| > \ldots$ gilt,

so können wir IV benutzen. Aus IV folgt, daß für ein gewisses m von einem i an

$$\lg \|d_m\| + (n-m)\lg\|b_i\| > \lg\|d_\nu\| + (n-\nu)\lg\|b_i\|,$$
$$\nu = 0, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n-1$$

gilt, oder, was dasselbe besagt:

$$\|d_m b_i^{n-m}\| > \|d_\nu b_i^{n-\nu}\|, \qquad \nu = 0, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n-1.$$

Daraus folgt weiter, daß für dieses m von einem i an

$$\|\varphi(b_i)\| = \|d_m b_i^{n-m}\|$$

gilt. Aus $\|b_i\| > \|b_{i+1}\| > \|b_{i+2}\| > \ldots$ für hinreichend große i folgt weiter $\|\varphi(b_i)\| > \|\varphi(b_{i+1})\| > \|\varphi(b_{i+2})\| > \ldots$, und daher ist (11, 51) pseudokonvergent (und von der zweiten Art).

Gibt es aber kein α mit der obigen Eigenschaft, so können wir nach der beim Beweise von II benutzten Überlegung sicher sein, daß für *jedes* Polynom $f(x)$ mit Koeffizienten aus K' in der Folge

$$\|f(a_1)\|, \|f(a_2)\|, \ldots, \|f(a_i)\|, \ldots$$

alle Elemente von einem gewissen i an einander gleich werden, weil für jede Wurzel α von $f(x)$ die Folge $a_i - \alpha$ $(i = 1, 2, \ldots,)$ pseudokonvergent von der ersten Art ist. Für den Fall, wo alle a_i zuletzt einander gleich werden, ist unser Satz evident, und wir dürfen daher annehmen, daß alle Zahlen $\|a_{i+1} - a_i\|$ von einem gewissen i an von 0 verschieden sind. Wir haben dann zu zeigen, daß von einem gewissen i an

$$\|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| > \|f(a_{i+2}) - f(a_{i+1})\|$$

gilt. — Ist n der Grad von $f(x)$, so gilt die Entwicklung

$$f(a_{i+1}) - f(a_i) = f_0(a_i)(a_{i+1} - a_i)^n + f_1(a_i)(a_{i+1} - a_i)^{n-1} + \ldots$$
$$+ f_{n-1}(a_i)(a_{i+1} - a_i),$$

wo $f_\nu(a_i)$ Polynome in a_i mit Koeffizienten aus K' sind. Für jedes ν werden die Zahlen

$$\|f_\nu(a_i)\| \qquad i = 1, 2, \ldots$$

von einem gewissen i an einander gleich und von 0 verschieden, wenn $f_\nu(x)$ nicht für alle x gleich 0 ist. Andererseits kann man endlich viele a_i weglassen. Bezeichnen wir allgemein $a_{i+1} - a_i$ durch b_i, so kann unsere Aufgabe so formuliert werden:

Gegeben ist eine Folge von Elementen $\ldots, b_i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *von* K' *mit* $\|b_{i+1}\| < \|b_i\|$ *und* n *Folgen aus* K'

$$c_1^{(\nu)}, c_2^{(\nu)}, \ldots, c_i^{(\nu)}, \ldots, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

wo für jedes ν

$$\|c_1^{(\nu)}\| = \|c_2^{(\nu)}\| = \ldots = \|c_i^{(\nu)}\| = \ldots = m_\nu \geqq 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

gilt und nicht alle m_ν gleich 0 sind; es ist zu beweisen, daß die Zahlen

$$k_i = \| c_i^{(0)} b_i^n + c_i^{(1)} b_i^{n-1} + \ldots + c_i^{(n-2)} b_i^2 + c_i^{(n-1)} b_i \|, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

von einem bestimmten i an beständig abnehmen.

Um die Zahlen k_i zu berechnen, berechnen wir den Logarithmus der Bewertung des allgemeinen Gliedes des Ausdruckes $c_i^{(0)} b_i^n + \ldots + c_i^{(n-1)} b_i$:

$$\lg \| c_i^{(\nu)} b_i^{n-\nu} \| = \lg m_\nu + (n - \nu) \lg \| b_i \|.$$

Bedenken wir, daß die Zahlen $\lg \| b_i \|$ beständig abnehmen, so können wir auch hier IV anwenden. Nach IV gibt es dann einen Index m, für den

$$\lg \| c_i^{(m)} b_i^{n-m} \| > \lg \| c_i^{(\nu)} b_i^{n-\nu} \|, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n-1,$$

von einem gewissen i an allgemein gilt. Von diesem i an gilt $k_i = m_m \| b_i^{n-m} \|$, also, da $\| b_i \| > \| b_{i+1} \| > \ldots$ ist, auch

$$k_i > k_{i+1} > k_{i+2} > \ldots,$$

was zu beweisen war.

65. Bewertung durch Adjunktion von Pseudolimes. Es sei jetzt wieder

(11, 6) $$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

eine pseudokonvergente Folge aus den Elementen des bewerteten Körpers K'. Wir nehmen zuerst an, daß sie, falls sie konvergent ist, keinen in bezug auf K' algebraischen Limes besitzt. Ist dann $r(x)$ eine rationale Funktion in x mit Koeffizienten aus K', so folgt aus der Möglichkeit, $r(x)$ als Quotienten zweier Polynome in x mit Koeffizienten aus K': $f_1(x)$, $f_2(x)$ darzustellen, daß

$$\lim_{i \to \infty} \| r(a_i) \| = \frac{\lim\limits_{i \to \infty} \| f_1(a_i) \|}{\lim\limits_{i \to \infty} \| f_2(a_i) \|}$$

existiert und von 0 verschieden ist, solange $r(x)$ nicht identisch verschwindet. Sind $r_1(x)$, $r_2(x)$ zwei rationale Funktionen in x mit Koeffizienten aus K', so folgt aus $\| r_1(a_i) + r_2(a_i) \| \leqq \text{Max}\,(\| r_1(a_i) \|, \| r_2(a_i) \|)$, $\| r_1(a_i) \| \| r_2(a_i) \| = \| r_1(a_i) r_2(a_i) \|$:

$$\lim_{i \to \infty} \| r_1(a_i) + r_2(a_i) \| \leqq \text{Max}\,\Big(\lim_{i \to \infty} \| r_1(a_i) \|, \lim_{i \to \infty} \| r_2(a_i) \| \Big);$$

$$\lim_{i \to \infty} \| r_1(a_i) r_2(a_i) \| = \lim_{i \to \infty} \| r_1(a_i) \| \lim_{i \to \infty} \| r_2(a_i) \|.$$

Betrachten wir also den Körper $K'(z)$ aller rationalen Funktionen in z mit Koeffizienten aus K' und ordnen wir jedem Element $r(z)$ dieses Körpers die Zahl $\lim\limits_{i \to \infty} \| r(a_i) \|$ als Bewertung zu, so erhalten wir einen bewerteten

Körper $K'(z)$, der K' als Unterkörper und z als ein in bezug auf K' transzendentes Element enthält.

Ist insbesondere (11, 6) eine konvergente Folge, so ist z im obigen Körper $K'(z)$ der Limes von (11, 6), da nach der Definition

$$\|z - a_i\| = \lim_{k \to \infty} \|a_k - a_i\|, \quad \lim_{i \to \infty} \|z - a_i\| = \lim_{i \to \infty} \lim_{k \to \infty} \|a_k - a_i\| = 0$$

gilt, weil die Breite einer konvergenten Folge gleich 0 ist.

Ist aber (11, 6) konvergent mit einem in bezug auf K' algebraischen Limes (der auch bereits in K' liegen kann), so kann man z dem Limes von (11, 6) gleichsetzen, und daraus wird für jedes Element $r(z)$ von $K'(z)$ folgen: $\lim_{i \to \infty} r(a_i) = r(z)$, $\lim_{i \to \infty} \|r(a_i)\| = \|r(z)\|$. Hier darf aber $r(x)$ keinen Nenner haben, der für $x = z$ verschwindet. *Man kann daher auch diesen Fall unter unsere Bewertungsmethode subsumieren, wenn man festsetzt, daß zum bewerteten Körper $K'(z)$ nur solche Elemente $r(z)$ zu adjungieren sind, für welche $\lim_{i \to \infty} \|r(a_i)\|$ einen endlichen Wert besitzt.* — Daß die Elemente mit der Bewertung 0 selber gleich 0 zu setzen sind, folgt aus den früheren Betrachtungen. — An der obigen Festsetzung ($\lim_{i \to \infty} \|r(a_i)\| < \infty$) halten wir im folgenden fest.

Die soeben entwickelte Bewertungsmethode läßt sich noch etwas verallgemeinern. *Es sei L' eine bewertete Erweiterung von K'; es sei*

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

eine aus in L' liegenden in bezug auf K' algebraischen Elementen gebildete pseudokonvergente Folge. Man führe eine Unbestimmte z ein und bewerte jedes Element $r(z)$ des Körpers $L'(z)$ durch $\lim_{i \to \infty} \|r(a_i)\|$. Der im so erhaltenen bewerteten Körper $L'(z)$ liegende Unterkörper $K'(z)$ stellt dann eine einfache bewertete Erweiterung von K' dar.

Wir werden nun zeigen, daß man auf diesem Wege *alle* einfachen bewerteten Erweiterungen eines bewerteten Körpers erhält. Vorerst müssen wir aber noch unsere Bewertungsmethode etwas näher untersuchen.

Definition: *Es enthalte eine bewertete Erweiterung L' eines bewerteten Körpers K' ein solches Element z und eine solche aus in L' liegenden in bezug auf K' algebraischen Elementen bestehende pseudokonvergente Folge:*

(11, 61) $$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots,$$

daß die Bewertung jedes Elementes $r(z)$ von $K'(z)$, wo $r(x)$ rational in x mit Koeffizienten aus K' ist, den Wert $\lim_{i \to \infty} \|r(a_i)\|$ hat. Dann soll z Pseudolimes dieser pseudokonvergenten Folge in bezug auf den Körper K' heißen.

Ist (11, 61) zugleich konvergent, so ist z, wie man sofort sieht, der *Limes* von (11, 61). Der Limesbegriff ist also ein Spezialfall des Begriffes

des Pseudolimes. Allerdings besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Limes und dem Pseudolimes, da in einem bewerteten Körper auch *mehrere* Pseudolimes einer pseudokonvergenten Folge in bezug auf einen bestimmten Unterkörper vorkommen können. Man sieht dies schon daraus, daß man die Adjunktion des Pseudolimes einer pseudokonvergenten Folge beliebig oft iterieren kann, wenn diese Folge nicht zugleich konvergent ist.

Ist z Pseudolimes von (11, 61) in bezug auf K', so gilt dasselbe auch in bezug auf jeden Unterkörper von K', in bezug auf den alle a_ν algebraisch sind. Andererseits gilt:

V. *Es sei in einer bewerteten Erweiterung L' eines Körpers K' z ein Pseudolimes in bezug auf K' einer pseudokonvergenten Folge*

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots \tag{11, 61}$$

von in bezug auf K' algebraischen Elementen aus L'. Es sei M' eine in L' liegende algebraische Erweiterung von K'. Dann ist z auch in bezug auf M' ein Pseudolimes von (11, 61).

Beweis: Da die Voraussetzungen des Satzes V gültig bleiben, wenn man von L' zu einer beliebigen bewerteten Erweiterung von L' übergeht, darf man annehmen, daß L' eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von K' enthält und daß M' diese Erweiterung ist, so daß M' als *algebraisch abgeschlossen* vorausgesetzt werden kann. Es genügt dann zu zeigen, daß $\lim_{i \to \infty} \|f(a_i)\| = \|f(z)\|$ ist, wenn $f(x)$ ein Polynom in x mit Koeffizienten aus M' ist. Da aber dann auch die Linearfaktoren von $f(x)$ Koeffizienten aus M' besitzen, so genügt es zu zeigen, daß $\lim_{i \to \infty} \|a_i - \alpha\| = \|z - \alpha\|$ gilt für jedes α aus M'. Es sei α eine Wurzel eines in K' irreduziblen Polynoms $f(x)$. Wir dürfen annehmen, daß z in bezug auf K' transzendent ist, weil für den Fall, daß (11, 61) konvergent ist, unsere Behauptung keines Beweises bedarf. Die in L' enthaltene kleinste Erweiterung von K', die M' und z enthält, sei mit K_0' bezeichnet, der bewertete Unterkörper $K'(z)$ von L' mit K_1'. Dann kann K_0 einerseits als $M'(z)$ betrachtet werden, andererseits als eine normale algebraische Erweiterung von $K'(z)$. Wir fassen nun K_0 auf als die aus M' durch Adjunktion eines transzendenten Elementes z entstehende Erweiterung und bewerten sie zu einem bewerteten Körper K_0'', indem wir z als Pseudolimes von (11, 61) in bezug auf M' definieren. Sind die in K_0 liegenden Wurzeln von $f(x)$: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so gilt nach der Definition eines Pseudolimes in K_0'', wenn die Bewertung von a in K_0'' allgemein mit $\varphi(a)$ bezeichnet wird:

$$\lim_{i \to \infty} \varphi(a_i - \alpha_1) = \varphi(z - \alpha_1), \quad \lim_{i \to \infty} \varphi(a_i - \alpha_2) = \varphi(z - \alpha_2), \ldots, \quad \lim_{i \to \infty} \varphi(a_i - \alpha_n) = \varphi(z - \alpha_n). \tag{11, 62}$$

Da z in K_0'' Pseudolimes von (11, 61) in bezug auf M', also auch in bezug auf K' ist, so ist der Unterkörper $K'(z)$ von K_0'' mit K_1' identisch. Da nun K_0' eine normale algebraische Erweiterung von $K_1' = K'(z)$ ist, so sind auch K_0' und K_0'' so analytisch isomorph, daß die Elemente von $K_1' = K'(z)$ sich selber entsprechen. Es entspreche dabei α in K_0' dem Element α_ν von K_0''. Dann gilt:

$$\|a_i - \alpha\| = \varphi(a_i - \alpha_\nu),$$

$$\|z - \alpha\| = \varphi(z - \alpha_\nu)$$

und daher, nach (11, 62),

$$\lim_{i \to \infty} \|a_i - \alpha\| = \|z - \alpha\|,$$

w. z. b. w.

VI. *Ist unter den Voraussetzungen des Satzes V ξ ein in bezug auf K' algebraisches Element von L', so ist $z - \xi$ Pseudolimes der pseudokonvergenten Folge*

$$a_1 - \xi, a_2 - \xi, \ldots, a_i - \xi, \ldots$$

in bezug auf $K'(\xi)$ und daher in bezug auf L'. Wir brauchen nur zu beweisen, daß

$$\lim_{i \to \infty} \|f(a_i - \xi)\| = \|f(z - \xi)\|$$

für jedes Polynom $f(x)$ mit Koeffizienten aus $K'(\xi)$ gilt, oder, wenn $f(x - \xi) = F(x)$ gesetzt wird, wo auch $F(x)$ Koeffizienten aus $K'(\xi)$ hat, daß

$$\lim_{i \to \infty} \|F(a_i)\| = \|F(z)\|$$

ist. Dies folgt aber daraus, daß nach dem eben Bewiesenen z Pseudolimes von (11, 61) auch in bezug auf $K'(\xi)$ ist.

Wir wollen noch zuletzt auf den Zusammenhang zwischen den invariablen Elementen und den pseudokonvergenten Folgen *zweiter* Art eingehen.

VII. *Ist z in einer bewerteten Erweiterung L' von K' in bezug auf K' Pseudolimes einer pseudokonvergenten Folge* (11, 61) *zweiter Art mit in bezug auf K' algebraischen Elementen aus L', so ist z invariabel in bezug auf K'.*

Beweis: Wir können annehmen, daß für $i \geqq 1$

$$\|a_{i+1}\| < \|a_i\|$$

ist und daß K' algebraisch abgeschlossen ist, so daß a_i in K' liegen. Es sei die Grenzbewertung $\lim_{i \to \infty} \|a_i\| = \|z\|$ von (11, 61) mit m bezeichnet. Es sei α ein Element aus K'. Es ist dann zu beweisen, daß $\|z - \alpha\| \geqq \|z\| = m$ ist.

Für $\|\alpha\| \gtrless \|z\|$ folgt dies aus den Grundeigenschaften der Bewertung. Es bleibt nur der Fall zu untersuchen, wo $\|\alpha\| = m = \|z\|$ ist. Es gilt dann

$$\|z-\alpha\| = \lim_{i\to\infty} \|a_i-\alpha\| = \lim_{i\to\infty} \|a_i\| = m = \|z\|,$$

da $\|a_i\| > m = \|z\| = \|\alpha\|$ ist. Damit ist VII bewiesen. Die Umkehrung von VII beweisen wir in Nr. 68. Zunächst aber zeigen wir:

VIII. *Ist z in einer bewerteten Erweiterung L' von K' invariabel in bezug auf K', so kann man in einer geeigneten algebraischen Erweiterung von L' eine pseudokonvergente Folge zweiter Art konstruieren, deren Pseudolimes in bezug auf K' z ist.* — Wir erweitern L' derart, daß in L' eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung von K' steckt. Man braucht dann offenbar nur eine solche pseudokonvergente Folge zweiter Art zu konstruieren, deren Grenzbewertung gleich $\|z\|$ ist. Es sei a ein Element von K' mit $\|a\| = d > 1$. Es gelte $d^\beta = \|z\|$ für eine reelle Zahl β und es sei β der Grenzwert der monoton abnehmenden Folge dezimaler Brüche

$$\frac{\alpha_1}{10} > \frac{\alpha_2}{100} > \ldots > \frac{\alpha_k}{10^k} > \ldots,$$

wo alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ ganz sind. Man bilde die Polynome

$$x^{10} - a,\ x^{100} - a,\ \ldots,\ x^{10^k} - a,\ \ldots,$$

die in L' nach Voraussetzung in Linearfaktoren zerfallen. Es sei irgendeine in L' liegende Wurzel von $x^{10^k} - a$ mit γ_k bezeichnet. Die Folge

$$\gamma_1^{\alpha_1},\ \gamma_2^{\alpha_2},\ \ldots,\ \gamma_k^{\alpha_k},\ \ldots$$

ist pseudokonvergent von der zweiten Art und von der Grenzbewertung $\|z\|$. Denn es gilt

$$\left\|\gamma_1^{\alpha_1}\right\| = d^{\frac{\alpha_1}{10}} > \left\|\gamma_2^{\alpha_2}\right\| = d^{\frac{\alpha_2}{100}} > \ldots > \left\|\gamma_k^{\alpha_k}\right\| = d^{\frac{\alpha_k}{10^k}} > \ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\gamma_k^{\alpha_k}\right\| = d^\beta = \|z\|.$$

66. Der Fundamentalsatz. Wir wenden uns nun der Aufstellung und dem Beweis unseres Fundamentalsatzes zu.

IX. *Es sei $K'(z)$ eine einfache bewertete Erweiterung eines bewerteten Körpers K'. Es gibt dann eine solche normale algebraische Erweiterung M' von K' und in dieser eine solche pseudokonvergente Folge*

(11, 61) $$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots,$$

daß in einem kleinsten gemeinsamen Vielfachen L' von M' und $K'(z)$ das Element z ein Pseudolimes von (11, 61) *in bezug auf K' ist.*

Beweis des Fundamentalsatzes. Offenbar darf K' als algebraisch abgeschlossen und z als transzendent in bezug auf K' vorausgesetzt werden. Wir fragen nun nach der unteren Grenze δ der Menge der Zahlen $\|z-\gamma\|$ für alle γ aus K'. Es sind zwei Fälle möglich:

A. δ wird erreicht, d. h. es gilt für ein γ aus K' $\|z-\gamma\| = \delta$. Das Element $z-\gamma$ von L' hat die Bewertung δ und ist daher *invariabel in bezug auf* K'. Ist δ gleich 0, so ist $z = \gamma$, also kann z als Limes (und daher auch Pseudolimes) der Folge

$$\gamma, \gamma, \gamma, \ldots$$

aufgefaßt werden. Ist aber $\delta > 0$, so können wir auf das in bezug auf K' invariable Element $z-\gamma$ den Satz VIII anwenden, und in K' eine pseudokonvergente Folge zweiter Art

(11, 61) $$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

bilden, deren Pseudolimes in bezug auf K' $z-\gamma$ ist, so daß also z ein Pseudolimes von

$$a_1+\gamma, a_2+\gamma, \ldots, a_i+\gamma, \ldots$$

in bezug auf K' ist. Damit ist der Fall A erledigt.

B. Wird die untere Grenze δ von $\|z-\gamma\|$ nicht erreicht, so gibt es eine unendliche Folge von Elementen von K':

(11, 7) $$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i, \ldots$$

von der Eigenschaft, daß die Relationen gelten

(11, 71) $$\lim_{i\to\infty} \|z-\gamma_i\| = \delta; \quad \|z-\gamma_i\| > \|z-\gamma_{i+1}\|, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Aus (11, 71) folgt, daß $\|\gamma_{i+1}-\gamma_i\| = \|z-\gamma_i\|$ ist, da $\gamma_{i+1}-\gamma_i = (z-\gamma_i) - (z-\gamma_{i+1})$ gilt. Daraus folgt weiter

$$\|\gamma_{i+1}-\gamma_i\| > \|\gamma_{i+2}-\gamma_{i+1}\|,$$

so daß (11, 7) eine *pseudokonvergente* Folge ist. Wir wollen nun zeigen, daß z Pseudolimes von (11, 7) in bezug auf K' ist, d. h. daß für jedes Polynom $f(x)$ mit Koeffizienten aus K'

$$\|f(z)\| = \lim_{i\to\infty} \|f(\gamma_i)\|$$

ist. Es genügt zu zeigen, daß für jedes lineare Polynom $x-\alpha$ mit α aus K'

$$\lim_{i\to\infty} \|\gamma_i-\alpha\| = \|z-\alpha\|$$

gilt. Dies kann aber so geschrieben werden:

$$\lim_{i\to\infty} \|(z-\alpha)+(\gamma_i-z)\| = \|z-\alpha\|.$$

Es genügt daher zu beweisen, daß von einem gewissen i an $\|z-\alpha\| > \|\gamma_i-z\|$ ist, weil daraus nach den Grundeigenschaften bewerteter Körper sogar $\|(z-\alpha)+(\gamma_i-z)\| = \|z-\alpha\|$ folgt. Nun ist aber $\|z-\alpha\|$ gewiß größer als δ, da α in K' liegt, während nach (11, 71) $\lim_{i\to\infty} \|\gamma_i-z\| = \delta$ ist und für γ_i aus K' δ nicht „erreicht" wird. Damit ist auch der Fall B erledigt.

67. Bewertung beliebiger Erweiterungen. Durch den damit erbrachten Beweis des Satzes, daß jede einfache Erweiterung eines bewerteten Körpers K' durch Adjunktion eines Pseudolimes einer aus in bezug auf K' algebraischen Elementen gebildeten pseudokonvergenten Folge bewirkt wird, ist die allgemeinste Lösung der Aufgabe gegeben, eine einfache Erweiterung eines bewerteten Körpers zu bewerten. Ist diese einfache Erweiterung transzendent, so dürfen offenbar nichtkonvergente pseudokonvergente Folgen benutzt werden, oder aber solche konvergente Folgen, deren Limes in bezug auf K' transzendent ist. — Ist uns nun eine ganz beliebige Erweiterung L' eines bewerteten Körpers K' gegeben, so kann man, nach einem Satz von Steinitz (Steinitz 1, S. 293) einen solchen Unterkörper T' von L' finden, daß L' eine rein algebraische Erweiterung von T' ist, während T' aus K' durch Adjunktion einer Menge N in bezug auf K' transzendenter Elemente von L' entsteht, wobei die Elemente von N die Eigenschaft besitzen, *in bezug auf K' algebraisch unabhängig zu sein*, so daß jedes Polynom mit Koeffizienten aus K' in endlich vielen Elementen von N in L' von 0 verschieden ist, falls es nicht identisch verschwindet. Werden nun die Elemente von N wohlgeordnet, so kann man dann T' auffassen als das Resultat einer wohlgeordneten Folge einfacher transzendenter Erweiterungen, und daher ist die Frage nach der Bewertung von T' durch unsere Entwickelungen auch gelöst. Dann ist aber auch die Frage nach allen Bewertungen der algebraischen Erweiterung L' von T' durch die Entwicklungen des § 4 gelöst. Freilich muß dabei wiederholt vom allgemeinen Auswahlpostulat Gebrauch gemacht werden, sowohl bei dem Beweis der soeben benutzten Steinitzschen Sätze, als auch bei der Wohlordnung von N, also auch bei den Beweisen unserer Sätze. Entsteht aber L' aus K' durch Adjunktion endlich oder abzählbar vieler Elemente (welche übrigens beliebig — transzendent oder algebraisch — in bezug auf K' sein können), so ist die Benutzung des allgemeinen Auswahlprinzips durchweg vermeidbar. Man kann mit dem Postulat über die Möglichkeit der Auswahl aus endlich oder abzählbar vielen Elementen auskommen, wenn auch hierzu die Betrachtungen dieses Paragraphen an verschiedenen Punkten abgeändert werden müßten.

68. Invariable Elemente und pseudokonvergente Folgen zweiter Art. Für die weitere Diskussion der Eigenschaften pseudokonvergenter Folgen ist die Umkehrung des Satzes VII von Bedeutung. Es sei K' ein bewerteter Körper und a_ν eine pseudokonvergente Folge mit Elementen aus K'. Es sei ferner für $n \geqq n_0$

$$\|a_{n+2} - a_{n+1}\| < \|a_{n+1} - a_n\|, \tag{11, 72}$$

und es sei die Breite β der Folge a_ν, d. h. $\lim_{\nu \to \infty} \|a_{\nu+1} - a_\nu\|$ positiv. Es sei nun z in einer bewerteten Erweiterung L' von K' ein Pseudolimes der Folge a_ν. Dann gilt für $\nu \geqq n_0$

$$\|z - a_\nu\| = \lim_{\mu \uparrow \infty} \|a_\mu - a_\nu\| = \|\sum_{\varkappa=\nu}^{\mu-1} (a_{\varkappa+1} - a_\varkappa)\|,$$

und hier ist wegen (11,72) die rechte Seite gleich $\|a_{\nu+1} - a_\nu\|$. Hieraus folgt:

X. *Ist a_ν eine pseudokonvergente Folge mit der Breite β aus einem bewerteten Körper K', ist z ein Pseudolimes von a_ν aus einer bewerteten Erweiterung L' von K', so folgt aus* (11,72):

(11,73) $$\|z - a_\nu\| = \|a_{\nu+1} - a_\nu\|, \quad \nu \geqq n_0;$$

(11,74) $$\|z - a_\nu\| \downarrow \beta, \quad \nu \geqq n_0, \quad \nu \uparrow \infty.$$

Hieraus folgt aber sofort die Umkehrung des Satzes VII. Wir können bei ihrer Formulierung die Voraussetzungen des Satzes VII insofern vereinfachen, als wir annehmen können, daß die Elemente der Folge a_ν bereits im Körper K' liegen.

XI. *Ist z in einer bewerteten Erweiterung L' von K' Pseudolimes einer pseudokonvergenten Folge a_ν mit Elementen aus K', und ist z invariabel in bezug auf K', so ist die Folge a_ν pseudokonvergent von der zweiten Art*

In der Tat folgt aus der Invariabilität von z, wenn mit β die Breite der Folge a_ν bezeichnet wird, wegen (11,74),

$$\|z\| \leqq \|z - a_\nu\|, \quad \|z\| \leqq \beta.$$

Andererseits folgt aus der Definition des Pseudolimes

$$\|a_\nu\| \to \|z\|, \quad \|a_{\nu+1} - a_\nu\| \leqq \mathrm{Max}(\|a_\nu\|, \|a_{\nu+1}\|),$$

so daß

$$\beta = \lim_{\nu \to \infty} \|a_{\nu+1} - a_\nu\| \leqq \|z\|$$

gilt und daher

(11,75) $$\beta = \|z\|$$

ist.

Wäre nun von einem ν an $\|a_\nu\| = \|z\| = \beta$, so würde daraus von einem ν an folgen $\|a_{\nu+1} - a_\nu\| \leqq \beta$, was mit der Definition der pseudokonvergenten Folge im Widerspruch steht. Da daher für beliebig große ν $\|a_\nu\|$ von $\|z\|$ verschieden ist, folgt aus dem Satz I, daß $\|a_\nu\| \downarrow \|z\|$ ist, d. h., daß die Folge a_ν pseudokonvergent von der zweiten Art ist, was zu beweisen war.

69. Die Distanz eines Pseudolimes vom Grundkörper. Es sei K' algebraisch abgeschlossen, $a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ eine pseudokonvergente Folge von Elementen von K' und $K'(z)$ sei so bewertet, daß z dabei als Pseudolimes von $a_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ aufgefaßt wird. Wir betrachten dann wieder

die untere Grenze δ der Größen $\|z-\alpha\|$ für alle α aus K' bzw. einer bewerteten Erweiterung L' von K'. Wir können offenbar δ auffassen als die Entfernung von z vom Körper K' bzw. L'. $\|z-\alpha\| = \lim\limits_{\nu\to\infty} \|a_\nu - \alpha\|$ bezeichnen wir als die Distanz von z bzw. der pseudokonvergenten Folge a_ν von α. Es sind nun für $L' = K'$ drei Fälle möglich:

1. Fall: δ wird nicht erreicht, d. h. für alle α aus K' gilt:

$$\delta < \|z-\alpha\| = \lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu - \alpha\|.$$

2. Fall: für ein α aus K' ist $\delta = \|z-\alpha\| = \lim\limits_{\nu\to\infty} \|a_\nu - \alpha\|$, dagegen soll *nicht* für dieses α von einem ν an durchweg $\delta = \|a_\nu - \alpha\|$ sein.

3. Fall: $\delta = \|z-\alpha\|$ für ein α aus K', und es ist sogar für dieses α von einem ν an $\delta = \|a_\nu - \alpha\|$.

Ist nun $\delta = 0$, so wäre im dritten Fall z ein Element von K', also nicht transzendent in bezug auf K'. Im zweiten Fall wäre die Folge a_ν konvergent gegen ein Element α von K', so daß wieder z in K' enthalten, also nicht transzendent in bezug auf K' wäre. Im ersten Fall dagegen liegt zwar z nicht in K', läßt sich aber durch Größen aus K' „beliebig gut" approximieren, so daß z dem derivierten Körper $\overline{K'}$ von K' angehört.

Wir wollen von nun an δ *als positiv annehmen.* Dann ist zuerst der dritte Fall unmöglich. In der Tat müßte im dritten Fall nach Satz VI $z-\alpha$ ein invariables Element mit der Bewertung δ und zugleich Pseudolimes der pseudokonvergenten Folge $b_\nu = a_\nu - \alpha$ sein, wo $\|b_\nu\| = \delta$ gilt, so daß die Folge b_ν pseudokonvergent von der ersten Art wäre. Dies widerspricht aber dem Satz XI.

Wir betrachten nun zuerst den ersten Fall. In diesem Falle werden wir z als *eigentlichen Pseudolimes* in bezug auf K' bezeichnen, und ebenso in bezug auf jeden Unterkörper von K', in bezug auf den K' algebraisch ist. Dann ist $z-\alpha$ für kein α aus K' invariabel in bezug auf K', da ja sonst $\|z-\alpha\| = \delta$ für ein solches α sein müßte. Daher ist nach Satz XI jede Folge $a_\nu - \alpha$ für ein α aus K' pseudokonvergent *von der ersten Art*, und von einem ν an sind die Zahlen $\|a_\nu - \alpha\|$ einander gleich. Daher ist für jedes α aus K'

$$\|z-\alpha\| = \|a_\nu - \alpha\|$$

für ein geeignetes ν, so daß die Ordnungszahlen aller Differenzen $z-\alpha$ und daher auch aller rationalen Funktionen von z mit Koeffizienten aus K', d. h. aller Größen von $K'(z)$, dem Bewertungsmodul $\mathfrak{m}$ von K' angehören.

Es sei nun andererseits β die Breite der Folge (a_ν) und α ein Element aus K'. Setzen wir $z - \alpha = u$, so gilt

$$\|u\| = \|z - \alpha\| = \lim_{\nu \to \infty} \|a_\nu - \alpha\| = \|a_\nu - \alpha\|, \quad \nu \geqq \nu_0.$$

Andererseits nimmt $\|(a_{\nu+1} - \alpha) - (a_\nu - \alpha)\|$ monoton gegen β ab und ist für $\nu \geqq \nu_0$ höchstens gleich $\|u\|$, so daß

$$\beta < \|u\| = \|z - \alpha\|$$

ist; ferner gilt aber für $\mu > \nu \geqq \nu_1$

$$\|(a_\mu - \alpha) - (a_\nu - \alpha)\| = \|a_\mu - a_\nu\| = \|a_{\nu+1} - a_\nu\| \leqq \frac{\|u\| + \beta}{2},$$

und daher für $\mu \to \infty$

$$\|(z - \alpha) - (a_\nu - \alpha)\| = \|u - (a_\nu - \alpha)\| \leqq \frac{\|u\| + \beta}{2} < \|u\|.$$

Wir sehen, daß es zu $z - \alpha$ ein $p = a_\nu - \alpha$, $\nu \geqq \nu_1$ aus K' gibt, derart, daß $\|z - \alpha - p\| < \|z - \alpha\|$ ist.

Gilt ferner

$$\|v_1 - p_1\| < \|v_1\|, \quad \|v_2 - p_2\| < \|v_2\|,$$

so folgt $\|v_1\| = \|p_1\| > 0$, $\|v_2\| = \|p_2\| > 0$ und sodann

$$\|v_1 v_2 - p_1 p_2\| = \|v_1 (v_2 - p_2) + p_2 (v_1 - p_1)\|$$

$$\leqq \operatorname{Max}(\|v_1 (v_2 - p_2)\|, \|p_2 (v_1 - p_1)\|) < \|v_1 v_2\|,$$

$$\left\| \frac{v_1}{v_2} - \frac{p_1}{p_2} \right\| = \left\| \frac{p_2 (v_1 - p_1) - p_1 (v_2 - p_2)}{v_2 p_2} \right\|$$

$$\leqq \operatorname{Max}\left(\left\| \frac{v_1 - p_1}{v_2} \right\|, \left\| \frac{p_1}{p_2} \frac{v_2 - p_2}{p_2} \right\| \right) < \left\| \frac{v_1}{v_2} \right\|.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Relationen folgt: Ist

$$r(z) = c \frac{(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_m)}{(z - \beta_1) \dots (z - \beta_n)}$$

ein Element von $K'(z)$, wo c, $\alpha_1, \dots \alpha_m$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ in K' liegen, und sind $p_1, \dots, p_m$, $q_1, \dots, q_n$ Größen aus K', für die

$$\|z - \alpha_i - p_i\| < \|z - \alpha_i\|, \quad \|z - \beta_k - q_k\| < \|z - \beta_k\|,$$

$$i = 1, \dots, m; \; k = 1, \dots, n$$

ist, so gilt

$$\left\| r(z) - c \frac{p_1 \cdots p_m}{q_1 \cdots q_n} \right\| < \|r(z)\|, \tag{11, 8}$$

so daß es also in K' ein s gibt, für das $\|r(z) - s\| < \|r(z)\|$ gilt, und $r(z)$ ist sicher nicht invariabel in bezug auf K'. Ist insbesondere $\|r(z)\| = 1$, so folgt, *daß $r(z)$ in $K'(z)$ kongruent einer Größe aus K' ist.* Zusammenfassend erhalten wir:

XII. *Durch Adjunktion eines eigentlichen Pseudolimes z zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper K' wird weder sein Bewertungsmodul, noch der Restklassenkörper geändert.*

Ist allgemeiner z ein eigentlicher Pseudolimes in bezug auf einen *beliebigen* (nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen) bewerteten Körper K' (d. h. ein eigentlicher Pseudolimes in bezug auf eine kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung von K'), und ist L' eine algebraische Erweiterung von $K'(z)$, so ist offenbar der Restklassenkörper von L' eine *algebraische* Erweiterung des Restklassenkörpers von K', und die Ordnungszahl jeder Größe aus L' ist *kommensurabel* mit dem Bewertungsmodul $\mathfrak{m}$ von K'.

Im zweiten Falle, wo $\delta = \lim_{\nu \to \infty} \|a_\nu - \alpha\| = \|z - \alpha\|$ für ein gewisses α aus K' ist, ist offenbar $z - \alpha$ in bezug auf K' *invariabel*, so daß z in unserem Falle eine Summe einer Größe aus K' und eines in bezug auf K' invariablen Elements ist.

Aus den obigen Betrachtungen folgt weiter, daß für $\delta > 0$ der zweite Fall zutrifft, wenn es in K' ein Element gibt, für das die Folge $a_\nu - \alpha$ pseudokonvergent von der zweiten Art wird. Gibt es kein solches α, so trifft der erste Fall zu. Da demnach die Unterscheidung der beiden Fälle von der Folge a_ν und dem Körper K' abhängt, wollen wir allgemein eine pseudokonvergente Folge a_ν mit Elementen aus einem algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körper K' und mit positiver Breite β als *eigentlich pseudokonvergent* in bezug auf K' bezeichnen, wenn für kein α aus K' die Folge $a_\nu - \alpha$ pseudokonvergent von der zweiten Art ist. Die Voraussetzung $\delta > 0$ ist aber mit der Annahme $\beta > 0$ gleichbedeutend, da, wie wir im Satz XIV beweisen, allgemein $\beta = \delta$ ist.

70. Transzendente Größen 1., 2. und 3. Art. Es sei nun z ein in bezug auf einen beliebigen bewerteten Körper K' transzendentes Element aus dem bewerteten Körper $K'(z)$, und es sei $\mathfrak{K}$ der Restklassenkörper von K', $\mathfrak{m}$ der Bewertungsmodul von K'. Wir nennen z *von der ersten Art in bezug auf* K', wenn z ein eigentlicher Pseudolimes in bezug auf K' ist; z soll *von der zweiten Art in bezug auf* K' heißen, wenn $z = \alpha + u$ ist, wo α in bezug auf K' algebraisch ist, und u in bezug auf $K'(\alpha)$ invariabel mit einer Ordnungszahl, die *kommensurabel* mit $\mathfrak{m}$ ist; ist dagegen eine solche Darstellung möglich, aber die Ordnungszahl von u dabei *inkommensurabel* zu $\mathfrak{m}$, so soll z als eine Größe *dritter Art in bezug auf* K' bezeichnet werden. Aus den obigen Bemerkungen über die Distanz von z zur kleinsten algebraisch abgeschlossenen Erweiterung von K' folgt, daß, wenn die Größe z nicht im derivierten Körper dieser Erweiterung liegt, diese Größe in bezug auf K' entweder von der ersten oder von der zweiten oder von der dritten Art ist. Aus dem Satze V, § 10 folgt, daß,

wenn z von der zweiten Art in bezug auf K' ist, der Restklassenkörper von $K'(z)$ eine transzendente Erweiterung von $\mathfrak{K}$ ist. Dasselbe gilt dann natürlich für jede algebraische Erweiterung L' von $K'(z)$. Die Ordnungszahlen *aller* Elemente von L' sind aber in diesem Fall kommensurabel zu $\mathfrak{m}$. Ist dagegen z von der dritten Art in bezug auf K', so gibt es im Bewertungsmodul von $K'(z)$ Größen, die zu $\mathfrak{m}$ inkommensurabel sind. Und dasselbe gilt dann für jede algebraische Erweiterung L' von $K'(z)$. Andererseits ist dann der Restklassenkörper von L' sicher algebraisch in bezug auf $\mathfrak{K}$. Man sieht, in welchem Umfang die Sätze V, § 10 und XII umkehrbar sind.

Ist nun u eine Größe aus L', die nicht algebraisch in bezug auf K' ist, so daß z in bezug auf $K'(u)$ algebraisch ist, so muß offenbar, wenn z von der zweiten Art in bezug auf K' ist, auch der Restklassenkörper von $K'(u)$ transzendent in bezug auf $\mathfrak{K}$ sein. Ist aber z von der dritten Art in bezug auf K', so muß es im Körper $K'(u)$ Größen geben, deren Ordnungszahl inkommensurabel zu $\mathfrak{m}$ ist; und dann kann u weder von der ersten noch von der zweiten Art in bezug auf K sein — ist also von der dritten Art. Wir sehen:

XIII. *Ist z eine in bezug auf einen bewerteten Körper K' transzendente Größe, die nicht im derivierten Körper der kleinsten algebraisch abgeschlossenen Erweiterung von K' liegt, und ist u eine Größe aus einer bewerteten algebraischen Erweiterung von $K'(z)$, die selbst transzendent in bezug auf K' ist, so ist u von derselben Art in bezug auf K' wie z.*

71. Die Bedeutung der Breite einer pseudokonvergenten Folge. Wir haben im Obigen die Zahl δ mehr postulativ definiert. Wir behaupten nun, daß sie gleich der Breite der Folge a_ν ist:

XIV. *Ist K' ein algebraisch abgeschlossener bewerteter Körper, a_ν eine pseudokonvergente Folge aus K', so ist die Distanz δ dieser Folge — und damit jedes ihrer Pseudolimes — vom Körper K' gleich der Breite $\beta = \lim\limits_{\nu \to \infty} \| a_{\nu+1} - a_\nu \|$ der Folge.*

Beweis: Ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, so gibt es nach Voraussetzung Elemente α von K', für die $\lim\limits_{\nu \to \infty} \| a_\nu - \alpha \| < \delta + \varepsilon$ ist. Dann gilt für $\nu > \nu_0$

$$\| a_\nu - \alpha \| < \delta + \varepsilon, \quad \| a_{\nu+1} - a_\nu \| < \delta + \varepsilon,$$

$$\beta = \lim_{\nu \to \infty} \| a_{\nu+1} - a_\nu \| \leqq \delta + \varepsilon, \quad \beta \leqq \delta.$$

Hieraus folgt aber $\delta = \beta$, da sich aus (11, 74) $\delta \leqq \beta$ ergibt. Wir schließen hier gleich eine Folgerung aus (11, 73) und (11, 74) an.

XV. *Sind in einer bewerteten Erweiterung eines algebraisch abgeschlossenen Körpers K' die Größen z und u Pseudolimes einer und der-*

selben pseudokonvergenten Folge a_ν mit der positiven Breite β in bezug auf K' bzw. in bezug auf $K'(z)$, so ist $z - u$ ein in bezug auf K' invariables Element mit der Bewertung β.

Beweis: Zunächst ergibt sich aus (11,74)

$$\|z - u\| = \lim_{\nu \to \infty} \|z - a_\nu\| = \beta.$$

Ist nun α eine Größe aus K', so gilt

(11,9) $$\|z - u - \alpha\| = \lim_{\nu \to \infty} \|z - a_\nu - \alpha\|.$$

Für

$$\|\alpha\| \geqq \|z - u\| = \beta$$

ist $\|z - u - \alpha\| \geqq \beta$ klar. Ist aber $\|\alpha\| = \beta$, so folgt aus (11,73) wegen $\|a_{\nu+1} - a_\nu\| > \beta$, daß

$$\|z - a_\nu - \alpha\| = \|a_{\nu+1} - a_\nu\|$$

ist, woraus wegen (11,9)

$$\|z - u - \alpha\| = \beta$$

folgt.

Wir geben endlich die folgende einfache Charakterisierung der Pseudolimes von eigentlichen pseudokonvergenten Folgen an.

XVI. *Es sei a_ν eine eigentlich pseudokonvergente Folge mit Elementen aus einem algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körper K'. Ein Element z einer bewerteten Erweiterung L' von K' ist dann und nur dann ein Pseudolimes der Folge a_ν in bezug auf K', wenn die Folge $z - a_\nu$ in L' eine pseudokonvergente Folge zweiter Art ist, d. h. wenn die Zahlenfolge $\|z - a_\nu\|$ von einem ν an eigentlich monoton abnimmt.*

Daß unsere Bedingung notwendig ist, folgt sofort aus der Formel (11,74) des Satzes X. Um zu zeigen, daß unsere Bedingung hinreichend ist, genügt es zu beweisen, daß, wenn $\|z - a_\nu\|$ monoton abnimmt, für jedes α aus K'

(11,91) $$\|z - \alpha\| = \lim_{\nu \to \infty} \|a_\nu - \alpha\|$$

gilt.

Ist nun für $\nu \geqq \nu_0$ $\|z - a_\nu\|$ monoton fallend, so folgt für $\nu > \nu_0$

$$\|a_{\nu+1} - a_\nu\| = \|(z - a_\nu) - (z - a_{\nu+1})\| = \|z - a_\nu\|,$$

so daß, wenn β die Breite der Folge a_ν bezeichnet,

(11,92) $$\|z - a_\nu\| \downarrow \beta$$

folgt.

Andererseits folgt aus

$$\|a_{\nu+1} - a_\nu\| = \|(\alpha - a_\nu) - (\alpha - a_{\nu+1})\|,$$

wenn β_1 den nach Voraussetzung von einem ν an festen Wert von $\|\alpha - a_\nu\|$ bezeichnet,

$$\beta < \|a_{\nu+1} - a_\nu\| \leqq \beta_1.$$

Daher gilt von einem ν an sicher

$$\|\alpha - a_\nu\| > \|z - a_\nu\|$$

und aus

$$\|z - \alpha\| = \|(z - a_\nu) - (\alpha - a_\nu)\| = \|\alpha - a_\nu\|$$

folgt sodann (11, 91).

Wie aus den obigen Sätzen folgt, bleibt eine eigentlich pseudokonvergente Folge sicher nicht mehr eigentlich pseudokonvergent, wenn einmal einer ihrer Pseudolimes zu K' adjungiert wird. Benutzt man sodann diese Folge zur Bewertung weiterer transzendenter Erweiterungen, so laufen diese Erweiterungen nur auf die Adjunktion von invariablen Elementen hinaus. Andererseits ist zu bemerken, daß sehr wohl auch Größen α von durchaus algebraischem Charakter die Eigenschaft haben können, daß für sie $\|a_\nu - \alpha\|$ monoton fällt, obgleich solche Größen α keine Pseudolimes der nicht konvergenten Folge a_ν sein können. Ein Beispiel für solches Verhalten ist leicht den Betrachtungen von Nr. 57 zu entnehmen.

72. Äquivalenz pseudokonvergenter Folgen. Ebenso wie eine pseudokonvergente Folge mehrere Pseudolimes besitzen kann, kann auch die gleiche Bewertung einer transzendenten Erweiterung $K'(z)$ von K' durch verschiedene pseudokonvergente Folgen festgelegt werden. Sind (a_ν) und (b_ν) zwei solche Folgen aus dem als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzten Körper K', so sind ihre Breiten gleich der Distanz von z vom Körper K' und daher einander gleich. Wir wollen allgemeiner zwei solche Folgen (a_ν), (b_ν) als *äquivalent* bezeichnen, wenn nicht nur für K', sondern auch für jede Erweiterung L' von K' diese Folgen die gleiche Bewertung einer einfachen transzendenten Erweiterung $L'(z)$ erzeugen. Es seien nun (a_ν), (b_ν) zwei äquivalente pseudokonvergente Folgen aus Elementen von K' und es sei β ihre gemeinsame Breite. Setzen wir $a_\nu - b_\nu = c_\nu$, so gilt

$$\|a_{\nu+1} - a_\nu\| = \|(b_{\nu+1} - b_\nu) + (c_{\nu+1} - c_\nu)\|, \tag{11, 93}$$

wo

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \|c_{\nu+1} - c_\nu\| \leqq \beta$$

sein muß. Ferner folgt aus (11, 74), angewandt auf die beiden Folgen a_ν und b_ν:

$$\|c_\nu\| = \|z - b_\nu - (z - a_\nu)\|, \quad \|c_\nu\| \leqq \beta.$$

Wissen wir umgekehrt nur von einer der Folgen a_ν, b_ν, etwa b_ν, daß sie pseudokonvergent ist und die Breite β hat, und ist, $a_\nu - b_\nu = c_\nu$ gesetzt, für $\nu \geqq \nu_0$:

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \|c_{\nu+1} - c_\nu\| < \beta, \qquad \|c_\nu\| \leqq \beta,$$

oder auch nur für $\nu \geqq \nu_0$:

$$\|c_{\nu+1} - c_\nu\| \leqq \beta, \quad \|c_\nu\| \leqq \beta,$$

oder auch nur für $\nu \geqq \nu_0$:

$$\|c_{\nu+1} - c_\nu\| < \|b_{\nu+1} - b_\nu\|, \ \|c_\nu\| \leqq \beta,$$

so folgt aus (11, 93) zuerst, daß auch die Folge (a_ν) pseudokonvergent mit der gleichen Breite ist. Darüber hinaus gilt dann für jedes α aus L', wegen $\|c_\nu\| \leqq \beta$:

$$(11,94) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \|\alpha - a_\nu\| = \lim_{\nu \to \infty} \|\alpha - b_\nu - c_\nu\| = \lim_{\nu \to \infty} \|\alpha - b_\nu\|.$$

Denn für $\lim_{\nu \to \infty} \|\alpha - b_\nu\| > \beta$ gilt von einem ν an

$$\|\alpha - b_\nu\| > \beta \geqq \|c_\nu\|.$$

Und für $\lim_{\nu \to \infty} \|\alpha - b_\nu\| = \beta$ folgt zuerst, daß auf jeden Fall

$$\lim_{\nu \to \infty} \|\alpha - a_\nu\| \leqq \beta$$

ist. Wäre aber $\lim_{\nu \to \infty} \|\alpha - a_\nu\| < \beta$, so würde daraus

$$\lim_{\nu \to \infty} \|a_{\nu+1} - a_\nu\| = \lim_{\nu \to \infty} \|(a_{\nu+1} - \alpha) - (a_\nu - \alpha)\| < \beta$$

folgen, während die Breite der Folge a_ν gleich β ist.

Aus (11,94) folgt aber sofort, daß die Folgen a_ν und b_ν die gleiche Bewertung einer einfachen transzendenten Erweiterung von L' bewirken müssen. Wir sehen:

XVII. *Ist b_ν eine pseudokonvergente Folge aus einem algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körper K' mit der positiven Breite β, und ist a_ν eine andere Folge aus K', so ist, damit (b_ν) eine mit (a_ν) äquivalente Folge sei, $a_\nu - b_\nu = c_\nu$ gesetzt, notwendig:*

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \|c_{\nu+1} - c_\nu\| \leqq \beta, \ \|c_\nu\| \leqq \beta,$$

und hinreichend

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \|c_{\nu+1} - c_\nu\| < \beta, \ \|c_\nu\| \leqq \beta, \ \nu \geqq \nu_0,$$

bzw., was weniger ist,

$$\|c_{\nu+1} - c_\nu\| \leqq \beta, \ \|c_\nu\| \leqq \beta, \ \nu \geqq \nu_0,$$

bzw., was noch weniger ist,

$$\|c_{\nu+1} - c_\nu\| < \|b_{\nu+1} - b_\nu\|, \ \|c_\nu\| \leqq \beta, \ \nu \geqq \nu_0.$$

73. Transzendente Erweiterungen eines Körpers von Potenzreihen. Es sei nun Q ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper von der Charakteristik 0. Wir betrachten die Gesamtheit aller formalen Potenzreihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{r_\nu}, \quad r_\nu \uparrow \infty,$$

wo r_ν entweder beliebige rationale Zahlen, oder beliebige reelle Zahlen sein dürfen und a_ν dem Körper Q angehören. Die Gesamtheit dieser Potenzreihen bildet einen Körper K, den wir zu K bewerten, indem allgemein x^{r_ν} die Bewertung e^{-r_ν} erhält. K' ist offenbar perfekt und nach dem Satz II, § 2 algebraisch abgeschlossen. Es sei z eine in bezug auf K' transzendente Größe, und es sei der Körper $K'(z)$ irgendwie bewertet.

Es sei nun *erstens* z von der ersten Art in bezug auf K' und seine Distanz von K' sei $\beta > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine Folge von Größen A_μ aus K' derart, daß $\| z - A_\mu \| \downarrow \beta$ mit $\mu \uparrow \infty$ ist. Hier kann offensichtlich in jeder Potenzreihe A_μ das Aggregat derjenigen Glieder fortgelassen werden, deren Bewertungen $\leqq \beta$ sind, so daß wir A_μ als „Polynome"

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{r_\nu} \tag{11,95}$$

voraussetzen können, wo r_ν monoton wachsen und a_ν zu Q gehören. Wir wollen nun allgemein einen Ausdruck (11,95) als ein *ausgezeichnetes Approximationspolynom* zu z bezeichnen, wenn

$$\omega\left(z - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{r_\nu}\right) > r_n = \omega(x^{r_n})$$

gilt. Gilt für zwei ausgezeichnete Polynome $p(x)$, $q(x)$:

$$\omega(z - q(x)) < \omega(z - p(x)),$$

so nennen wir $p(x)$ *höher* als $q(x)$. Wir behaupten nur, daß es ausgezeichnete Polynome $p(x)$ gibt, für die $\| z - p(x) \|$ sich beliebig wenig von β unterscheidet. Denn es gibt nach Voraussetzung für jedes $\varepsilon > 0$ ein Polynom

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{r_\nu}$$

derart, daß

$$\varrho = \| z - f(x) \| < \beta + \varepsilon \tag{11,96}$$

ist. Hier können wir annehmen, daß für alle r_ν aus $f(x)$ $e^{-r_\nu} \geqq \varrho$ ist, da alle größeren r_ν offenbar weggelassen werden können, ohne daß die Relation (11,96) gültig zu sein aufhört. Ist nun $e^{-r_n} > \varrho$, so ist $f(x)$

bereits ein ausgezeichnetes Polynom, das unserer Bedingung genügt. Ist aber $e^{-r_\nu} = \varrho$, so gilt

$$\| z - f(x) + a_n x^{r_n} \| \leqq \varrho < \beta + \varepsilon,$$

so daß dann $f(x) - a_n x^{r_n}$ ein ausgezeichnetes Polynom ist, das unserer Bedingung genügt.

Da ferner für kein ausgezeichnetes Polynom $f(x) \| z - f(x) \| = \beta$ sein kann, gibt es zu jedem ausgezeichneten Polynom $p(x)$ ein höheres $q(x)$. Dann gilt

$$(11,97) \quad \| q(x) - p(x) \| = \| z - p(x) - (z - q(x)) \| = \| z - p(x) \|,$$

so daß das niedrigste Glied von $q(x) - p(x)$ eine kleinere Bewertung hat als das höchste Glied von $p(x)$. Daraus folgt, daß $p(x)$ ein bestimmter Abschnitt aus jedem höheren ausgezeichneten Polynom $q(x)$ ist, mit anderen Worten, daß jedes ausgezeichnete Polynom durch die Anzahl der in ihm wirklich vorkommenden Glieder oder auch durch den Exponenten des höchsten Gliedes vollständig bestimmt ist. Ordnen wir nun alle Glieder, die in unendlich vielen ausgezeichneten Polynomen vorkommen, nach ihren Exponenten, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form

$$(11,98) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{r_\nu}, \quad r_0 < r_1 < r_2 < \ldots,$$

derart, daß jedes ausgezeichnete Polynom einen Abschnitt aus dieser — natürlich nur formal aufzufassenden — Summe darstellt. Und da es unendlich viele ausgezeichnete Polynome gibt, gibt es unendlich viele Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ derart, daß

$$f_i(x) = \sum_{\nu=0}^{n_i} a_\nu x^{r_\nu}$$

ein ausgezeichnetes Polynom ist. Dann ist ferner nach (11, 97)

$$\| z - f_i(x) \| = \left\| \sum_{\nu=n_i+1}^{n_{i+1}} a_\nu x^{r_\nu} \right\| = e^{-r_{n_i+1}},$$

so daß

$$r_\nu \uparrow \lg \frac{1}{\beta}$$

gilt. Betrachten wir nun die Summe

$$f(x) = f_i(x) + a_{n_i+1} x^{r_{n_i+1}},$$

so gilt, falls $n_{i+1} > n_i + 1$ ist, $n_{i+1} = m$ gesetzt,

$$\| z - f(x) \| = \left\| z - f_{i+1}(x) + \sum_{\nu=n_i+2}^{m} a_\nu x^{r_\nu} \right\| \leqq e^{-r_{n_i+2}},$$

da ja nach dem Obigen

$$\| z - f_{i+1}(x) \| < e^{-r_m} \leqq e^{-r_{n_i+2}}$$

gilt. Da aber damit $\|z - f(x)\|$ kleiner ist als die Bewertung $e^{-r_{n_i+1}}$ des höchsten Gliedes von $f(x)$, ist also auch $f(x)$ ein ausgezeichnetes Polynom. Daraus folgt, daß *sämtliche* Abschnitte des Ausdrucks (11, 98) ausgezeichnete Polynome sind und eine pseudokonvergente Folge bilden, deren Pseudolimes z ist.

Ist *zweitens* z von der zweiten oder dritten Art in bezug auf K', so ist für ein α aus K' $z - \alpha$ invariabel in bezug auf K' mit der Bewertung $\beta = e^{-r}$. Wir können dann aus der „Potenzreihe" für α alle Glieder weglassen, deren Exponenten $r_\nu \geqq r$ sind, da ja dadurch die Bewertung von $z - \alpha$ nicht geändert wird. Daher können wir für unser z schreiben

$$a_0 x^{r_0} + a_1 x^{r_1} + \ldots + a_n x^{r_n} + u,$$

wo $r_0 < r_1 < \ldots < r_n < r$ ist und a_ν in Q liegen. Dann ist aber

$$x^{\frac{\nu r + r_n}{\nu+1}} = x^{r - \frac{r - r_n}{\nu+1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

eine pseudokonvergente Folge mit dem Pseudolimes u, und damit

$$a_0 x^{r_0} + \ldots + a_n x^{r_n} + x^{r - \frac{r - r_n}{\nu+1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

eine pseudokonvergente Folge mit dem Pseudolimes z. Damit haben wir für unseren Körper K' sämtliche Möglichkeiten transzendenter Erweiterungen erschöpft. Wir fassen das Ergebnis in dem Satze zusammen:

XVIII. *Es sei Q ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper von der Charakteristik 0, K' sei der algebraisch abgeschlossene Körper aller Potenzreihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{r_\nu}, \quad r_\nu \uparrow \infty,$$

wo a_ν zu Q gehören und r_ν entweder beliebig rational oder beliebig reell sein können; der Körper Q sei halbbewertet, und jede Potenz x^r möge die Bewertung e^{-r} und die Ordnungszahl r haben. Ist z eine transzendente Größe in bezug auf K', so wird die Bewertung von $K'(z)$ entweder — falls z von der ersten Art ist — erzeugt, indem z als Pseudolimes der Abschnittsfolgen des Ausdrucks

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{r_\nu}, \quad r_\nu \uparrow \gamma < \infty \tag{11, 99}$$

oder, wenn z von der zweiten oder dritten Art ist, indem z als Pseudolimes der pseudokonvergenten Folge aufgefaßt wird:

$$a_0 x^{r_0} + \ldots + a_n x^{r_n} + x^{r - \frac{r - r_n}{\nu+1}}, \quad r_0 < r_1 < \ldots < r_n < r, \tag{11, 991}$$
$$\nu = 1, 2 \ldots,$$

und die obigen Darstellungen sind kanonisch, d. h. durch die Bewertung von $K'(z)$ eindeutig bestimmt.

Und offenbar kann der für K' charakteristische Modul der Exponenten r_ν noch auf verschiedene andere Arten gewählt werden. Ebenso könnte als die Bewertung von x^r auch e^{-kr} mit einer beliebigen, aber festen positiven Konstanten k festgelegt werden.

§ 12.

Absolute Riemannsche Fläche und die Restkörper.

74. Restisomorphie und K-Ringe. Wir werden im folgenden die Frage nach allen *meroedrischen Isomorphien* eines Körpers K mit einem Körper $\mathfrak{K}$ untersuchen, wobei jedem Element a von K ein eindeutig bestimmtes Element $\varphi(a)$ aus $\mathfrak{K}$ entspricht, mit Ausnahme gewisser Elemente a aus K, für die dann $\varphi(1/a) = 0$ sein soll. Dagegen soll jedem Element von $\mathfrak{K}$ wenigstens ein Element von K entsprechen, und es soll allgemein für a und b aus K $\varphi(a \pm b) = \varphi(a) \pm \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ und, wenn $\varphi(b) \neq 0$ ist, $\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$ sein; dann ist sicher $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Ist $\varphi(a) = 0$ *nur* für $a = 0$, so ist die Abbildung umkehrbar eindeutig, und wir haben es mit der gewöhnlichen Isomorphie zu tun. Hat aber die Gleichung $\varphi(a) = 0$ im Körper K mehr als eine Lösung, gibt es also in K Elemente $a \neq 0$ mit $\varphi(1/a) = 0$, denen keine Elemente von $\mathfrak{K}$ entsprechen, so wollen wir von der *Restisomorphie des Körpers K auf den Körper $\mathfrak{K}$* sprechen und $\mathfrak{K}$ als einen *Restkörper* von K bezeichnen. Ist $\mathfrak{K}$ ein Restkörper von K und ist $\mathfrak{K}_1$ ein Restkörper von $\mathfrak{K}$, so ist auch $\mathfrak{K}_1$ ein Restkörper von K. Man erhält eine restisomorphe Abbildung des Körpers K z. B. mit Hilfe eines in K definierten Primdivisors $\mathfrak{p}$, indem man für $\mathfrak{K}$ den Restklassenkörper von K in bezug auf $\mathfrak{p}$ nimmt. Natürlich ist es dabei gleichgültig, welcher der $\mathfrak{p}$ äquivalenten Primdivisoren benutzt wird. Diese Erzeugungsweise kann iteriert werden. Ist $\mathfrak{p}_1$ ein Primdivisor des Körpers $\mathfrak{K}$ und ist $\mathfrak{K}_1$ der Restklassenkörper von $\mathfrak{K}$ in bezug auf $\mathfrak{p}_1$, so besteht wiederum eine Restisomorphie von K auf den Körper $\mathfrak{K}_1$, und dieses Verfahren kann offenbar beliebig oft wiederholt werden, sofern man nicht einmal zu einem endlichen Körper gelangt.

Ist nun K restisomorph zu $\mathfrak{K}$ und ist $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der Größen aus K, die Bilder in $\mathfrak{K}$ besitzen, so ist $\mathfrak{A}$ ein Ring des Körpers K, und zwar ein Ring mit der Eigenschaft, daß *erstens* für jede Größe a aus K sicher entweder a oder $1/a$ in $\mathfrak{A}$ liegt, und *zweitens* jedes Element von K sich als Quotient von zwei Größen aus $\mathfrak{A}$ darstellen läßt. Ist umgekehrt im Körper K ein Ring $\mathfrak{A}$ mit diesen beiden Eigenschaften definiert, der nicht identisch mit dem Körper K ist, so kann dieser Ring stets auf die oben charakterisierte Weise entstanden gedacht werden. Denn bezeichnen wir die Größen aus $\mathfrak{A}$, deren Reziproke auch in $\mathfrak{A}$ liegen,

als Einheiten in $\mathfrak{A}$, die übrigen Größen aus $\mathfrak{A}$ als Nichteinheiten in $\mathfrak{A}$, und fassen wir alle Größen aus $\mathfrak{A}$, die sich paarweise von einander um Nichteinheiten aus $\mathfrak{A}$ unterscheiden, jeweils in eine Restklasse in bezug auf $\mathfrak{A}$ zusammen, so bilden diese Restklassen einen Körper, wenn man für sie die Verknüpfungsoperationen in entsprechender Weise definiert. Denn es gibt unter diesen Restklassen nur eine Nullklasse. Zu diesem Körper ist dann K restisomorph.

Die Ringe mit den oben charakterisierten Eigenschaften sind von Herrn Krull[27]) ausführlich studiert worden. Wir werden sie im folgenden als *K-Ringe* bezeichnen. Danach ist die Frage nach der Aufstellung sämtlicher Restisomorphien identisch mit der Frage nach der Aufstellung sämtlicher K-Ringe dieses Körpers. Diese Frage läßt sich nun in sehr vielen — jedenfalls in allen für die Theorie der algebraischen Funktionen in Betracht kommenden Fällen — auf die Frage nach der Aufstellung sämtlicher Primdivisoren eines gegebenen Körpers zurückführen, nämlich sicher dann, wenn man zeigen kann, daß jede Restisomorphie auf die oben charakterisierte Weise mit Hilfe einer Kette von Primdivisoren definiert werden kann. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn K von endlichem Transzendenzgrade ist. Wir betrachten aber zunächst den Fall *einfacher Restkörper.*

Um den Begriff des einfachen Restkörpers zu definieren, betrachten wir die Gesamtheit $\mathfrak{N}$ aller Nichteinheiten aus dem zugehörigen K-Ring $\mathfrak{A}$. Wir nennen zwei Elemente a, b aus $\mathfrak{N}$ vergleichbar, wenn es zwei Paare positiver ganzer Zahlen (p, q), (r, s) gibt derart, daß a^p/b^q und b^r/a^s in $\mathfrak{A}$ liegen. Sind zwei Größen aus $\mathfrak{N}$ mit einer dritten vergleichbar, so sind sie offenbar auch miteinander vergleichbar. Sind alle Elemente von $\mathfrak{N}$ miteinander vergleichbar, so nennen wir $\mathfrak{K}$ einen einfachen Restkörper von K.

75. Charakterisierung der einfachen Restkörper durch Bewertungen. Es sei nun $\mathfrak{K}$ ein einfacher Restkörper von K. Es sei $\mathfrak{A}$ der zugehörige

---

[27]) In Krull 1. Hr. Krull bringt den Begriff dieser Ringe, die er als *Bewertungsringe* bezeichnet, mit dem Begriff der „allgemeinen Bewertungen" in Zusammenhang, bei denen die Ordnungszahlen nicht mehr speziell der additiven Gruppe der reellen Zahlen angehören, sondern einer allgemeinen „geordneten" Gruppe. Doch wird bei Herrn Krull die Frage nach der konstruktiven Aufstellung aller „allgemeinen Bewertungen" eines beliebig vorgegebenen Körpers nicht behandelt. In unserer Darstellung berühren sich die Ergebnisse der Nr. 74—76 mit dem Inhalt der §§ 5—6 der Krullschen Arbeit. Doch ist bei der Weitschichtigkeit der von Herrn Krull zur Behandlung seiner sehr allgemeinen Begriffsbestimmungen ausgebildeten Terminologie der detaillierte Vergleich der betreffenden Stellen sehr umständlich und möge dem Leser überlassen werden, dem die Lektüre der gehaltreichen Abhandlung von Herrn Krull aufs angelegentlichste empfohlen sei.

K-Ring von K, $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit der Nichteinheiten von $\mathfrak{A}$, die nach Voraussetzung alle untereinander vergleichbar sind. Es sei A ein beliebig, aber für den Rest dieses Abschnitts fest gewähltes Element aus $\mathfrak{N}$. Ist dann a irgendein beliebiges Element aus K, so gibt es nach Voraussetzung Paare ganzer Zahlen (p, q) mit $q \geqq 1$, für die a^q/A^p in $\mathfrak{A}$ liegt, und ebenso Paare ganzer Zahlen (r, s) mit $s \geqq 1$, für die A^r/a^s in $\mathfrak{A}$ liegt. Denn für a aus $\mathfrak{N}$ folgt dies aus der Annahme der Vergleichbarkeit. Für eine Einheit a aus $\mathfrak{A}$ genügt es, $p = r = 0$, $q = s = 1$ zu setzen. Liegt aber a nicht in $\mathfrak{A}$, so gibt es ganze $p\,, q'$ mit $q' \geqq 1$, für die $\dfrac{A^{p'}}{(1/a)^{q'}}$ in $\mathfrak{A}$ liegt. Dann genügt es, $p = -p'$, $q = q'$ zu setzen. Andererseits kann man dann $r = 0$, $s = 1$ setzen.

Offenbar hängen die soeben charakterisierten Eigenschaften der Zahlenpaare (p, q) bzw. (r, s) nur von den Werten der Brüche p/q, r/s ab. Brüche vom Typus p/q nennen wir *Unterzahlen*, Brüche vom Typus r/s *Oberzahlen*. Wir behaupten nun, daß jede Unterzahl p/q höchstens gleich jeder Oberzahl r/s ist:

(12, 1) $\qquad p/q \leqq r/s, \qquad$ d. h. $\qquad ps - rq \leqq 0,$

so daß insbesondere nur ein einziger Bruch zugleich Unterzahl und Oberzahl sein kann. In der Tat liegen zugleich mit a^q/A^p und A^r/a^s auch $(a^q/A^p)^s$ und $(A^r/a^s)^q$ in $\mathfrak{A}$, daher auch das Produkt dieser beiden Zahlen, d. h. A^{qr-ps}. Wäre nun $qr - ps$ eine negative ganze Zahl gleich $-\pi$, so würde also in $\mathfrak{A}$ sowohl A^π als auch $1/A^\pi$ liegen, A^π wäre eine Einheit; dann wäre aber zugleich mit A auch $1/A = A^{\pi-1} \cdot A^{-\pi}$ ein Element von $\mathfrak{A}$, so daß A eine Einheit wäre, während A in $\mathfrak{N}$ liegt. Damit ist die Relation (12, 1) bewiesen.

Da andererseits für jedes Paar natürlicher Zahlen u, v entweder a^v/A^u, oder A^u/a^v, oder beide in $\mathfrak{A}$ liegen, ist jeder positive rationale Bruch entweder Unterzahl oder Oberzahl oder beides. Wir haben es daher in der Einteilung der rationalen Brüche in Unter- und Oberzahlen mit einem *Schnitt* zu tun, der durch eine gewisse positive reelle Zahl $\omega = \omega(a)$ erzeugt wird. Es seien nun a, a_1 zwei von Null verschiedene Elemente aus K. Es sei für ganze $p, q, p_1, q_1, r, s, r_1, s_1$, $(q \geqq 1,\ q_1 \geqq 1,\ s \geqq 1,\ s_1 \geqq 1)$

$$\frac{p}{q} \leqq \omega(a) \leqq \frac{r}{s}, \qquad \frac{p_1}{q_1} \leqq \omega(a_1) \leqq \frac{r_1}{s_1}.$$

Dann liegen

$$\frac{a^q}{A^p}, \quad \frac{a_1^{q_1}}{A^{p_1}}, \quad \frac{A^r}{a^s}, \quad \frac{A^{r_1}}{a_1^{s_1}}$$

in $\mathfrak{A}$, daher wegen $q \geqq 1$, $q_1 \geqq 1$, $s \geqq 1$, $s_1 \geqq 1$ auch

$$\left(\frac{a^q}{A^p}\right)^{q_1}\left(\frac{a_1^{q_1}}{A^{p_1}}\right)^{q} = \frac{(a\,a_1)^{q\,q_1}}{A^{p\,q_1 + p_1 q}}, \quad \left(\frac{A^r}{a^s}\right)^{s_1}\left(\frac{A^{r_1}}{a_1^{s_1}}\right)^{s} = \frac{A^{r\,s_1 + r_1 s}}{(a\,a_1)^{s\,s_1}}.$$

Daher ist

$$\frac{pq_1+p_1q}{qq_1} = \frac{p}{q}+\frac{p_1}{q_1} \leqq \omega(aa_1) \leqq \frac{rs_1+r_1s}{ss_1} = \frac{r}{s}+\frac{r_1}{s_1},$$

d. h.

$$\omega(a)+\omega(a_1) = \omega(aa_1).$$

Ferner gibt es nach Voraussetzung über die Vergleichbarkeit für jedes Element a aus $\mathfrak{N}$ mindestens eine Unterzahl p/q mit *positiven* p, q, so daß $\omega(a) > 0$ für a aus $\mathfrak{N}$ gilt. Andererseits ist für eine Einheit a aus $\mathfrak{A}$ $\omega(a) = 0$, da für eine Einheit $p/q = r/s = 0$ gesetzt werden kann. Insbesondere ist $\omega(1) = 0$, und für $a \neq 0$ $\omega(a) = -\omega(1/a)$. Gehört aber ein Element a von K nicht zu $\mathfrak{A}$, so liegt $1/a$ in $\mathfrak{N}$ und aus $\omega(1/a) > 0$ folgt $\omega(a) < 0$. Wir sehen also, daß a dann und nur dann eine Einheit ist, wenn $\omega(a) = 0$ ist, und dann und nur dann in $\mathfrak{N}$ liegt, wenn $\omega(a) > 0$ ist.

Wir behaupten nun, daß $\omega(a)$ eine *Ordnungsfunktion* des Körpers K ist, so daß der Restkörper $\mathfrak{R}$ ein Restklassenkörper des zugehörigen Primdivisors ist. Wir haben nur zu beweisen, daß

$$\omega(a+b) \geqq \operatorname{Min}(\omega(a), \omega(b)) \tag{12, 2}$$

ist. Ist aber hier die rechte Seite etwa gleich $\omega(a)$, und setzen wir $b/a = \alpha$, wo $\omega(\alpha) \geqq 0$ und daher α ein Element von $\mathfrak{A}$ ist, so genügt es,

$$\omega(1+\alpha) \geqq 0 \tag{12, 21}$$

zu beweisen, da hieraus (12, 2) sich ergibt, wenn man zu den beiden Seiten $\omega(a)$ addiert. (12, 21) folgt aber daraus, daß sowohl 1 als auch α und daher $1+\alpha$ in $\mathfrak{A}$ liegen. Damit haben wir bewiesen:

I. *Ist $\mathfrak{R}$ ein einfacher Restkörper von K, so kann $\mathfrak{R}$ als der Restklassenkörper eines Primdivisors von K aufgefaßt werden.*

76. Die Problemstellung für den Fall algebraischer Funktionen. Es sei R ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper. K sei ein Oberkörper von R. Wir betrachten von nun an nur solche Restisomorphien von K, bei denen der Restkörper entweder der Körper R selbst, oder ein Oberkörper von R ist, und bei denen die Elemente von R sich selbst entsprechen. Ist insbesondere der Restkörper R selbst, so bezeichnen wir jede solche Isomorphie als einen *Punkt der absoluten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_K$ von K in bezug auf R*. Die einer Größe von K vermöge einer solchen Restisomorphie zugeordnete Größe aus R kann als der *Wert* jener Größe aus K im betreffenden Punkte von $\mathfrak{R}_K$ aufgefaßt werden. Entspricht dabei einer Größe von K keine Größe aus R, ihrer reziproken also die Null, so werden wir sagen, der „Wert" dieser Größe sei ∞. Hat man ferner eine Restisomorphie von K auf einen Oberkörper $\mathfrak{R}$ von R vom Transzendenzgrade 1 in bezug auf R, so entspricht dieser Isomorphie

eine „Kurve“ auf der absoluten Riemannschen Fläche von K in bezug auf R, und die Punkte der absoluten Riemannschen Fläche, aus denen diese Kurve sich zusammensetzt, ergeben sich, wenn man alle Punkte der absoluten Riemannschen Fläche von $\mathfrak{K}$ in bezug auf R aufstellt und die zugehörigen Restisomorphien von K auf R aufsucht. Hat man allgemeiner eine Restisomorphie von K auf einen Oberkörper $\mathfrak{K}_\nu$ von R vom Transzendenzgrade ν in bezug auf R, so ist damit eine „ν-dimensionale“ Mannigfaltigkeit auf $\mathfrak{R}_K$ definiert. Sie setzt sich zusammen aus allen Punkten von $\mathfrak{R}_K$, die den Punkten der absoluten Riemannschen Fläche von $\mathfrak{K}_\nu$ in bezug auf R entsprechen.

Wir wollen insbesondere den Fall ins Auge fassen, daß K in bezug auf R einen endlichen Transzendenzgrad n hat.

II. *Ist ein Körper K eine Erweiterung von endlichem Transzendenzgrade n in bezug auf einen algebraisch abgeschlossenen Körper R, und ist ein Restkörper $\mathfrak{K}$ von K ein Oberkörper von R, wobei die Elemente von R sich selbst entsprechen, so ist $\mathfrak{K}$ von einem Transzendenzgrade $\nu < n$ in bezug auf R. Dabei kann ν auch gleich Null sein, nämlich wenn $\mathfrak{K}$ mit R identisch ist.*

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß der Transzendenzgrad von $\mathfrak{K}$ in bezug auf R positiv ist, da sonst nichts zu beweisen ist. Sind $\eta_1, \ldots, \eta_\varkappa$ in bezug auf R algebraisch unabhängige Größen von $\mathfrak{K}$, und entsprechen ihnen die Elemente $y_1, \ldots, y_\varkappa$ von K, so sind auch $y_1, \ldots, y_\varkappa$ algebraisch unabhängig in bezug auf R. Daher ist $\varkappa \leqq n$, so daß sicher $\nu \leqq n$ ist. Ist aber $\nu = n$, und entspricht einem System von n in bezug auf R algebraisch unabhängiger Größen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ von $\mathfrak{K}$ ein System von n Größen $y_1, \ldots, y_n$ von K, so genügt jede Größe x aus K, die nicht in R liegt, einer Gleichung

$$a_0(y_1, \ldots, y_n)\, x^k + a_1(y_1, \ldots, y_n)\, x^{k-1} + \ldots + a_k(y_1, \ldots, y_n) = 0,$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_k$ Polynome in $y_1, \ldots, y_n$ mit Koeffizienten aus R sind und weder $a_0(y_1, \ldots, y_n)$ noch $a_k(y_1, \ldots, y_n)$ identisch verschwinden. Dann entspricht x im Körper $\mathfrak{K}$ einer Größe ξ, da sonst $1/x$ Null entsprechen und $a_0(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ verschwinden müßte, was der Unabhängigkeit der $\eta_1, \ldots, \eta_n$ widerspricht. Dabei ist aber ξ sicher $\neq 0$, da sonst $a_k(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ verschwinden müßte. Da aber dann nur die Null von K auf die Null von $\mathfrak{K}$ abgebildet wird, hätten wir eine gewöhnliche Isomorphie, entgegen der Voraussetzung. Damit ist II bewiesen.

77. Reduktion auf Ketten einfacher Restkörper. Wir betrachten nun unter den Voraussetzungen des Satzes II den K-Ring $\mathfrak{A}$ aller Größen aus K, denen Elemente von $\mathfrak{K}$ entsprechen, und insbesondere das System $\mathfrak{N}$ der Nichteinheiten aus $\mathfrak{A}$, denen in $\mathfrak{K}$ die Null entspricht. Sind nicht

alle Größen aus $\mathfrak{N}$ miteinander vergleichbar, so definiert jede Größe aus $\mathfrak{N}$ eine *Vergleichbarkeitsklasse* von mit ihr vergleichbaren Größen. Sind a und b zwei Elemente aus $\mathfrak{N}$, die miteinander nicht vergleichbar sind, und sind $\mathfrak{k}_a, \mathfrak{k}_b$ die zugehörigen Klassen, so ist dann entweder für jedes noch so große p a/b^p, oder für noch so große p b/a^p in $\mathfrak{A}$ enthalten und offenbar können dabei a, b durch beliebige Größen aus $\mathfrak{k}_a$ bzw. $\mathfrak{k}_b$ ersetzt werden. Im ersten Falle ist $\mathfrak{k}_a$ *höher* als $\mathfrak{k}_b$, im zweiten Falle $\mathfrak{k}_b$ höher als $\mathfrak{k}_a$. Dieser Begriff des Höherseins ist offenbar transitiv.

Es mögen nun in $\mathfrak{N}$ wenigstens zwei verschiedene solche Klassen enthalten sein, und es sei $\mathfrak{k}$ irgendeine solche Vergleichbarkeitsklasse aus $\mathfrak{N}$, die nicht niedriger ist als alle übrigen. Wir nennen zwei Elemente aus $\mathfrak{A}$ *kongruent* in bezug auf $\mathfrak{k}$, wenn ihre Differenz zu $\mathfrak{k}$ oder zu einer höheren Klasse gehört. Fassen wir alle Elemente von $\mathfrak{A}$, die mod $\mathfrak{k}$ einander kongruent sind, jeweils in eine Restklasse mod $\mathfrak{k}$ zusammen, und definieren wir in üblicher Weise die vier Rechenoperationen zwischen diesen Restklassen, so stellt dann die Gesamtheit dieser Restklassen $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$ *einen Körper* in bezug auf diese Rechenoperationen dar, da sie nur ein Nullelement besitzt. $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$ ist dann offenbar ein Restkörper von K. Andererseits entspricht jedem Element von R in $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$ offenbar ein einziges Element, so daß $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$ einen mit R isomorphen Unterkörper enthält. Identifizieren wir diesen Unterkörper mit R, so erhalten wir in der Abbildung von K auf $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$ eine Restisomorphie, bei der R elementenweise in sich übergeht. Wird andererseits jedem Element $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$ dasjenige Element von $\mathfrak{R}$ zugeordnet, das den Elementen von K aus der entsprechenden Restklasse entspricht, so erhält man in $\mathfrak{R}$ einen Restkörper von $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$, da nach Voraussetzung über K sicher mehrere Elemente von $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$ der Null in $\mathfrak{R}$ entsprechen.

Zugleich muß nach dem Satze II der Transzendenzgrad von $\mathfrak{R}_\mathfrak{k}$ in bezug auf R kleiner als n und größer als der Transzendenzgrad von $\mathfrak{R}$ in bezug auf R sein. Schieben wir nun auf diese Weise zwischen K und $\mathfrak{R}$ weitere Restkörper ein, so läßt sich dieses Verfahren höchstens endlich oft wiederholen, da der Transzendenzgrad beim Übergang zu jedem weiteren Restkörper wenigstens um eine Einheit abnehmen muß. Wir können daher annehmen, daß es zwischen $K = \mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}$ etwa $m-1$ Restkörper $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{m-1}$ gibt, derart, daß $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_m$ gesetzt, $\mathfrak{R}_\mu$ ein einfacher Restkörper von $\mathfrak{R}_{\mu-1}$, $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ ist. Zugleich ist offenbar $m < n$. Wir sehen:

III. *Unter den Voraussetzungen des Satzes II gibt es endlich viele Körper* $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{m-1}$ *derart, daß* $K = \mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_m$ *gesetzt, für* $\mu = 1, 2, \ldots, m$ $\mathfrak{R}_\mu$ *ein einfacher Restkörper von* $\mathfrak{R}_{\mu-1}$ *ist.*

78. Primdivisoren vom Range 1 und zugehörige Puiseuxsche Darstellungen. Es seien K und sein einfacher Restkörper $\mathfrak{R}$ Oberkörper

eines algebraisch abgeschlossenen Körpers R. $\mathfrak{p}$ sei ein zugehöriger Primdivisor von K, als dessen Restkörper $\mathfrak{K}$ aufgefaßt werden kann, und es sei der Transzendenzgrad von K in bezug auf auf R endlich und gleich n. Ist dann der Transzendenzgrad von $\mathfrak{K}$ in bezug auf R gleich ν, so bezeichnen wir die nach Satz II sicher positive Differenz $n - \nu$ als *den Rang der Restisomorphie von* K auf $\mathfrak{K}$ bzw. *den Rang von* $\mathfrak{p}$.

Es sei nun der Rang von $\mathfrak{p}$ gleich 1. Es sei x ein Element von K von positiver Ordnung in bezug auf $\mathfrak{p}$. $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ sei ein System von $n-1$ in bezug auf R algebraisch unabhängigen Größen von $\mathfrak{K}$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ irgendwie gewählte Größen aus K, die $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ entsprechen. Dann ist ein nicht identisch verschwindendes Polynom $f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ in $x_1, \ldots, x_{n-1}$ mit Koeffizienten aus R sicher in K nicht Null, da nicht einmal die ihm in $\mathfrak{K}$ entsprechende Größe $f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ dort Null ist. Daher kann x von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ nicht algebraisch abhängen — sonst müßte x einer Gleichung genügen

$$f_0(x_1, \ldots, x_{n-1})\, x^k + \ldots + f_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0,$$

wo f_0 bis f_k Polynome in $x_1, \ldots, x_{n-1}$ mit Koeffizienten aus R sind, und weder f_0 noch f_k verschwinden identisch. Und da x in $\mathfrak{K}$ Null entspricht, müßte $f_k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ Null sein, was der algebraischen Unabhängigkeit von $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ widerspricht. $x_1, \ldots, x_{n-1}$ bilden zusammen mit x ein System von n in bezug auf R algebraisch unabhängigen Größen aus K.

Es sei L der Körper aller in bezug auf $R(x_1, \ldots, x_{n-1})$ algebraischen Größen aus K. K hat in bezug auf L den Transzendenzgrad 1 und ist algebraisch in bezug auf $L(x)$. Der Körper L ist aber in bezug auf die durch $\mathfrak{p}$ erzeugte Bewertung von K halbbewertet. Normieren wir $\mathfrak{p}$ so, daß x die Ordnungszahl 1 bekommt, so ist damit die zugehörige Bewertung von $L(x)$ eindeutig bestimmt, nach der bereits in § 10, Nr. 59 angegebenen Vorschrift. Ist aber a eine in bezug auf $L(x)$ algebraische Größe aus K, so ist der Charakter ihrer Bewertung durch die Sätze des § 4 festgelegt.

Man kann nun eine Charakterisierung der Bewertung von K auf dem folgenden Wege erhalten, falls, wie wir von nun an voraussetzen wollen, die Charakteristik von K gleich Null ist. Es sei L_1 die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung von L. Wir adjungieren zu $L_1(x)$ alle Potenzen x^r von x mit rationalen r und bilden den zugehörigen derivierten Körper Δ', der sich als die Gesamtheit von Potenzreihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{r_\nu}, \quad r_\nu \uparrow \infty \tag{12,3}$$

auffassen läßt, wo r_ν nur rationaler Werte fähig und a_ν beliebige Größen aus L_1 sind. Die Ordnungszahl von (12, 3) ist dabei r_0, falls $a_0 \neq 0$ ist. Aus dem Satz II, § 2 folgt, daß Δ' algebraisch abgeschlossen ist. Daher ist der vermöge p bewertete Körper K' mit einem Unterkörper von Δ' analytisch isomorph, und jedem Element a von K entspricht bei unserer Bewertung eine Potenzreihe (12, 3). Wir können dies dahin formulieren, daß „in der Nähe" der $\mathfrak{R}$ entsprechenden Mannigfaltigkeit auf der absoluten Riemannschen Fläche von K in bezug auf R a in eine Reihe (12, 3) „entwickelbar" ist.

Ist insbesondere $n = 1$, $\mathfrak{R} = R$, so daß p ein Punkt der absoluten Riemannschen Fläche entspricht und $L_1 = R$ ist, so sehen wir, daß im Falle des Ranges 1 die Punkte der absoluten Riemannschen Fläche durch die isomorphe Zuordnung der Potenzreihen von der Form (12, 3) mit Koeffizienten a_ν aus R festgelegt werden. Dabei ist der „Wert" von (12, 3), $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt, gleich 0 für $r_0 > 0$, gleich a_0 für $r_0 = 0$, und gleich ∞ für $r_0 < 0$. Man kann dann die Entwicklungen (12, 3) als „Parameterdarstellungen" der Größen von K auffassen, wobei der „Parameter" x selbst eine Größe von K ist.

79. Puiseuxsche Punkte und Puiseuxsche Darstellungen für den Fall von n Variablen. Es sei nun der Transzendenzgrad von K in bezug auf R gleich n. Wir betrachten eine Restisomorphie von K auf R, die durch eine Folge von einfachen Restisomorphien vom Range 1 erzeugt wird. Den zugehörigen Punkt der absoluten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ von K in bezug auf R nennen wir dann einen *Puiseuxschen Punkt*. Man kann Puiseuxsche Punkte folgendermaßen erzeugen. Wir betrachten formale Potenzreihen von der Form

$$(12,31) \qquad \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} t_1^{r_{\nu_1}} t_2^{r_{\nu_1, \nu_2}} \ldots t_n^{r_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}},$$

wo die Indizes $\nu_1, \ldots, \nu_n$ alle ganzen Werte von 0 bis Unendlich durchlaufen und die Koeffizienten a Größen aus R sind. Was die Exponenten r anbetrifft, so sind sie rationale ins Unendliche wachsende Zahlen, und zwar gilt dies für r_{ν_1} mit ins Unendliche wachsendem ν_1, für r_{ν_1, ν_2} für feste ν_1 und ins Unendliche wachsende ν_2 usw., für $r_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ für feste $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ und ins Unendliche wachsende ν_n. Man kann offenbar die Reihe (12, 31) nach Potenzen von t_1 ordnen, wobei die Koeffizienten analoge Potenzreihen in $t_2, \ldots, t_n$ sind. Hieraus folgt sofort — durch vollständige Induktion, mit $n = 1$ beginnend —, daß die Gesamtheit aller Potenzreihen (12, 31) einen Körper Δ bildet. Aus dem Satze II, § 2 folgt aber, daß

dieser Körper algebraisch abgeschlossen ist. Dies ist zunächst für $n = 1$ eine unmittelbare Folgerung aus II, § 2. Nimmt man aber sodann unsere Behauptung für $n - 1$ als bewiesen an, so sind die Potenzreihen (12, 31) als Potenzreihen in t_1 mit Koeffizienten aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper von der Charakteristik 0 darstellbar, so daß auf sie wiederum der obige Satz anwendbar ist.

Man erhält nun einen Punkt der absoluten Riemannschen Fläche von Δ in bezug auf R, indem man, um (12, 31) einen „Wert" zuzuordnen, zuerst $t_1 = 0$ setzt, also für $r_0 = 0$

$$\sum a_{0, r_2, \ldots, r_n} t_2^{r_0, r_2} \ldots t_n^{r_0, r_2, \ldots, r_n}$$

erhält, für $r_0 > 0$ den Wert 0, für $r_0 < 0$ den Wert ∞. Sodann setzt man $t_2 = 0$ und so fort. Damit ist zugleich jedem Zwischenkörper zwischen Δ und R ein Punkt der absoluten Riemannschen Fläche zugeordnet. Ist ferner ein Oberkörper K von R einem solchen Zwischenkörper zwischen Δ und R derart isomorph, daß die Elemente von R in sich übergehen, so erhalten wir offenbar mit unserer Zuordnung zugleich einen Punkt der absoluten Riemannschen Fläche von K in bezug auf R. Gibt es bei dieser Isomorphie im Körper K Größen, die $t_1, \ldots, t_n$ entsprechen, so können wir $t_1, \ldots, t_n$ als Größen von K selbst auffassen. Dann ist der Transzendenzgrad von K in bezug auf R wenigstens gleich n. Ist er nun genau gleich n, und sind $t_1, \ldots, t_n$ Größen aus K, so werden wir sagen, daß durch unsere Zuordnung der Reihen (12, 31) *eine Puiseuxsche Darstellung des betreffenden Punktes der absoluten Riemannschen Fläche K in bezug auf R* geliefert wird. Von der Reihe (12, 31), die dabei einem Element von K zugeordnet ist, werden wir sagen, daß sie eine Puiseuxsche Darstellung dieses Elements im betreffenden Punkte der Riemannschen Fläche liefert.

Es ist nun leicht einzusehen, daß ein Punkt der absoluten Riemannschen Fläche von K in bezug auf R, der eine Puiseuxsche Darstellung zuläßt, ein Puiseuxscher Punkt ist. In der Tat wird für $t_1 = 0$, vermöge unserer Darstellung, dem Körper K ein Restkörper $\mathfrak{R}$ von Potenzreihen in $t_2, \ldots, t_n$ zugeordnet, der die Größen $t_2, \ldots, t_n$ selbst enthält, und daher mindestens den Transzendenzgrad $n - 1$ in bezug auf R hat. Da aber t_1 in bezug auf $\mathfrak{R}$ transzendent ist, kann $\mathfrak{R}$ kein algebraischer Unterkörper von K sein, und hat daher genau den Transzendenzgrad $n - 1$ in bezug auf R, so daß er ein einfacher Restkörper vom Range 1 von K ist. Wenden wir die gleiche Überlegung auf $\mathfrak{R}$ an u. s. f., so ergibt sich unsere Behauptung. Nun gilt aber auch die Umkehrung, so daß wir den folgenden Satz formulieren können:

IV. *Ist K eine Erweiterung vom Transzendenzgrade n eines algebraisch abgeschlossenen Körpers R von der Charakteristik* 0, *so ist ein Punkt der absoluten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ von K in bezug auf R dann und nur dann ein Puiseuxscher Punkt, wenn er eine Puiseuxsche Darstellung besitzt.*

Beweis: Wir haben nur die Notwendigkeit unserer Bedingung zu beweisen. Für $n = 1$ ist sie bereits in Nr. 78 bewiesen. Wir nehmen nun unseren Satz für $n - 1$ als bewiesen an.

Es sei $\mathfrak{K}$ der einfache Restkörper von K, der unserem Punkt von $\mathfrak{R}$ entspricht und den Transzendenzgrad $n-1$ in bezug auf R hat. $\mathfrak{p}$ sei ein Primdivisor von K, der der einfachen Restisomorphie auf $\mathfrak{K}$ entspricht, und x_1 ein Element von K von positiver Ordnungszahl in bezug auf $\mathfrak{p}$. Dann läßt sich jede Größe von $\mathfrak{K}$ in der Form darstellen:

$$\sum \alpha_{r_2,\ldots,r_n}\, \xi_2^{r_{r_2}} \xi_3^{r_{r_2},r_2} \ldots \xi_n^{r_{r_2},r_3,\ldots,r_n}, \tag{12,32}$$

wo $\xi_2, \ldots, \xi_n$ in $\mathfrak{K}$ liegen. Es seien $x_2, \ldots, x_n$ irgendwie gewählte Größen aus K, die $\xi_2, \ldots, \xi_n$ entsprechen, und es sei L der Körper aller in bezug auf R $(x_2, \ldots, x_n)$ algebraischen Größen aus K, L_1 die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung von L. Sie ist isomorph mit der kleinsten algebraisch abgeschlossenen Erweiterung $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}$, die nach dem Obigen aus Reihen von der Form (12, 32) besteht. Nun läßt sich nach Nr. 78 die $\mathfrak{p}$ entsprechende Bewertung von K charakterisieren, indem jedem Element von K eine formale Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x_1^{r_\nu}, \quad r_\nu \uparrow \infty \tag{12,33}$$

zugeordnet wird, wo r_ν rationale Zahlen und a_ν Größen aus L_1 sind. Damit ergibt sich als ein Restkörper von K vermöge $\mathfrak{p}$ der Körper der Anfangsglieder der zur Entwicklung der Größen aus K benutzten Reihen (12, 33) für $r_0 = 0$, und dieser Körper ist daher ein mit $\mathfrak{K}$ isomorpher Unterkörper L^* von L_1, wo bei dieser Isomorphie den $x_2, \ldots, x_n$ die Größen $\xi_2, \ldots, \xi_n$ entsprechen, da auch $x_2, \ldots, x_n$ unter den Größen von K vorkommen. Wir können daher, da es uns ja nur auf die Zuordnung der in L_1 liegenden Werte zu den Größen aus $\mathfrak{K}$ ankommt, für die Koeffizienten a_ν in (12, 33) die (12, 32) entsprechenden Entwicklungen der Größen aus $\mathfrak{K}_1$ ansetzen, wobei $\xi_2, \ldots, \xi_n$ durch $x_2, \ldots, x_n$ ersetzt werden können. Damit ist IV bewiesen.

Die in IV gegebene Charakterisierung der Puiseuxschen Punkte von $\mathfrak{R}_K$ läßt sich etwas erweitern. Ist nämlich L eine *algebraische* Erweiterung von K, so entspricht jedem Puiseuxschen Punkt von $\mathfrak{R}_L$ ein solcher

von $\mathfrak{R}_K$. Daher darf man in den Darstellungen (12, 31) für $x_1, \ldots, x_n$ auch Parameter zulassen, die *algebraisch* in bezug auf K sind. Dann sind aber die entsprechenden Ausdrücke für $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch in bezug auf $R(t_1, \ldots, t_n)$. Daher kann IV so erweitert werden:

V. *Ist K eine Erweiterung vom Transzendenzgrad n eines algebraisch abgeschlossenen Körpers R von der Charakteristik* 0, *so ist ein Punkt von $\mathfrak{R}_K$ dann und nur dann ein Puiseuxscher Punkt, wenn in ihm jedes Element von K eine Darstellung durch einen Ausdruck* (12, 31) *besitzt, der algebraisch in bezug auf $R(t_1, \ldots, t_n)$ ist, und wenn einem System von n in bezug auf R unabhängigen Größen $x_1, \ldots, x_n$ von K n in bezug auf R algebraisch unabhängige Ausdrücke* (12, 31) *entsprechen.*

Ordnet man andererseits n in bezug auf R unabhängigen Größen von K n in bezug auf $R(t)$ algebraisch unabhängige Potenzreihen $P_1(t), \ldots, P_n(t)$ zu, so liefert diese Zuordnung eine Abbildung von K auf R, vermöge der R als ein einfacher Restkörper vom Range n erscheint. Danach kann im Satze V die den Darstellungen (12, 31) auferlegte Bedingung der Algebraizität nicht ohne weiteres weggelassen werden.

80. Absolute Riemannsche Fläche des Körpers der rationalen Funktionen in zwei Variablen. Ist im allgemeinen Falle eine Restisomorphie von K auf R durch eine Folge von einfachen Restisomorphien erzeugt, deren Ränge nicht mehr alle gleich 1 sind, so gilt die obige einfache Darstellung nicht mehr. Indessen liefern auch in diesem Falle die Entwicklungen des vorigen Paragraphen eine vollständige Charakterisierung der Primdivisoren und damit auch eine Darstellung der absoluten Riemannschen Fläche eines beliebigen Körpers K von endlichem Transzendenzgrade n in bezug auf R. Im Falle des unendlichen Transzendenzgrades ist dagegen die Zurückführung auf Primdivisoren nicht mehr immer möglich, und in diesem Falle müssen unsere Betrachtungen zum Teil wesentlich modifiziert werden, wenn man zu einer analogen „Darstellung" der Punkte der absoluten Riemannschen Fläche gelangen will.

Wir wollen zum Schluß im folgenden die absolute Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ des Körpers K aller rationalen Funktionen in zwei Variablen x und y mit gewöhnlichen komplexen Zahlenkoeffizienten in bezug auf den Koeffizientenkörper R diskutieren. Handelt es sich um einen Puiseuxschen Punkt, so gelten in ihm für x und y die Darstellungen

$$x = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_{\nu,\mu} u^{r_\nu} v^{s_{\nu,\mu}}, \tag{12,4}$$

$$y = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} b_{\nu,\mu} u^{r'_\nu} v^{s'_{\nu,\mu}}, \tag{12,5}$$

wo $a_{\nu,\mu}$, $b_{\nu,\mu}$ beliebige Zahlen und r_ν, r'_ν, sowie für jedes feste ν, $s_{\nu,\mu}, s'_{\nu,\mu}$ mit $\nu \uparrow \infty$ bzw. $\mu \uparrow \infty$ rationale ins Unendliche wachsende Zahlen sind. Die rechten Seiten von (12, 4) und (12, 5) sind algebraisch in bezug auf $R(u, v)$ und zwischen ihnen besteht keine algebraische Relation mit gewöhnlichen Zahlenkoeffizienten. Durch die Darstellungen (12, 4), (12, 5) ist nun zugleich offenbar jede rationale Funktion von x und y mit Hilfe der „Parameter" u, v dargestellt, wodurch auch ihr „Wert" im betreffenden Punkte der absoluten Riemannschen Fläche festgelegt ist. Andererseits können die Darstellungen (12, 4), (12, 5) für x und y beliebig vorgegeben werden, sobald sie den obigen Bedingungen genügen, so daß wir in den obigen Formeln eine — wenn auch nicht kanonische — Charakterisierung des allgemeinsten Puiseuxschen Punktes von $\mathfrak{R}$ haben.

Ist aber der betreffende Punkt von $\mathfrak{R}$ kein Puiseuxscher, so daß es sich um die Aufstellung aller Primdivisoren vom Range 2 im Körper K mit R als Kern handelt, so dürfen wir annehmen, daß im darzustellenden Punkte x und y verschwinden, da man sonst nur lineare Funktionen von x und y einzuführen braucht.

Wir wollen dann unseren Primdivisor p so normieren, daß x die Bewertung $1/e$, also die Ordnungszahl 1 hat. Dann ist die zugehörige Bewertung des Körpers $R(x)$ dadurch eindeutig festgelegt. Sie läßt sich dadurch charakterisieren, daß jedem von 0 verschiedenen Element von $R(x)$ eine formale Potenzreihe von der Form

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu x^\nu \tag{12, 6}$$

isomorph zugeordnet ist, wo für $a_n \neq 0$ e^{-n} die Bewertung des betreffenden Elements ist. Dann läßt sich der zugehörige derivierte Körper von $R(x)$ auffassen als die Gesamtheit aller Potenzreihen von der Form (12, 6).

Nun ist y transzendent in bezug auf $R(x)$ und läßt sich daher auffassen als Pseudolimes einer pseudokonvergenten Folge von Elementen der kleinsten algebraisch abgeschlossenen Erweiterung von $R(x)$. Die Elemente b_μ der betreffenden pseudokonvergenten Folge lassen sich nun, wenn y *erstens* zum derivierten Körper von $R(x)$ gehört oder von der ersten Art in bezug auf $R(x)$ ist, stets als Abschnitte eines Ausdrucks von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{r_\nu}, \qquad r_0 < r_1 < r_2 < \ldots, \tag{12, 7}$$

wo a_ν zu R gehören und r_ν rational sind. Dabei sind a_ν und r_ν durch die Bewertung von $R(x, y)$ eindeutig festgelegt. Umgekehrt erhält

man für jeden Ausdruck (12, 7) stets eine pseudokonvergente Folge der Abschnitte

$$b_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} a_\nu x^{r_\nu},$$

und dann ist y im derivierten Körper von $R(x)$ gelegen oder von der ersten Art in bezug auf $R(x)$, je nachdem ob $\lim r_\nu$ gleich $+\infty$ oder endlich ist.

Ist dagegen *zweitens* y von der zweiten oder dritten Art in bezug auf $R(x)$, so läßt sich die zugehörige pseudokonvergente Folge in der Form (11, 991) wählen und ist dann eindeutig bestimmt. Dabei ist y von der zweiten oder dritten Art in bezug auf $R(x)$, je nachdem ob r rational oder irrational ist. Und umgekehrt führt jede Folge von der Form (11, 991) auf ein y von der zweiten oder dritten Art in bezug auf $R(x)$.

(Eingegangen am 2. August 1932.)

Untersuchungen über das logische Schließen*). II.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

IV. Abschnitt.

Einige Anwendungen des Hauptsatzes.

§ 1.

Anwendungen des Hauptsatzes in der Aussagenlogik.

1.1. Eine triviale Folgerung aus dem Hauptsatz ist die allerdings schon bekannte (siehe z. B.: H.-A., Seite 65) Widerspruchsfreiheit der klassischen (und intuitionistischen) Prädikatenlogik: Die Sequenz $\rightarrow$ (welche aus jeder Widerspruchssequenz $\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ herleitbar ist, vgl. 3.21) kann Untersequenz keiner anderen Schlußfigur als eines Schnittes sein, ist also überhaupt nicht herleitbar.

1.2. Lösung des Entscheidungsproblems für die intuitionistische Aussagenlogik.

Auf Grund des Hauptsatzes können wir ein einfaches Verfahren angeben, um von einer Formel der Aussagenlogik, d. h. einer Formel ohne Gegenstandsvariable, zu entscheiden, ob sie klassisch bzw. intuitionistisch richtig ist oder nicht. (Für die klassische Aussagenlogik ist allerdings schon längst eine einfache Lösung bekannt, siehe z. B.: H.-A., Seite 11.)

Dazu beweisen wir noch folgenden Hilfssatz:

Eine Sequenz, in deren Antezedens nicht ein und dieselbe Formel mehr als dreimal als S-Formel vorkommt, und in deren Sukzedens ebenfalls nicht ein und dieselbe Formel mehr als dreimal als S-Formel vorkommt, nennen wir „reduziert". Nun gilt der Hilfssatz:

1.21. Jede LJ- bzw. LK-Herleitung, deren Endsequenz reduziert ist, läßt sich in eine LJ- bzw. LK-Herleitung mit gleicher Endsequenz umwandeln, in der sämtliche Sequenzen reduziert sind (und die keine Schnitte enthält, wenn die vorige keine enthielt).

Beweis dieses Hilfssatzes: Wir bezeichnen eine Sequenz, welche aus einer anderen dadurch entsteht, daß man im Antezedens, sowie unabhängig davon im Sukzedens, solche Formeln, die mehr als einmal als S-Formeln darin vorkommen, an beliebigen Stellen (bzw. gar nicht) wegläßt, so daß sie jeweils nur noch einmal oder zweimal oder dreimal vorkommen, als eine „reduzierte jener anderen Sequenz".

---

*) Diese Arbeit, einschließlich des I. Teils aus Bd. 39, Heft 2, ist von der Math.-Nat. Fakultät der Universität Göttingen als Inaugural-Dissertation angenommen worden.

Offenbar kann man aus einer reduzierten einer Sequenz jede andere reduzierte derselben Sequenz mittels Verdünnungen, Zusammenziehungen und Vertauschungen herleiten, und zwar so, daß dabei nur reduzierte Sequenzen vorkommen.

Nach dieser Vorbemerkung führen wir die Umwandlung der vorliegenden LJ- bzw. LK-Herleitung in folgender Weise durch:

Alle Grundsequenzen sowie die Endsequenz bleiben erhalten, diese sind ja bereits sämtlich reduzierte Sequenzen.

Die zu einer Schlußfigur gehörigen H-Sequenzen werden in reduzierte derselben umgewandelt, in gleich anzugebender Weise. Auf Grund der Vorbemerkung macht es nichts aus, wenn eine Sequenz, die zwei verschiedenen H-Schlußfiguren angehört, beidemal durch eine andere reduzierte ersetzt wird, denn man leitet dann einfach die eine aus der anderen durch Verdünnungen, Zusammenziehungen und Vertauschungen her, so daß schließlich wieder eine lückenlose Herleitung entsteht. (Für eine Sequenz, die zugleich einer Schlußfigur angehört sowie Grundsequenz oder Endsequenz ist, gilt das gleiche, da sie natürlich eine reduzierte von sich selbst ist.)

Die Umwandlungen der Schlußfiguren geschehen nun in folgender Weise:

Kommt innerhalb Γ eine Formel mehr als einmal vor, so wird sie innerhalb Γ, in Obersequenzen und Untersequenz, sovielmal (an entsprechenden Stellen) weggelassen, bis sie in Γ nur noch einmal vorkommt. Ebenso verfährt man mit Δ, Θ und Λ (d. h. mit den im Schema der Schlußfigur, III, 1.21 und 1.22, so bezeichneten Formelreihen).

Nach den beschriebenen Umwandlungen besteht nun die Herleitung bereits nur noch aus reduzierten Sequenzen. (Eine Vertauschung mit $\mathfrak{D}$ gleich $\mathfrak{E}$ kann eine Ausnahme bilden, doch diese wäre eine identische Schlußfigur und konnte überhaupt vermieden werden.)

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Nach dem Hauptsatz zusammen mit dem Zusatz III, 2.513 und diesem Hilfssatz (1.21) gilt nun:

1.22. Für jede intuitionistisch bzw. klassisch richtige reduzierte Sequenz gibt es eine LJ- bzw. LK-Herleitung ohne Schnitte, die nur aus reduzierten Sequenzen besteht, und deren H-S-Formeln Teilformeln der S-Formeln jener Sequenz sind.

1.23. Jetzt liege irgendeine Sequenz ohne Gegenstandsvariable vor. Wir wollen entscheiden, ob sie intuitionistisch bzw. klassisch richtig ist oder nicht. Zunächst können wir statt ihrer eine äquivalente reduzierte Sequenz $\mathfrak{Sq}$ nehmen.

Nun ist die Anzahl aller reduzierten Sequenzen, deren S-Formeln Teilformeln der S-Formeln von $\mathfrak{Sq}$ sind, offenbar endlich. Also ist das Entscheidungsverfahren ohne weiteres auf folgende Weise durchführbar:

Wir nehmen das genannte endliche System von Sequenzen vor und untersuchen zunächst, welche von diesen etwa Grundsequenzen sind. Alsdann wird jede von den noch übrigen daraufhin geprüft, ob es eine Schlußfigur gibt, bei der sie Untersequenz und eine oder zwei von den bereits als herleitbar erkannten Sequenzen Obersequenzen sind. Ist dies der Fall, so wird sie zu den herleitbaren hinzugefügt. (Alles dies ist offenkundig entscheidbar.) So fahren wir fort, bis entweder die Sequenz $\mathfrak{Sq}$ selbst als herleitbar erkannt ist, oder aber das Verfahren zu keinen neuen herleitbaren Sequenzen mehr führt. Alsdann kann die Sequenz $\mathfrak{Sq}$ gemäß 1.22 überhaupt nicht in dem betreffenden Kalkül (LJ bzw. LK) herleitbar sein. Damit ist die Entscheidung über ihre Richtigkeit gelungen.

1.3. Ein neuer Beweis für die Nicht-Herleitbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der intuitionistischen Logik.

Das Entscheidungsverfahren ließe sich für praktische Anwendungen noch erheblich bequemer gestalten, die eben durchgeführte Betrachtung (1.2) soll eben nur die prinzipielle Möglichkeit zeigen.

Als Beispiel beweisen wir die Nicht-Herleitbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der intuitionistischen Logik auf eine von dem angegebenen Entscheidungsverfahren (welches ebenfalls einen Beweis hierfür ergeben müßte) unabhängige Weise.

(Diese wurde schon von Heyting[5]) auf ganz anderem Wege bewiesen.)

Die betreffende Sequenz lautet $\rightarrow A \vee \neg A$. Wir nehmen an, es gäbe eine LJ-Herleitung für diese. Dann gibt es nach dem Hauptsatz eine solche ohne Schnitte. Deren unterste Schlußfigur muß nun eine OES sein. Denn bei allen übrigen LJ-Schlußfiguren ist entweder das Antezedens der Untersequenz nicht leer, oder im Sukzedens steht eine Formel mit einem anderen äußersten Zeichen als $\vee$; allenfalls käme noch eine Verdünnung im Sukzedens in Frage, doch dann würde die Obersequenz lauten: $\rightarrow$, und diese ist nach 1.1 nicht herleitbar.

Also müßte entweder $\rightarrow A$ oder $\rightarrow \neg A$ bereits (ohne Schnitte) herleitbar sein.

(Durch dieselbe Betrachtung folgt übrigens allgemein: Ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ eine intuitionistisch richtige Formel, so ist entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ eine intuitionistisch richtige Formel. In der klassischen Logik gilt das nicht, wie schon das Beispiel $A \vee \neg A$ zeigt.)

---

[5]) In der in Anm. [2]) zitierten Arbeit, S. 56.

Nun kann $\rightarrow A$ überhaupt nicht Untersequenz irgendeiner LJ-Schlußfigur (die kein Schnitt ist) sein, höchstens wiederum einer Verdünnung mit $\rightarrow$ als Obersequenz. Da $\rightarrow A$ ferner keine Grundsequenz ist, ist es also nicht herleitbar.

$\rightarrow \neg A$ kann auf Grund der gleichen Betrachtung nur aus $A \rightarrow$ durch NES hergeleitet sein, und $A \rightarrow$ wiederum, da A kein äußerstes Zeichen besitzt, nur aus $A, A \rightarrow$. So fortfahrend gelangt man immer nur zu Sequenzen der Gestalt $A, \ldots A \rightarrow$, aber niemals zu einer Grundsequenz.

Also ist $A \vee \neg A$ in der intuitionistischen Prädikatenlogik nicht herleitbar.

§ 2.

Eine Verschärfung des Hauptsatzes für die klassische Prädikatenlogik.

2.1. Es handelt sich um die folgende

Verschärfung des Hauptsatzes:

Es liege eine LK-Herleitung vor, deren Endsequenz von folgender Art ist:

Jede S-Formel dieser Sequenz enthält All- und Es-gibt-Zeichen höchstens am Anfang, und über die ganze übrige Formel erstreckt.

Dann läßt sich diese Herleitung in eine LK-Herleitung mit der gleichen Endsequenz umwandeln, welche folgende Eigenschaften hat:

1) Sie enthält keine Schnitte.

2) Es gibt darin eine H-Sequenz, wir nennen sie die „Mittelsequenz", derart, daß die Herleitung für diese (und also auch sie selbst) keine Zeichen $\forall$ und $\exists$ enthält, und im übrigen Teil der Herleitung, die Mittelsequenz eingeschlossen, keine anderen Schlußfiguren als AES, AEA, EES, EEA und Strukturschlußfiguren vorkommen.

2.11. Die Mittelsequenz zerlegt sozusagen die Herleitung in einen oberen der Aussagenlogik angehörigen und einen unteren nur Einführungen von All- und Es-gibt-Zeichen enthaltenden Teil.

Über die Gestalt der umgewandelten Herleitung läßt sich noch folgendes ohne Mühe folgern: Der untere Teil, von der Mittelsequenz bis zur Endsequenz, gehört nur einem einzigen Faden an, da nur Schlußfiguren mit einer Obersequenz darin vorkommen. Die S-Formeln der Mittelsequenz sind von folgender Art:

Jede im Antezedens der Mittelsequenz stehende S-Formel entsteht aus einer S-Formel im Antezedens der Endsequenz, indem man die voranstehenden All- und Es-gibt-Zeichen (mit den danebenstehenden gebundenen Gegenstandsvariablen) wegläßt, und im übrigen Teil der Formel die gebundenen Gegenstandsvariablen durch gewisse freie Gegenstandsvariablen ersetzt. Dasselbe gilt für die Sukzedentia.

Dies folgt durch dieselbe Betrachtung wie unter III, 2.5 1 2.

2.2. Beweis des Satzes (2.1.)[6]).

Die Umwandlung der Herleitung erfolgt in mehreren Schritten.

2.21. Zunächst wird der Hauptsatz (III, 2.5) angewandt: Nach diesem läßt sich die Herleitung in eine Herleitung ohne Schnitte umwandeln.

2.22. Umwandlung von Grundsequenzen, welche ein Zeichen $\forall$ oder $\exists$ enthalten:

Solche können wegen der Teilformeln-Eigenschaft (III, 2.5 1 3) nur die Form $\forall x \mathfrak{F}x \to \forall x \mathfrak{F}x$ oder $\exists x \mathfrak{F}x \to \exists x \mathfrak{F}x$ haben. Man wandelt sie um zu ($\mathfrak{a}$ sei eine in der Herleitung noch nicht vorkommende freie Gegenstandsvariable):

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\forall x \mathfrak{F}x \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}\,AEA}{\forall x \mathfrak{F}x \to \forall x \mathfrak{F}x}\,AES \quad \text{bzw.} \quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \exists x \mathfrak{F}x}\,EES}{\exists x \mathfrak{F}x \to \exists x \mathfrak{F}x}\,EEA$$

Durch genügend oftmalige Wiederholung dieses Verfahrens kann man offenbar erreichen, daß keine Zeichen $\forall$ und $\exists$ mehr in irgendeiner Grundsequenz der Herleitung vorkommen.

2.23. Wir machen jetzt eine vollständige Induktion nach der folgendermaßen definierten „Ordnung" der Herleitung:

Von den Logische-Zeichen-Schlußfiguren bezeichnen wir die zu den Zeichen &, $\vee$, $\neg$ und $\supset$ gehörigen als „Aussagen-Schlußfiguren", die übrigen, also *AES*, *AEA*, *EES* und *EEA* als „Prädikaten-Schlußfiguren". Jede Prädikatenschlußfigur in der Herleitung erhält folgende Ordnungszahl zugeordnet:

---

[6]) Folgender Spezialfall des Satzes 2.1 wurde bereits von Herbrand auf völlig anderem Wege bewiesen:

Ist eine Formel $\mathfrak{P}$, in der All- und Es-gibt-Zeichen nur am Anfang, und über die ganze übrige Formel erstreckt, vorkommen (bekanntlich gibt es zu jeder Formel eine klassisch äquivalente Formel von dieser Gestalt, s. etwa H.-A., Seite 63), klassisch herleitbar, so gibt es eine Sequenz (die obige Mittelsequenz) mit leerem Antezedens, von deren Sukzedensformeln eine jede aus $\mathfrak{P}$ durch Weglassen der All- und Es-gibt-Zeichen (mit den danebenstehenden Variablen) und Einsetzung von freien Gegenstandsvariablen für die gebundenen Gegenstandsvariablen entsteht; diese Sequenz ist ferner ohne Anwendung der Zeichen $\forall$ und $\exists$ klassisch herleitbar, und aus ihr läßt sich $\to \mathfrak{P}$ lediglich unter Benutzung der von uns als *AES*, *EES*, Zusammenziehung im Sukzedens und Vertauschung im Sukzedens bezeichneten Schlußfiguren herleiten. (Nach dem Satz 2.1 kämen noch Verdünnungen im Sukzedens hinzu; es ist leicht einzusehen, daß solche stets vermeidbar sind.)

Siehe auch: J. Herbrand, Sur le problème fondamental de la logique mathématique. C. r. de la Soc. des sciences et des lettres de Varsovie 24 (1931), Cl. III, Seite 31, Anm. 1.

Man betrachtet den Fadenteil von der Untersequenz der Schlußfigur bis zur Endsequenz der Herleitung (einschließlich dieser) und zählt die darin vorkommenden Untersequenzen von Aussagen-Schlußfiguren. Deren Anzahl ist die Ordnungszahl.

Die Summe der Ordnungszahlen aller Prädikaten-Schlußfiguren in der Herleitung ist die Ordnung der Herleitung.

Diese wollen wir solange durch einzelne Schritte verringern, bis sie zu 0 wird.

Wir stellen zunächst fest, daß dann der Satz (2.1) leicht zu Ende zu beweisen ist: (Die Schritte (2.232) werden so beschaffen sein, daß dabei die durch 2.21 und 2.22 erreichten Eigenschaften erhalten bleiben.)

2.231. Dazu nehmen wir an, die Herleitung sei bereits auf die Ordnung 0 gebracht. Nun gehen wir von der Endsequenz aus jeweils zu der Obersequenz der darüberstehenden Schlußfigur über. Wir machen halt, sobald wir zu einer Untersequenz einer Aussagen-Schlußfigur oder zu einer Grundsequenz kommen; diese Sequenz nennen wir $\mathfrak{S}\mathfrak{q}$. (Sie wird uns, nach einer gleich anzugebenden Umwandlung, als „Mittelsequenz" dienen.)

Die Herleitung von $\mathfrak{S}\mathfrak{q}$ wandeln wir nun so um:

Wir lassen alle *H-S*-Formeln, welche etwa noch ein Zeichen $\forall$ oder $\exists$ enthalten, einfach weg. Dabei bleibt nun diese Herleitung korrekt: Grundsequenzen werden nämlich nicht betroffen, auf Grund von 2.22. Ferner wird keine Haupt- oder Nebenformel einer Schlußfigur weggelassen, denn enthielte eine solche ein Zeichen $\forall$ oder $\exists$, so enthielte jedenfalls die Hauptformel ein solches; nun kommen aber keine Prädikaten-Schlußfiguren vor (weil sonst die Ordnungszahl dieser Schlußfigur größer als 0 wäre), und Aussagen-Schlußfiguren können auf Grund der Teilformeln-Eigenschaft (III, 2.513) und der Voraussetzung des Satzes 2.1 kein $\forall$ oder $\exists$ in ihrer Hauptformel enthalten. Nun bleibt jede Schlußfigur korrekt, wenn man eine Formel, die nicht als Haupt- oder Nebenformel vorkommt, überall wo sie in der Schlußfigur als *S*-Formel auftritt, wegläßt; das ist leicht aus den Schemata III, 1.21; III, 1.22 ersichtlich. (Allenfalls entsteht eine identische Schlußfigur, diese wird wie üblich weggeschafft.)

Die aus $\mathfrak{S}\mathfrak{q}$ durch die Umwandlung entstandene Sequenz $\mathfrak{S}\mathfrak{q}^*$ unterscheidet sich von $\mathfrak{S}\mathfrak{q}$ dadurch, daß evtl. gewisse *S*-Formeln weggefallen sind. Wir lassen nun auf sie einige Verdünnungen und Vertauschungen folgen, derart, daß danach wieder die Sequenz $\mathfrak{S}\mathfrak{q}$ dasteht, und an diese fügen wir den unveränderten unteren Teil der Herleitung an.

Nun sind wir am Ziel: $\mathfrak{S}\mathfrak{q}^*$ ist die Mittelsequenz und erfüllt offensichtlich alle Anforderungen, welche im Satz (2.1) an diese gestellt werden.

2.232. Jetzt steht nur noch der Induktionsschritt aus, d. h.: Die Ordnung der Herleitung sei größer als 0, und es handelt sich darum, sie zu verringern.

2.23 2.1. Wir beginnen mit einer Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen in derselben Weise wie unter III, 3.10. Dadurch erreichen wir, daß die Herleitung folgende Eigenschaft hat (III, 3.101):

Für jede *AES* (bzw. *EEA*) gilt: Ihre Eigenvariable kommt in der Herleitung nur in den Sequenzen über der Untersequenz der *AES* (bzw. *EEA*) vor, und kommt ferner in keiner anderen *AES* oder *EEA* als deren Eigenvariable vor.

Hierbei wird die Ordnung offenbar nicht geändert.

2.23 2.2. Nunmehr kommen wir zur eigentlichen Umwandlung.

Zunächst stellen wir fest: Es gibt in der Herleitung eine Prädikaten-Schlußfigur — wir nennen sie $\mathfrak{Sf}\,1$ — mit folgender Eigenschaft: Verfolgt man den Fadenteil von der Untersequenz dieser Schlußfigur bis zur Endsequenz, so ist die erste Untersequenz einer Logische-Zeichen-Schlußfigur, zu der man gelangt, Untersequenz einer Aussagen-Schlußfigur (diese Schlußfigur nennen wir $\mathfrak{Sf}\,2$). Gäbe es nämlich keine solche Stelle, so wäre die Ordnung der Herleitung gleich 0.

Unser Ziel ist jetzt, die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}\,1$ über $\mathfrak{Sf}\,2$ hinweg nach unten zu verschieben. Das ist leicht durchzuführen, es geschieht nach folgenden Schemata:

2.23 2.21. $\mathfrak{Sf}\,2$ habe eine Obersequenz.

2.23 2.211. $\mathfrak{Sf}\,1$ sei eine *AES*. Dann lautet der zu behandelnde Teil der Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma \to \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,AES}{\Delta \to \Lambda}\,\mathfrak{Sf}\,2 \text{ mit evtl. vorangehenden Struktur-Schlußfiguren}$$

Wir wandeln ihn um zu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}, \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,\text{evtl. mehrmalige Vertauschung, sowie eine Verdünnung}}{\Delta \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}, \Lambda}\,\left\{\begin{array}{l}\text{Schlußfiguren genau derselben Art wie oben, d. h. wie:}\\ \text{}\mathfrak{Sf}\,2 \text{ mit evtl. vorangehenden Struktur-Schlußfiguren}\end{array}\right.}{\Delta \to \Lambda, \mathfrak{F}\mathfrak{a}}\,\text{evtl. mehrmalige Vertauschung}}{\Delta \to \Lambda, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,AES}{\Delta \to \Lambda}\,\text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Zusammenziehung}$$

Die Wegschaffung des $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ durch Zusammenziehung, zum Schluß, ist darum möglich, weil $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ in Λ als *S*-Formel vorkommen muß. (Denn die *S*-Formel $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ konnte, in der ursprünglichen Herleitung, durch $\mathfrak{Sf}\,2$

und die vorangehenden Struktur-Schlußfiguren nicht im Sukzedens zum Verschwinden gebracht werden, sie kann ja nicht etwa Nebenformel von $\mathfrak{Sf}2$ sein, auf Grund der Teilformeln-Eigenschaft III, 2.513 und der Voraussetzung des Satzes 2.1.)

Die Variablenbedingung ist für die verschobene AES auf Grund von 2.232.1 erfüllt.

Die Ordnung der Herleitung hat sich offenbar um 1 verringert.

2.23 2.212. Der Fall, daß $\mathfrak{Sf}1$ eine EES ist, wird genau so behandelt, man hat nur $\forall$ durch $\exists$ zu ersetzen.

2.23 2.213. Die Fälle, daß $\mathfrak{Sf}1$ eine AEA oder EEA ist, werden spiegelbildlich zu den beiden vorigen behandelt.

2.232.22. Der Fall, daß $\mathfrak{Sf}2$ zwei Obersequenzen hat, also eine UES, OEA oder FEA ist, läßt sich in ganz entsprechender Weise erledigen; es werden allenfalls einige zusätzliche Struktur-Schlußfiguren erforderlich.

2.3. Analog zu dem Satz 2.1 lassen sich weitere Verschärfungen des Hauptsatzes in dem Sinne erreichen, daß man gewisse Vorschriften über die Reihenfolge der Logische-Zeichen-Schlußfiguren in einer Herleitung machen kann. Man kann nämlich die Schlußfiguren in weitem Maße übereinander hinweg verschieben, in derselben Weise wie es eben geschehen ist (2.23 2.2).

Wir gehen darauf nicht näher ein.

§ 3.

Anwendung des verschärften Hauptsatzes (2.1) zu einem neuen[7]) Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik mit Ausschluß der vollständigen Induktion.

Als Arithmetik bezeichnen wir die (elementare, d.h. keine analytischen Hilfsmittel benutzende) Theorie der natürlichen Zahlen. Diese können wir unter Verwendung unseres logischen Kalküls LK in folgender Weise formalisieren:

3.1. In der Arithmetik pflegt man „Funktionen" zu benutzen, z.B. x' (gleich $x+1$), $x+y$, $x \cdot y$. Da wir jedoch bei unseren logischen Untersuchungen keine Funktionszeichen eingeführt haben, wollen wir, um diese trotzdem auf die Arithmetik anwenden zu können, die Aussagen

[7]) Ältere Beweise finden sich bei J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 1—46; J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'Arithmétique, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 166 (1932), S. 1—8.

der Arithmetik in einer Weise formalisieren, wobei an Stelle der Funktionen Prädikate auftreten. Wir benutzen z. B. statt der Funktion x' das Prädikat $x \mathrm{Vg}\, y$, zu lesen: x ist der Vorgänger von y, d. h. $y = x + 1$. Ferner sehen wir $[x + y = z]$ als Prädikat mit drei Argumentstellen an; darin haben also die Zeichen $+$ und $=$ keine selbständige Bedeutung. Ein anderes Prädikat ist $x = y$, dieses Gleichheitszeichen hat also mit dem vorigen formal gar nichts zu tun.

Ferner wollen wir auch die Zahl 1 nicht als Gegenstandszeichen schreiben, da wir in unserem logischen Formalismus nur Gegenstandsvariable und keine Zeichen für bestimmte Gegenstände verwendet haben. Wir benutzen daher folgende Umschreibung: Das Prädikat „Eins x" bedeute inhaltlich: „x ist die Zahl 1".

Der Satz: „$x + 1$ ist der Nachfolger von x" ließe sich z. B. in unserem Formalismus so darstellen:

$$\forall x \forall y \forall z ((\mathrm{Eins}\, y \,\&\, [x + y = z]) \supset x \mathrm{Vg} z).$$

Die übrigen natürlichen Zahlen lassen sich durch die Prädikate $\mathrm{Eins}\, x \,\&\, x \mathrm{Vg}\, y$, $\mathrm{Eins}\, x \,\&\, x \mathrm{Vg}\, y \,\&\, y \mathrm{Vg}\, z$, usw. charakterisieren.

Wie aber sollen wir die jetzt eingeführten Prädikatzeichen in unseren Kalkül einordnen, wo wir doch nur Aussagenvariable zugelassen haben? Dazu setzen wir einfach fest, daß die Prädikatzeichen genau wie Aussagenvariable anzusehen sind. Genau gesagt: Wir sehen Ausdrücke der Form

$$\mathrm{Eins}\, \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x} \mathrm{Vg}\, \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \quad [\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{z}],$$

wobei für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ irgendwelche Gegenstandsvariablen stehen, lediglich als leichter verständliche Schreibweisen für die Formeln

$$A\mathfrak{x}, \quad B\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \quad C\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \quad D\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$$

an. In diesem Sinne sind die folgenden Axiomformeln wirklich Formeln nach unserer Definition.

(Man kann die Zahl 1 nicht etwa als Schreibweise für eine Gegenstandsvariable ansehen, da in unserem Kalkül die Gegenstandsvariablen wirklich als variabel fungieren, während das für die Aussagenvariablen nicht der Fall ist.)

Als „Axiomformeln" der Arithmetik nehmen wir zunächst die folgenden, wir werden später im Anschluß an den Widerspruchsfreiheitsbeweis (siehe 3. 3) allgemeine Gesichtspunkte angeben, nach denen weitere zulässige Axiomformeln gebildet werden können:

Gleichheit: $\forall x\, x = x$ (Reflexivität)
$\forall x \forall y (x = y \supset y = x)$ (Symmetrie)
$\forall x \forall y \forall z ((x = y \,\&\, y = z) \supset x = z)$ (Transitivität)

Eins: $\exists x\, \mathrm{Eins}\, x$ (Existenz der 1)
$\forall x \forall y ((\mathrm{Eins}\, x \,\&\, \mathrm{Eins}\, y) \supset x = y)$ (Eindeutigkeit der 1)

Vorgänger: $\forall x \exists y\, x \mathrm{Vg}\, y$ (Existenz des Nachfolgers)
$\forall x \forall y (x \mathrm{Vg}\, y \supset \neg\, \mathrm{Eins}\, y)$ (1 hat keinen Vorgänger)
$\forall x \forall y \forall z \forall u ((x \mathrm{Vg} y \,\&\, z \mathrm{Vg} u \,\&\, x = z) \supset y = u)$
(Eindeutigkeit des Nachfolgers)
$\forall x \forall y \forall z \forall u ((x \mathrm{Vg}\, y \,\&\, z \mathrm{Vg}\, u \,\&\, y = u) \supset x = z)$
(Eindeutigkeit des Vorgängers)

Eine Formel $\mathfrak{B}$ heißt innerhalb der Arithmetik mit Ausschluß der vollständigen Induktion herleitbar, wenn es eine LK-Herleitung für eine Sequenz

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}$$

gibt, worin $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ Axiomformeln der Arithmetik sind.

Daß dieses formale System der Arithmetik in der Tat die in der inhaltlichen Arithmetik üblichen Beweisführungen (soweit sie die vollständige Induktion nicht benutzen) wiederzugeben gestattet, läßt sich nicht beweisen, da für inhaltliche Überlegungen kein fest begrenzter Rahmen besteht; man kann sich lediglich für einzelne inhaltliche Beweise durch den Versuch davon überzeugen.

3.2. Jetzt wollen wir die Widerspruchsfreiheit des angegebenen formalen Systems beweisen. Das ist mit Hilfe des verschärften Hauptsatzes (2.1) ganz einfach.

3.21. Eine „Widerspruchsformel" $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ ist dann und nur dann in dem System herleitbar, wenn es eine LK-Herleitung für eine Sequenz mit leerem Sukzedens und arithmetischen Axiomformeln im Antezedens gibt. Nämlich:

Aus $\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ erhält man $\Gamma \to$ so:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\neg\, \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to}\, NEA}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to}\, UEA}{\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A} \to}\, \text{Vertauschung}}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A} \to}\, UEA}{\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A} \to}\, \text{Zusammenziehung}}{\Gamma \to}\, \text{Schnitt}$$

Die Umkehrung geschieht durch eine Verdünnung im Sukzedens.

Ist also unsere Arithmetik widerspruchsvoll, so gibt es eine LK-Herleitung mit der Endsequenz

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow,$$

wobei $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ arithmetische Axiomformeln sind.

3.22. Nunmehr wenden wir die Verschärfung des Hauptsatzes (2.1) an. Die arithmetischen Axiomformeln erfüllen die an die S-Formeln der Endsequenz gestellte Bedingung. Also gibt es eine LK-Herleitung mit derselben Endsequenz, welche folgende Eigenschaften hat:

1) Sie enthält keine Schnitte.

2) Es gibt darin eine H-Sequenz, die „Mittelsequenz", deren Herleitung keine Zeichen $\forall$ und $\exists$ enthält, und aus der die Endsequenz durch eine Reihe von Schlußfiguren AEA, EEA, Verdünnung, Zusammenziehung und Vertauschung im Antezedens hervorgeht. Die Mittelsequenz hat leeres Sukzedens (2.11).

3.23. Anschließend nehmen wir eine Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen wie unter III, 3.10 vor, dadurch ändert sich an den genannten Eigenschaften nichts, und es kommt die folgende hinzu (III, 3.101): Die Eigenvariable jeder EEA kommt in der Herleitung nur in Sequenzen über der Untersequenz der EEA vor.

3.24. Alsdann ersetzen wir in gleich anzugebender Weise jede freie Gegenstandsvariable überall, wo sie in der Herleitung vorkommt, durch ein und dieselbe natürliche Zahl. Dabei entsteht also eine Figur, die wir nicht mehr als LK-Herleitung bezeichnen dürfen; wieweit sie trotzdem einen inhaltlichen Sinn hat, werden wir nachher sehen.

Die Ersetzungen der freien Gegenstandsvariablen durch Zahlen geschehen in folgender Reihenfolge:

3.241. Zuerst werden alle freien Gegenstandsvariablen, die nicht als Eigenvariable einer EEA vorkommen, überall durch die Zahl 1 ersetzt. (Man könnte auch eine andere Zahl nehmen.)

3.242. Nunmehr nehmen wir die in der Herleitung vorkommenden EEA-Schlußfiguren von unten anfangend der Reihe nach vor und ersetzen jeweils deren Eigenvariable (überall wo sie in der „Herleitung" vorkommt) durch eine Zahl. Diese Zahl bestimmen wir wie folgt:

Die EEA kann nur lauten:

$$\frac{\mathrm{Eins}\,\mathfrak{a},\ \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists x\,\mathrm{Eins}\,x,\ \Gamma \rightarrow \Theta} \quad \text{oder} \quad \frac{\nu\,\mathrm{Vg}\,\mathfrak{a},\ \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists y\,\nu\,\mathrm{Vg}\,y,\ \Gamma \rightarrow \Theta}$$

(auf Grund der Teilformeln-Eigenschaft III, 2.5113; ν kann nur eine Zahl sein, auf Grund von 3.241 und 3.23).

Im ersten Falle wird $\mathfrak{a}$ durch 1 ersetzt, im zweiten Falle durch die um 1 größere Zahl als ν.

3.25. Jetzt betrachten wir die aus der Herleitung entstandene Figur. Insbesondere interessiert uns das Aussehen der (ehemaligen) Mittelsequenz. Darüber können wir folgendes sagen:

Ihr Sukzedens ist leer, und jede der Antezedens-S-Formeln hat entweder die Gestalt Eins 1 oder $\nu\,\mathrm{V}\mathfrak{g}\,\nu'$, wobei für ν eine Zahl und für ν' die um 1 größere Zahl steht, oder aber sie geht aus einer arithmetischen Axiomformel mit lauter Allzeichen am Anfang durch Weglassung der Allzeichen (und der danebenstehenden gebundenen Gegenstandsvariablen) und Einsetzung von Zahlen für die gebundenen Gegenstandsvariablen im übrigen Teil der Formel hervor. (Alles dies folgt durch dieselbe Betrachtung wie unter III, 2.512, siehe auch 2.11).

D. h.: Die S-Formeln im Antezedens der Mittelsequenz stellen inhaltlich richtige numerische Aussagen dar. Ferner gilt für die „Herleitung" der Mittelsequenz: Sie ist aus einer Herleitung ohne die Zeichen $\forall$ und $\exists$ hervorgegangen, indem man die darin vorkommenden freien Gegenstandsvariablen durch Zahlen ersetzte. Eine solche „Herleitung" stellt nun inhaltlich einen Beweis der Arithmetik, der nur Schlußweisen der Aussagenlogik benutzt, dar.

Damit sind wir zu folgendem Ergebnis gelangt:

Wenn unsere Arithmetik widerspruchsvoll ist, so läßt sich bereits aus richtigen numerischen Aussagen durch bloße Anwendung von Schlüssen der Aussagenlogik ein Widerspruch beweisen.

Dabei sind also „richtige numerische Aussagen" Aussagen der Form Eins 1, $\nu\,\mathrm{V}\mathfrak{g}\,\nu'$, sowie alle numerischen Spezialfälle der unter den Axiomen vorkommenden generellen Aussagen, z. B. $3 = 3$; $4 = 5 \supset 5 = 4$; $3\,\mathrm{V}\mathfrak{g}\,4 \supset \neg$ Eins 4.

Daß nun aus solchen Aussagen mittels der Aussagenlogik kein Widerspruch folgen kann, ist nahezu selbstverständlich, und ein Beweis hierfür wäre kaum mehr als eine formale Umschreibung eines inhaltlich klaren Sachverhalts. Wir wollen daher diesen nicht durchführen, wir deuten nur kurz das hierbei übliche Verfahren an:

Man setzt allgemein fest, für welche Zahlenwerte die Formeln Eins μ, $\mu = \nu$, $\mu\,\mathrm{V}\mathfrak{g}\,\nu$, $\mu + \nu = \varrho$ usw. richtig und für welche sie falsch sind, ferner erklärt man in bekannter Weise (siehe etwa H.-A., S. 3) die Richtigkeit oder Falschheit von $\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\neg\,\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ als Funktion der Richtigkeit oder Falschheit der Teilformeln, und zeigt dann, daß alle numerischen Spezialfälle der Axiomformeln „richtig" sind, sowie daß die Schlußfiguren der Aussagenlogik von richtigen Formeln immer wieder auf richtige Formeln führen. Eine Widerspruchsformel jedoch ist keine richtige Formel.

3.3. Aus den unter 3.25 gemachten Bemerkungen ist leicht ersichtlich, in welcher Weise sich das System der arithmetischen Axiomformeln erweitern läßt, ohne daß dadurch ein Widerspruch herleitbar wird: Wir können ganz allgemein solche Axiomformeln zulassen, welche Allzeichen nur am Anfang und über die ganze Formel erstreckt, sowie keine Es-gibt-Zeichen enthalten, und von denen jeder numerische Spezialfall inhaltlich richtig ist. (Wir könnten auch noch gewisse Formeln mit Es-gibt-Zeichen zulassen, sofern sie sich beim Widerspruchsfreiheitsbeweis in analoger Weise wie die beiden oben vorkommenden behandeln lassen.)

Z. B. sind folgende Axiomformeln für die Addition zulässig:

$$\forall x \forall y (x \,V g\, y \supset [x + 1 = y])$$
$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v ((x \,V g\, y \;\&\; [z + x = u] \;\&\; [z + y = v]) \supset u \,V g\, v)$$
$$\forall x \forall y \forall z \forall u (([x + y = z] \;\&\; [x + y = u]) \supset z = u)$$
$$\forall x \forall y \forall z ([x + y = z] \supset [y + x = z])$$

und andere.

3.4. Da man in der Zahlentheorie andauernd die vollständige Induktion braucht, so hat die Arithmetik ohne vollständige Induktion nur wenig praktische Bedeutung. Für die Arithmetik mit Einschluß der vollständigen Induktion ist jedoch die Widerspruchsfreiheit bisher noch nicht einwandfrei bewiesen.

V. Abschnitt.

Die Äquivalenz der neuen Kalküle NJ, NK und LJ, LK mit einem dem Formalismus von Hilbert angeglichenen Kalkül.

§ 1.

Der Begriff der Äquivalenz.

1.1. Wir führen den folgenden Äquivalenzbegriff zwischen Formeln und Sequenzen ein (dieser ist im Einklang mit den unter I, 1.1 und I, 2.4 gemachten Angaben über den inhaltlichen Sinn des Zeichens $\wedge$ und der Sequenzen):

Gleiche Formeln sind äquivalent.

Gleiche Sequenzen sind äquivalent.

Zwei Formeln sind äquivalent, wenn die eine aus der anderen dadurch entsteht, daß man das Zeichen $\wedge$ überall durch die Formel $A \;\&\; \neg A$ ersetzt.

Die Sequenz $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ ist äquivalent mit folgender Formel:

wenn die $\mathfrak{A}$ und die $\mathfrak{B}$ nicht leer sind:

$$(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1);$$

(diese Fassung ist für den Äquivalenzbeweis bequemer als die mit $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu$),

wenn die $\mathfrak{A}$ leer sind, doch die $\mathfrak{B}$ nicht:

$$\mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1;$$

wenn die $\mathfrak{B}$ leer sind, doch die $\mathfrak{A}$ nicht:

$$(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset (A \,\&\, \neg A);$$

wenn die $\mathfrak{A}$ und die $\mathfrak{B}$ leer sind:

$$A \,\&\, \neg A.$$

Die Äquivalenz ist transitiv.

1.2. (Man könnte natürlich den Äquivalenzbegriff noch wesentlich weiter fassen, z. B. pflegt man gewöhnlich zwei Formeln äquivalent zu nennen, wenn die eine aus der anderen herleitbar ist. Wir begnügen uns hier mit der angegebenen speziellen, für unsere Äquivalenzbeweise ausreichenden Fassung.)

Zwei Herleitungen wollen wir äquivalent nennen, wenn die Endformel bzw. Endsequenz der einen mit der der anderen äquivalent ist.

Zwei Kalküle nennen wir äquivalent, wenn sich jede Herleitung in dem einen Kalkül in eine äquivalente Herleitung in dem anderen Kalkül umwandeln läßt.

Im § 2 dieses Abschnitts werden wir einen dem Hilbertschen Formalismus angeglichenen Kalkül (LHJ für die intuitionistische, LHK für die klassische Prädikatenlogik) angeben. In den übrigen Paragraphen dieses Abschnitts werden wir dann die Äquivalenz der Kalküle LHJ, NJ und LJ (§ 3—5) sowie die Äquivalenz der Kalküle LHK, NK und LK (§ 6), in dem eben erklärten Sinne, zeigen. Und zwar beweisen wir der Reihe nach:

Jede LHJ-Herleitung läßt sich in eine äquivalente NJ-Herleitung umwandeln (§ 3), jede NJ-Herleitung läßt sich in eine äquivalente LJ-Herleitung umwandeln (§ 4), und jede LJ-Herleitung läßt sich in eine äquivalente LHJ-Herleitung umwandeln (§ 5); damit ist offenbar die Äquivalenz aller drei Kalküle bewiesen; ganz entsprechend verfahren wir dann mit den drei klassischen Kalkülen in § 6 (6.1—6.3).

§ 2.

Angabe eines logistischen Kalküls nach Hilbert[8]) und Glivenko[9]).

Wir erklären zunächst die intuitionistische Form des Kalküls:

Eine LHJ-Herleitung besteht aus Formeln in stammbaumförmiger Anordnung, die Anfangsformeln sind Grundformeln.

Die Grundformeln und Schlußfiguren entstehen aus den folgenden Schemata nach derselben Einsetzungsvorschrift wie unter II, 2. 21, d. h.:

Für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind beliebige Formeln einzusetzen, für $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bzw. $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ eine beliebige Formel mit $\forall$ bzw. $\exists$ als äußerstem Zeichen, $\mathfrak{x}$ bezeichne die zugehörige gebundene Gegenstandsvariable, für $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ diejenige Formel, welche aus $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ entsteht, indem man die gebundene Gegenstandsvariable $\mathfrak{x}$ überall, wo sie vorkommt, durch die freie Gegenstandsvariable $\mathfrak{a}$ ersetzt.

Schemata für Grundformeln:

2. 11. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$

2. 12. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$

2. 13. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$

2. 14. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$

2. 15. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$

2. 21. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$

2. 22. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$

2. 23. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \big((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}))\big)$

2. 31. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$

2. 32. $\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$

2. 33. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset \big((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C})\big)$

2. 41. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \neg\, \mathfrak{B}) \supset \neg\, \mathfrak{A})$

2. 42. $(\neg\, \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$

2. 51. $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}$

2. 52. $\mathfrak{F}\mathfrak{a} \supset \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

(Einige Schemata sind entbehrlich, doch kommt es uns auf Unabhängigkeit nicht an.)

Schemata für Schlußfiguren:

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} \qquad \frac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{A} \supset \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}} \qquad \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \supset \mathfrak{A}}{(\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{A}}$$

---

[8]) D. Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik; Abh. a. d. math. Sem. d. Hamburg. Univ. 6 (1928), S. 65—85.

[9]) V. Glivenko, Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer; Acad. royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences, 5e série, t. XV (1929), pp. 183—188.

Variablenbedingung: In den aus den beiden letzten Schemata entstehenden Schlußfiguren darf die im Schema mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete Gegenstandsvariable in der Unterformel nicht vorkommen (also nicht in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$)

(Der Kalkül LHJ ist im wesentlichen äquivalent mit dem von Heyting[10]).)

Durch Hinzunahme des Grundformelnschemas $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ entsteht der Kalkül LHK (klassische Prädikatenlogik).

(Dieser ist im wesentlichen äquivalent mit dem bei H.-A., Seite 53, angegebenen Kalkül.)

§ 3.

Umwandlung einer LHJ-Herleitung in eine äquivalente NJ-Herleitung.

Aus einer LHJ-Herleitung (V, 2) erhalten wir eine NJ-Herleitung (II, 2) mit gleicher Endformel durch folgende Umwandlung der LHJ-Herleitung: (Es werden dabei sämtliche H-Formeln dieser Herleitung als H-Formeln der NJ-Herleitung wiedererscheinen, und zwar werden diese stets von keiner Annahmeformel abhängen. Außerdem kommen weitere, von Annahmeformeln abhängige H-Formeln hinzu.)

3.1. An Stelle der LHJ-Grundformeln treten NJ-Herleitungen für diese, nach folgenden Schemata:

$$(2.11)\quad \frac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}}\,FE_1 \qquad (2.12)\quad \frac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}}\,FE}{\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})}\,FE_1$$

$$(2.13)\quad \frac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset (\overset{2}{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{B})}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FB \quad \overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{B}}\,FB}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FE_1}{(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}\,FE_2.$$

$$(2.14)\quad \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset (\overset{3}{\mathfrak{B}} \supset \mathfrak{C})}{\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}}\,FB \quad \overset{2}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}}\,FE_1}{\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})}\,FE_2}{(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))}\,FE_3.$$

$$(2.15)\quad \frac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset \overset{3}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}}\,FB \quad \mathfrak{B} \supset \overset{2}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}}\,FE_1}{(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})}\,FE_2}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))}\,FE_3.$$

$$(2.21)\quad \frac{\overset{1}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}}\,UB \Big/ (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}\,FE_1.$$

[10]) s. Anm. [2]).

Völlig analog wie 2.21 erledigen sich 2.22, 2.31, 2.32, 2.51 und 2.52.

$$(2.23)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \mathfrak{A}\supset\overset{3}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}}FB\quad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \mathfrak{A}\supset\overset{2}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}FB}{\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}}UE}{\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C})}FE_1}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}))}FE_2}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset\big((\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\,\&\,\mathfrak{C}))\big)}FE_3.$$

$$(2.33)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\quad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \mathfrak{A}\supset\overset{4}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}FB\quad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{B}}\quad \mathfrak{B}\supset\overset{3}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}FB}{\mathfrak{C}}OB_1}{(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C}}FE_2}{(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C})}FE_3}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})\supset\big((\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset((\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C})\big)}FE_4.$$

$$(2.41)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \mathfrak{A}\supset\overset{3}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}}FB\quad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \mathfrak{A}\supset\overset{2}{\neg\mathfrak{B}}}{\neg\mathfrak{B}}FB}{\bot}NB}{\neg\mathfrak{A}}NE_1}{(\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B})\supset\neg\mathfrak{A}}FE_2}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset((\mathfrak{A}\supset\neg\mathfrak{B})\supset\neg\mathfrak{A})}FE_3.$$

$$(2.42)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \overset{2}{\neg\mathfrak{A}}}{\bot}NB}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}FE_1}{(\neg\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})}FE_2.$$

3.2. An Stelle der *LHJ*-Schlußfiguren treten Teile einer *NJ*-Herleitung nach folgenden Schemata:

$\dfrac{\mathfrak{A}\quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ bleibt so, dies ist ja schon eine *FB*.

$\dfrac{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}a}{\mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}x}$ wird zu: $\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}\quad \mathfrak{A}\supset\mathfrak{F}a}{\mathfrak{F}a}FB}{\forall x\,\mathfrak{F}x}AE}{\mathfrak{A}\supset\forall x\,\mathfrak{F}x}FE_1$

$\dfrac{\mathfrak{F}a\supset\mathfrak{A}}{(\exists x\,\mathfrak{F}x)\supset\mathfrak{A}}$ wird zu: $\dfrac{\exists x\,\mathfrak{F}x\quad \dfrac{\overset{2}{\mathfrak{F}a}\quad \mathfrak{F}a\supset\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}FB}{\mathfrak{A}}EB_2}{(\exists x\,\mathfrak{F}x)\supset\mathfrak{A}}FE_1.$

Die Variablenbedingung für die Schlußfiguren AE und EB ist erfüllt, wie man leicht sieht, nämlich auf Grund der für die LHJ-Schlußfiguren bestehenden Variablenbedingung.

Damit ist die Umwandlung einer LHJ-Herleitung in eine äquivalente NJ-Herleitung vollzogen.

§ 4.

Umwandlung einer NJ-Herleitung in eine äquivalente LJ-Herleitung.

4.1. Diese geht so vor sich: Man ersetzt zunächst jede H-Formel der NJ-Herleitung durch folgende Sequenz (vgl. III, 1.1): Im Sukzedens steht nur die Formel selbst, im Antezedens stehen die Annahmeformeln, von denen sie abhing, und zwar in der Reihenfolge, wie sie in der NJ-Herleitung von links nach rechts vorkamen. (Es ist wohl deutlich, wie eine Reihenfolge der Anfangsformeln einer stammbaumförmigen Figur von links nach rechts gemeint ist).

Alsdann ersetzen wir ferner das Zeichen $\wedge$ überall, wo es vorkommt, durch $A \,\&\, \neg A$. (Die hierdurch aus einer Formel $\mathfrak{A}$ entstehende Formel bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^*$.)

4.2. Nun haben wir bereits ein stammbaumförmiges System von Sequenzen. Die Endsequenz hat leeres Antezedens (II, 2.2), sie ist offenbar schon äquivalent mit der Endformel der NJ-Herleitung. Die Anfangssequenzen haben sämtlich die Gestalt $\mathfrak{D}^* \to \mathfrak{D}^*$ (II, 2.2), sind also bereits Grundsequenzen einer LJ-Herleitung.

Die aus den NJ-Schlußfiguren entstandenen Figuren werden nach den folgenden Schemata in Teile einer LJ-Herleitung umgewandelt:

4.21. Die Schlußfiguren OE, AE, EE sind bereits durch die Ersetzung in LJ-Schlußfiguren übergegangen. (Im Falle einer AE ist die LJ-Variablenbedingung auf Grund der NJ-Variablenbedingung erfüllt).

4.22. Eine UE wurde zu: $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \quad \Delta \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A}^* \,\&\, \mathfrak{B}^*}$.

Man macht daraus:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A}^*}\ \left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Vertau-}\\ \text{schung und Verdünnung}\end{array}\right. \qquad \dfrac{\Delta \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}\ \left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige}\\ \text{Verdünnung}\end{array}\right.}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A}^* \,\&\, \mathfrak{B}^*}\ UES$$

4.23. Eine FE wurde zu: $\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}^*, \Gamma_2, \ldots, \mathfrak{A}^*, \Gamma_\varrho \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varrho \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}$.

Man macht daraus:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}^*, \Gamma_2, \ldots, \mathfrak{A}^*, \Gamma_\varrho \to \mathfrak{B}^*}{\mathfrak{A}^*, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varrho \to \mathfrak{B}^*}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Zusammenziehung, u. U. Verdünnung.}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varrho \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}\ FES$$

4.24. Bei einer NE verfährt man ebenso, schließlich hat man noch die Figur $\dfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\Gamma \to \neg\, \mathfrak{A}^*}$ zu behandeln.

Nun leitet man $A \,\&\, \neg A \to$ wie folgt im Kalkül LJ her:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{\neg A, A \to}\, NEA}{A \,\&\, \neg A, A \to}\, UEA}{A, A \,\&\, \neg A \to}\text{ Vertauschung}}{A \,\&\, \neg A, A \,\&\, \neg A \to}\, UEA}{A \,\&\, \neg A \to}\text{ Zusammenziehung.}$$

Mit Hinzunahme dieser Sequenz macht man aus der zu behandelnden Figur:

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to A \,\&\, \neg A \qquad A \,\&\, \neg A \to}{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to}\text{ Schnitt}}{\Gamma \to \neg\, \mathfrak{A}^*}\, NES.$$

4.25. Die NJ-Schlußfigur $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}}$ wurde durch die Ersetzung (4.1) zu $\dfrac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\Gamma \to \mathfrak{D}^*}$. Man macht daraus:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A \qquad A \,\&\, \neg A \to}{\Gamma \to}\text{ Schnitt}}{\Gamma \to \mathfrak{D}^*}\text{ Verdünnung.}$$

Dabei ist über $A \,\&\, \neg A \to$ die unter 4.24 angegebene Herleitung für diese Sequenz zu setzen.

4.26. Eine AB wurde zu: $\dfrac{\Gamma \to \forall x\, \mathfrak{F}^* x}{\Gamma \to \mathfrak{F}^* a}$.

Man macht daraus:

$$\cfrac{\Gamma \to \forall x\, \mathfrak{F}^* x \qquad \cfrac{\forall x\, \mathfrak{F}^* x \to \mathfrak{F}^* a}{\mathfrak{F}^* a \to \mathfrak{F}^* a}\, AEA}{\Gamma \to \mathfrak{F}^* a}\text{ Schnitt.}$$

4.27. Eine UB wird genau ebenso behandelt.

4.28. Eine FB wurde zu: $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}$.

Man macht daraus:

$$\cfrac{\Delta \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^* \qquad \cfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \quad \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*}{\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*, \Gamma \to \mathfrak{B}^*}\, FEA}{\cfrac{\Delta, \Gamma \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}\text{ evtl. mehrmalige Vertauschung.}}\text{ Schnitt}$$

4.29. Eine NB wurde zu: $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \neg\, \mathfrak{A}^*}{\Gamma, \Delta \to A \,\&\, \neg A}$.

Man macht daraus:

$$\dfrac{\Delta \to \neg\, \mathfrak{A}^* \qquad \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^*}{\neg\, \mathfrak{A}^*, \Gamma \to}\, NEA}{\dfrac{\Delta, \Gamma \to}{\Gamma, \Delta \to}\, \text{Verdünnung.}}\, \text{Schnitt}$$

evtl. mehrmalige Vertauschung

4.2 10. OB: Auf die beiden rechten oberen Sequenzen läßt man zunächst wie oben bei FE und NE (4.2 3) Vertauschungen. Zusammenziehungen und Verdünnung (soweit nötig) folgen, derart, daß als Ergebnis jeweils eine Sequenz auftritt, in der eine Formel der Gestalt $\mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ am Anfang des Antezedens steht (während im übrigen Antezedens genau die betreffenden ehemaligen Annahmeformeln verschwunden sind). Alsdann folgt:

$$\dfrac{\Xi \to \mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^* \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{A}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\ \left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige}\\ \text{Verdünnung und}\\ \text{Vertauschung}\end{array}\right. \qquad \dfrac{\mathfrak{B}^*, \Delta \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{B}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\ \left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige}\\ \text{Verdünnung und}\\ \text{Vertauschung}\end{array}\right.}{\mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\, OEA}{\Xi, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\, \text{Schnitt.}$$

4.2 11. Eine EB wird ganz ähnlich behandelt, zunächst wird in der rechten Obersequenz $\mathfrak{F}^* \mathfrak{a}$ an den Anfang des Antezedens gebracht (wie unter 4.2 3), dann folgt:

$$\dfrac{\Delta \to \exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \qquad \exists\, \mathfrak{x}\, \dfrac{\mathfrak{F}^* \mathfrak{a}, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{F}^* \mathfrak{x}, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}\, EEA}{\Delta, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}\, \text{Schnitt.}$$

Die LJ-Variablenbedingung für die EEA ist auf Grund der NJ-Variablenbedingung für die EB erfüllt.

Damit ist die Umwandlung einer NJ-Herleitung in eine äquivalente LJ-Herleitung vollzogen.

§ 5.

Umwandlung einer LJ-Herleitung in eine äquivalente LHJ-Herleitung.

Diese Umwandlung ist etwas schwieriger als die beiden bisherigen. Wir führen sie in einer Reihe von einzelnen Schritten durch.

Vorbemerkung: Zusammenziehungen und Vertauschungen im Sukzedens gibt es im Kalkül LJ nicht, da in solchen mindestens zwei S-Formeln im Sukzedens auftreten würden.

5.1. Zunächst führen wir an Stelle der Schlußfiguren UEA, OES, AEA, EES, NEA und FEA neue Grundsequenzen ein, diese sind nach den folgenden Schemata zu bilden (Einsetzungsvorschrift wie in III, 1.2; dieselbe gilt im folgenden immer; wir werden übrigens für Formeln

neben den dort genannten Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ auch noch die Buchstaben $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{I}$ verwenden):

$\mathfrak{Gf}1$: $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ $\quad$ $\mathfrak{Gf}2$: $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$

$\mathfrak{Gf}3$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ $\quad$ $\mathfrak{Gf}4$: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

$\mathfrak{Gf}5$: $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \to \mathfrak{F} \mathfrak{a}$ $\quad$ $\mathfrak{Gf}6$: $\mathfrak{F} \mathfrak{a} \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$

$\mathfrak{Gf}7$: $\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to$ $\quad$ $\mathfrak{Gf}8$: $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Wir wandeln also die betreffenden Schlußfiguren in der zu behandelnden LJ-Herleitung in folgender Weise um:

Eine UEA wird zu:

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}}\,\mathfrak{Gf}1 \qquad \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}\ \text{Schnitt.}$$

Entsprechend verwandeln wir die andere Form der UEA und jede AEA.

Symmetrisch dazu verfahren wir mit einer OES oder EES.

Eine NEA wird zu:

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to}\,\mathfrak{Gf}7}{\mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \to}\ \text{Vertauschung}}{\dfrac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \to}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \to}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung.}}\ \text{Schnitt}$$

(Das Θ im Schema der NEA (III, 1.22) muß leer sein auf Grund der LJ-Sukzedensbedingung, ebenso bei der FEA.)

Eine FEA wird zu:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}\,\mathfrak{Gf}8}{\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}\ \text{Vertauschung}}{\Gamma, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}\ \text{Schnitt} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Lambda}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung.}}\ \text{Schnitt}$$

5.2. Jetzt schreiben wir bei allen H-Sequenzen, welche leeres Sukzedens haben, die Formel $A \& \neg A$ ins Sukzedens.

Dabei bleiben die Grundsequenzen der Form $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, sowie $\mathfrak{Gf}1$ bis $\mathfrak{Gf}6$ und $\mathfrak{Gf}8$, ferner die Schlußfiguren UES, AES und FES unverändert. Die übrigen Grundsequenzen und Schlußfiguren gehen über in Grundsequenzen und Schlußfiguren nach folgenden Schemata:

$\mathfrak{Gf}9$: $\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{H}$

$\mathfrak{Sf}1$: $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{H}}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \mathfrak{H}}$ $\qquad$ $\mathfrak{Sf}2$: $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \mathfrak{H}}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \mathfrak{H}}$ $\qquad$ $\mathfrak{Sf}3$: $\dfrac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \to \mathfrak{H}}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \mathfrak{H}}$

$$\mathfrak{Sf}4: \frac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\Gamma \to \mathfrak{D}} \qquad \mathfrak{Sf}5: \frac{\Gamma \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \to \mathfrak{H}}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{H}}$$

$$\mathfrak{Sf}6: \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{H} \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \mathfrak{H}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \mathfrak{H}} \qquad \mathfrak{Sf}7: \frac{\mathfrak{F}a, \Gamma \to \mathfrak{H}}{\exists x \mathfrak{F}x, \Gamma \to \mathfrak{H}} \qquad \mathfrak{Sf}8: \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}}$$

(für $\mathfrak{Sf}7$ besteht die Variablenbedingung: Die mit a bezeichnete freie Gegenstandsvariable darf in der Untersequenz nicht vorkommen.)

5.3. Nunmehr läßt sich die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}4$ wie folgt durch andere ersetzen (dies liegt im wesentlichen an der allgemein gehaltenen Form des Schemas $\mathfrak{Sf}9$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\Gamma \to A}\,\mathfrak{Sf}1 \qquad \dfrac{A \,\&\, \neg A \to \neg A}{\Gamma \to \neg A}\,\mathfrak{Sf}2}{\Gamma \to \mathfrak{D}}\,\mathfrak{Sf}5 \qquad \dfrac{\neg A, A \to \mathfrak{D}}{\neg A, \Gamma \to \mathfrak{D}}\,\mathfrak{Sf}9}{\Gamma, \neg A \to \mathfrak{D}}\,\mathfrak{Sf}5 \qquad \dfrac{\Gamma, A \to \mathfrak{D}}{A, \Gamma \to \mathfrak{D}}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}3}{\Gamma, \Gamma \to \mathfrak{D}}\,\mathfrak{Sf}5$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma \to \mathfrak{D}}{\Gamma \to \mathfrak{D}}\ \text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}2 \text{ und } \mathfrak{Sf}3.$$

In ähnlicher Weise ersetzen wir die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}8$ (sooft sie in der Herleitung vorkommt), jedoch diesmal unter Benutzung einer neuen Schlußfigur nach dem Schema:

$$\mathfrak{Sf}9: \frac{\Gamma, \mathfrak{A} \to A \qquad \Gamma, \mathfrak{A} \to \neg A}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}}.$$

Die Ersetzung geschieht wie folgt (für $\mathfrak{Sf}8$ tritt):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\mathfrak{A}, \Gamma \to A}\,\mathfrak{Sf}1}{\Gamma, \mathfrak{A} \to A}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}3 \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \neg A}\,\mathfrak{Sf}2}{\Gamma, \mathfrak{A} \to \neg A}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}3}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}}\,\mathfrak{Sf}9.$$

5.4. Wir führen nun nochmals zwei neue Schlußfigurenschemata ein, nämlich:

$$\mathfrak{Sf}10: \frac{\Gamma, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \text{ und die Umkehrung: } \mathfrak{Sf}11: \frac{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\Gamma, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}.$$

Wir wollen Schlußfiguren dieser beiden Arten in die Herleitung hineinbringen, um mit ihrer Hilfe eine Reihe von anderen Schlußfiguren durch speziellere ersetzen zu können (unter 5.42 und 5.43).

5.41. Zunächst sind *FES*-Schlußfiguren jetzt mittels $\mathfrak{Sf}10$ ersetzbar: Eine *FES* wird umgewandelt zu:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}3}{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,\mathfrak{Sf}10.$$

5.42. Alsdann werden die Schlußfiguren Sf 1, Sf 2, Sf 3, Sf 5, Sf 6 und Sf 7 in folgender Weise umgewandelt:

Als Beispiel nehmen wir eine Sf 2, diese verwandeln wir in folgende Figur (es sei Γ gleich $\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_\varrho$):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_\varrho \to \mathfrak{H}}{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_{\varrho-1} \to \mathfrak{I}_\varrho \supset \mathfrak{H}}\,\text{Sf 10}}{\mathfrak{D}, \mathfrak{D} \to \mathfrak{I}_1 \supset (\mathfrak{I}_2 \supset \ldots (\mathfrak{I}_\varrho \supset \mathfrak{H}).)}\,\text{mehrmals Sf 10}}{\mathfrak{D} \to \mathfrak{I}_1 \supset (\mathfrak{I}_2 \supset \ldots (\mathfrak{I}_\varrho \supset \mathfrak{H}).)}\,\text{Sf 13}}{\mathfrak{D}, \mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_\varrho \to \mathfrak{H}}\,\text{mehrmals Sf 11.}$$

Ganz entsprechend verfahren wir mit allen genannten Schlußfiguren; wir ersetzen sie also unter Benutzung von Sf 10 und Sf 11 durch Schlußfiguren nach den Schemata:

$$\text{Sf 12:}\ \frac{\to \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \to \mathfrak{C}} \qquad \text{Sf 13:}\ \frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \to \mathfrak{C}} \qquad \text{Sf 14:}\ \frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \to \mathfrak{C}}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}}$$

$$\text{Sf 15:}\ \frac{\Gamma \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}}{\Gamma \to \mathfrak{C}} \qquad \text{Sf 16:}\ \frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C} \qquad \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}} \qquad \text{Sf 17:}\ \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \mathfrak{C}}{\exists x \mathfrak{F} x \to \mathfrak{C}}$$

(für Sf 17 besteht die Variablenbedingung: Die mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete freie Gegenstandsvariable darf in der Untersequenz nicht vorkommen.)

5.43. In ähnlicher Weise ersetzen wir weiterhin unter Benutzung von Sf 10 und Sf 11 die Schlußfiguren Sf 9, Sf 13 und Sf 14 durch die folgenden:

$$\text{Sf 18:}\ \frac{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset A \qquad \Gamma \to \mathfrak{A} \supset \neg A}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}} \qquad \text{Sf 19:}\ \frac{\to \mathfrak{D} \supset (\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C})}{\to \mathfrak{D} \supset \mathfrak{C}}$$

$$\text{Sf 20:}\ \frac{\Delta \to \mathfrak{D} \supset (\mathfrak{E} \supset \mathfrak{C})}{\Delta \to \mathfrak{E} \supset (\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C})}.$$

In derselben Weise lassen sich die Grundsequenzen Gf 8 und Gf 9 ersetzen durch:

$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, diese Form fällt unter das Schema $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$; sowie Gf 10: $\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{H}$.

5.5. Nun kommt der letzte Schritt:

Wir ersetzen jede H-Sequenz

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}$$

durch die Formel $\qquad (\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}.$

(Sind die $\mathfrak{A}$ leer, so ist $\mathfrak{B}$ gemeint. Ein leeres Sukzedens kommt nach 5.2 nicht mehr vor.)

Dadurch werden sämtliche Grundsequenzen (nämlich $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, Gf 1 bis Gf 6, Gf 10) zu LHJ-Grundsequenzen.

Von den Schlußfiguren werden AES und Sf 17 ebenfalls zu LHJ-Schlußfiguren. (Bei ersterer macht allerdings der Fall, daß Γ leer ist,

eine Ausnahme. In diesem Falle leitet man (im Kalkül LHJ) aus $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ zunächst mittels 2.12 $(A \supset A) \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ her, wendet nunmehr die LHJ-Schlußfigur an und erhält dann mittels 2.11 schließlich wieder $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.)

Die aus den übrigen Schlußfiguren (das sind noch UES, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10, 11, 12, 15, 16, 18, 19, 20) durch die Ersetzung entstehenden Figuren werden in folgender Weise in Teile einer LHJ-Herleitung übergeführt:

Eine UES wurde zu (sei zunächst Γ nicht leer):

$$\frac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})}$$

Wir machen daraus:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \qquad (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset \big((\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}))\big)}{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}))}\,(2.23) \qquad \mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})}.$$

Ist Γ leer, so verfahren wir wie zuvor bei der AES.

Die aus $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 12, 15, 16 und 19 durch die Ersetzung entstandenen Figuren lassen sich ganz entsprechend unter Verwendung von Grundformeln nach den Schemata 2.12, 2.15, 2.33 und 2.13 behandeln.

In ähnlicher Weise erledigt man $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 18 und $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 20 mittels 2.41 und 2.14 mit Hinzunahme von 2.15 und 2.14, 2.13.

Nun bleiben noch die aus $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10 und $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 11 entstandenen Figuren. Beide sind trivial für leeres Γ, sei also im folgenden Γ nicht leer. Alsdann verwandeln wir diese Figuren so in LHJ-Herleitungsteile:

($\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10): Aus $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$ haben wir $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ herzuleiten. Nun ergibt 2.23 mit 2.11: $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}))$. Dies mit $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$ und 2.15, 2.14 ergibt $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$, aus dieser Formel und 2.12, 2.15 ergibt sich $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$, mit 2.14 also $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

($\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 11): Aus $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ leiten wir $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$ im Kalkül LHJ wie folgt her: 2.21 und 2.22 ergeben $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{A}$, daraus zusammen mit $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ erhält man (mit Hilfe von 2.15, 2.14, 2.15, 2.13) $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$.

Damit ist die Umwandlung der LJ-Herleitung in eine LHJ-Herleitung vollzogen. Beide sind ferner auch wirklich äquivalent, denn die Endsequenz der LJ-Herleitung ist nur von den Umwandlungen 5.2 und 5.5 betroffen worden und dabei offenbar in eine mit ihr (gemäß 1.1) äquivalente Formel übergegangen.

Nimmt man die Ergebnisse von § 3 bis 5 zusammen, so ist nunmehr die Äquivalenz der drei Kalküle LHJ, NJ und LJ voll bewiesen.

§ 6.

Die Äquivalenz der Kalküle LHK, NK und LK.

Nachdem die Äquivalenz der zugehörigen intuitionistischen Kalküle bewiesen ist, läßt sich die der klassischen ziemlich leicht folgern.

6.1. Um eine LHK-Herleitung in eine äquivalente NK-Herleitung umzuwandeln, verfährt man genau wie in § 3. Die hinzukommenden Grundformeln nach dem Schema $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ bleiben unverändert und sind dann gleich Grundformeln der NK-Herleitung.

6.2. Um eine NK-Herleitung in eine äquivalente LK-Herleitung umzuwandeln, verfährt man zunächst wie in § 4. Die hinzukommenden Grundformeln nach dem Schema $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ gehen dabei in Sequenzen der Form $\rightarrow \mathfrak{A}^* \vee \neg \mathfrak{A}^*$ über. Diese ersetzt man dann durch ihre LK-Herleitungen (gemäß III, 1.4). Damit ist die Umwandlung der NK-Herleitung in eine äquivalente LK-Herleitung vollzogen.

6.3. Umwandlung einer LK-Herleitung in eine LHK-Herleitung.

Wir führen einen Hilfskalkül ein, der sich von dem Kalkül LK in folgender Weise unterscheidet:

Die Schlußfiguren dürfen nach den Schemata III, 1.21, 1.22 gebildet werden, jedoch mit folgenden Einschränkungen: Zusammenziehung und Vertauschung im Sukzedens sind überhaupt nicht zulässig; bei den übrigen Schemata darf für Θ und Λ nichts eingesetzt werden, diese Stellen bleiben also leer.

Ferner kommen folgende zwei Schemata für Schlußfiguren hinzu (Einsetzungsvorschrift wie üblich, III, 1.2):

$\mathfrak{Sf}$ 1: $\dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}, \Theta}{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta}$ und die Umkehrung: $\mathfrak{Sf}$ 2: $\dfrac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}, \Theta}$.

(Hierin braucht also Θ nicht leer zu sein.)

6.31. Umwandlung einer LK-Herleitung in eine Herleitung des Hilfskalküls:

(Das Verfahren ist ähnlich wie unter 5.4.)

Sämtliche Schlußfiguren außer Zusammenziehungen und Vertauschungen im Sukzedens werden nach folgender Vorschrift umgewandelt: Man läßt auf die Obersequenzen Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ 1 folgen, solange bis man alle Formeln von Θ bzw. Λ negiert ins Antezedens (rechts neben Γ bzw. Δ) gebracht hat. Dann folgt eine Schlußfigur derselben Art wie die umzuwandelnde, und zwar ist dies nun eine im Hilfskalkül erlaubte Schlußfigur. (Man rechnet die ins Antezedens gebrachten Formeln zu Γ bzw. Δ.) Alsdann läßt man Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ 2 folgen und bringt hierdurch Θ und Λ wieder ins Sukzedens zurück. (Bei FEA und Schnitt muß man u. U.

zuvor Vertauschungen im Antezedens vornehmen, diese sind aber ebenfalls erlaubte Schlußfiguren des Hilfskalküls.)

Nun bleiben noch die Zusammenziehungen — bzw. Vertauschungen — im Sukzedens zu erledigen. Bei einer solchen bringt man auf dieselbe Weise zunächst das ganze Sukzedens negiert ins Antezedens, läßt dann Vertauschungen, eine Zusammenziehung, und wieder Vertauschungen — bzw. eine Vertauschung — im Antezedens folgen, und bringt danach die negierten Formeln wieder (durch Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ 2) ins Sukzedens zurück.

6.32. Umwandlung einer Herleitung des Hilfskalküls in eine Herleitung des Kalküls LJ mit Hinzunahme des Grundsequenzschemas $\rightarrow \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$:

Man ändert zunächst alle H-Sequenzen so ab:

Aus $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$

wird $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1$. Ist das Sukzedens leer, so bleibt es leer.

Nunmehr sind bereits alle Grundsequenzen bzw. Schlußfiguren des Hilfskalküls mit Ausnahme der Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ 1 und $\mathfrak{Sf}$ 2 in Grundsequenzen bzw. Schlußfiguren des Kalküls LJ übergegangen. Denn jene Schlußfiguren entstanden aus den Schemata III, 1.21, 1.22 (mit Ausnahme der Schemata für Zusammenziehung und Vertauschung im Sukzedens), indem Θ und Λ stets leer blieben. Daher konnte höchstens eine Formel im Sukzedens stehen.

Wir haben also noch die aus den Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ 1 und $\mathfrak{Sf}$ 2 durch obige Abänderung entstandenen Figuren umzuwandeln.

6.321. Zunächst $\mathfrak{Sf}$ 1: Ist Θ leer, so ersetzt man die Schlußfigur durch eine NEA mit anschließenden Vertauschungen im Antezedens. Sei nun Θ nicht leer. Θ^* bezeichne die zu Θ gehörigen Formeln in umgekehrter Reihenfolge und durch $\vee$ verbunden.

Dann lautet die Schlußfigur nach der Abänderung der Sukzedentia:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta^* \vee \mathfrak{A}}{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}.$$

Diese wird in folgenden LJ-Herleitungsteil umgewandelt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}}}{\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow}\,NEA}{\mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \rightarrow}\,\text{Vertauschung}}{\mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}\,\text{Verdünnung}}{\Theta^* \vee \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}\,OEA \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Theta^* \rightarrow \Theta^*}}{\neg \mathfrak{A}, \Theta^* \rightarrow \Theta^*}\,\text{Verdünnung}}{\Theta^*, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}\,\text{Vertauschung}}{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}\,\text{Schnitt}.$$

6. 3 2 2. Eine Schlußfigur $\mathfrak{Sf}\,2$ lautet nach der Abänderung der Sukzedentia:

$$\frac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \to \Theta^*}{\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}.$$

Θ^* habe dieselbe Bedeutung wie im vorigen Fall. Wenn Θ leer ist, sei Θ^* leer und $\Theta^* \vee \mathfrak{A}$ bedeute $\mathfrak{A}$.

Wir wandeln sie in folgenden Herleitungsteil um:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{A}}\ \text{evtl. mehrmalige Verdünnung und Vertauschung}}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\,OES \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \to \Theta^*}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta^*}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung}}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\,OES}{\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A} \qquad\qquad \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\,OEA$$
$$\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}\ \text{Schnitt.}$$

Man sieht leicht ein, daß auch bei leerem Θ alles in Ordnung ist.

6. 3 3. Die nunmehr erhaltene LJ-Herleitung mit den hinzukommenden Grundsequenzen der Form $\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ läßt sich wie in § 5 in eine LHJ-Herleitung mit hinzukommenden Grundformeln der Form $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ (s. 5. 5), d. h. in eine LHK-Herleitung umwandeln. Damit ist die Umwandlung der LK-Herleitung in eine LHK-Herleitung vollzogen. Die Endsequenz ist dabei gemäß 6. 3 2, 5. 2 und 5. 5 in eine (nach 1. 1) äquivalente Formel übergegangen.

Nimmt man die Ergebnisse von 6. 1, 6. 2 und 6. 3 zusammen, so ist nunmehr auch die Äquivalenz der drei klassischen Prädikatenlogik-Kalküle LHK, NK und LK bewiesen.

(Eingegangen am 21. Juli 1933.)

Upper and lower integrals.

By

Margaret D. Kennedy and S. Pollard [1]) in Cambridge (England).

Chapter I.

Preliminary remarks and definitions.

1. The function $f(x)$ whose upper and lower integrals are considered is taken to be an arbitrary single-valued real function defined at every point of a given interval (a, b). To shorten the discussion the interval is supposed finite. The definition of the upper and lower integrals is by means of pencils of auxiliary functions such as are used in the definition of the Perron integral.

As is well known, an integral of this type is the common value of the lower boundary of a class of upper functions and the upper boundary of a class of lower functions. In general, if the classes are widened to admit auxiliary functions of less restricted properties the class of functions which it is possible to integrate is also widened. The class of functions which may be obtained as integrals is also widened. In this paper a Perron-type process of integration is described leading to a preponderantly continuous integral [2]). The lower and upper functions used in its construction are preponderantly continuous and have a property closely related to Denjoy's 'resolvability' which is here described as 'nearly absolute continuity on one side'. This property is defined below (Chap. II). The following table indicates the relation in which the preponderantly continuous integral stands to the integrals associated with the names of Denjoy, Khintchine, Perron and Lebesgue, all these integrals being readily obtained by successive restrictions on the classes of auxiliary functions.

---

[1]) Author's Note: The investigation contained in this paper was begun by Mr. Pollard and myself some three years ago. Unfortunately he was not able to continue his collaboration for long. In writing the paper in its present form I have been conscious that many of the ideas used were contributed by Mr. Pollard, and I feel that his share in the work is fitly represented as that of joint authorship.

[2]) In the course of proof-correction attention has kindly been drawn by Professor Perron to an extended integral definition due to S. Izumi (6). This definition leads to a preponderantly continuous integral, but differs in essential respects from the definition of the first type integral given in this paper.

Type	Auxiliary functions are	
1	Preponderantly continuous; nearly absolutely continuous on one side	
2	Continuous; nearly absolutely continuous on one side	Denjoy integral
3	Continuous; nearly absolutely continuous on one side; differentiable almost everywhere	Denjoy-Khintchine integral
4	Continuous; nearly absolutely continuous on one side; of nearly bounded oscillation	Perron-Denjoy integral
5	Continuous; absolutely continuous on one side	Lebesgue integral

A function which has an integral of any of these types is necessarily measurable. It may happen that a non-integrable function has upper and lower auxiliary functions of some type. The boundaries of the classes of upper and lower functions are its *upper and lower integrals* of this type. Throughout this paper the integrals are treated primarily as upper and lower integrals, that is, the properties of the boundaries are investigated without the assumption that they coincide. It is found that upper and lower integrals of any one of the types are respectively members of the classes of upper and lower auxiliary functions.

2. Differential coefficients of two kinds are used: the ordinary differential coefficient of $F(x)$, denoted by $F'(x)$, and the approximate differential coefficient: $F^*(x)$.

The integrals which will be defined are designed to be solutions of the fundamental equivalences

(1 a) and (1 b) $\qquad F'(x) \sim f(x), \qquad F^*(x) \sim f(x),$

which are to be read as meaning respectively that the ordinary or approximate differential coefficient of $F(x)$ exists and coincides with $f(x)$ at the points of some sub-set of (a, b) having the same measure as (a, b).

Since upper and lower integrals are to be considered, it is convenient to replace (1 a) and (1 b) by corresponding pairs of inequalities

(2) $\qquad F'(x) \gtrsim f(x), \qquad F'(x) \lesssim f(x),$

(3) $\qquad F^*(x) \gtrsim f(x), \qquad F^*(x) \lesssim f(x),$

where $\gtrsim$ means that $\geqq$ holds almost everywhere in the range (a, b), and a corresponding interpretation is given to $\lesssim$.

3. In connection with differences of upper and lower functions it is important to know conditions in which a function which has a non-negative ordinary or approximate differential coefficient almost everywhere in an interval increases in that interval. The treatment of this question

which will be used here depends upon the following definitions and results [3]).

A closed sub-set Q of (a, b) with complementary intervals

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$

is said to be a *negative characteristic set* of $F(x)$ if

$$\frac{F(b_1) - F(a_1)}{b_1 - a_1} = \frac{F(b_2) - F(a_2)}{b_2 - a_2} = \ldots = \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = \ldots$$

and, the common value of these ratios being k,

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} < k$$

whenever α and β are points of Q which are not end-points of the same complementary interval.

It is easily verified that, if $F(x)$ is continuous, every such set is perfect, except that it may have isolated extreme points.

The continuous function $F(x)$ is said to be *determinate below* if it has no negative characteristic set of measure zero.

Denote by $DF(x)$ any limit of the difference quotient

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

as $h \to 0$ taking values of unrestricted sign. The numbers $DF(x)$ are all regular derivatives of $F(x)$ at x. If

$$DF(x) \gtrsim 0 \tag{1}$$

in (a, b) and $F(x)$, supposed continuous, is determinate below, it is shown in the paper mentioned above (Footnote 3) that $F(x)$ increases. The inequality (1) need only be satisfied by one of the derivatives of $F(x)$ at each point of a set of measure $b - a$. The term increases', it should be understood, is used in the loose sense throughout, the inequality implied being $\leqq$. The term 'decreases' is used in the same way.

4. A function $F(x)$ is *feebly continuous on the right* at the point x if $F(x)$ is a limit of $F(x+h)$ as $h \to 0$ taking only positive values. The function $F(x)$ is *feebly continuous on the left* at the point x if $F(x)$ is a limit of $F(x+h)$ as $h \to 0$ taking only negative values. It is *feebly continuous* in the interval (a, b) if it is feebly continuous on the right at a, on the left at b, and on both sides at every interior point of the interval.

A function is *preponderantly continuous on the right* at x if it is continuous on the right at x when only those values of the function are considered which correspond to the points of a closed set having x as

[3]) Kennedy, 7.

left-hand extreme point and such that, if $m(h)$ is the measure of the portion of the set contained in $(x, x+h)$, $h > 0$, then

$$\lim_{h \to 0} \frac{m(h)}{h} > \tfrac{1}{2}.$$

A corresponding property characterises functions which are *preponderantly continuous on the left.* The function $F(x)$ is *preponderantly continuous* in the interval (a, b) if it is preponderantly continuous on the right at a, on the left at b, and on both sides at every interior point of the interval.

It is easy to see that, if $F_1(x)$ and $F_2(x)$ are both preponderantly continuous in (a, b), then their sum is feebly continuous in (a, b).

A feebly continuous function of bounded variation is continuous. For, if $F(x)$ is of bounded variation and is discontinuous at the point ξ, then $F(x)$ has definite limits as x tends to ξ from the right and from the left, and at least one of these limits differs from $F(x)$. Thus $F(x)$ is not feebly continuous at the point ξ. In particular, if $F(x)$ is known to be feebly continuous and monotonic it is continuous.

Chapter II.

Nearly absolutely continuous functions.

5 [4]). Let $F(x)$ be a finite function defined on the closed set Q. Consider finite systems I of non-overlapping intervals

(1) $$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k),$$

the end-points of which are points of Q. Such systems are said to be *restricted to* Q. Define the functions of systems $\pi(F, I)$, $\nu(F, I)$, $\sigma(F, I)$, $\tau(F, I)$ by the relations

$$\pi(F, I) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \{|F(b_n) - F(a_n)| + (F(b_n) - F(a_n))\},$$

$$\nu(F, I) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \{|F(b_n) - F(a_n)| - (F(b_n) - F(a_n))\},$$

$$\sigma(F, I) = \pi(F, I) - \nu(F, I),$$

$$\tau(F, I) = \pi(F, I) + \nu(F, I).$$

Where no doubt can arise as to the function concerned $\pi(I)$ will be written for $\pi(F, I)$, and so on.

The function $F(x)$ is *absolutely continuous above* in Q if

(2) $$\lim_{m I \to 0} \pi I = 0,$$

---

[4]) See Ridder, 11; Saks, 13; Kennedy, 8.

and it is *absolutely continuous below* in Q if

$$\lim_{mI \to 0} \nu I = 0. \tag{3}$$

The measure of the system I is taken to be the sum of the lengths of its intervals (1).

If Q is an interval, then a function which is absolutely continuous above and below in Q is absolutely continuous according to the classical definition.

If $F(x)$ is absolutely continuous on one side in Q, then $-F(x)$ is absolutely continuous on the other side in Q.

The sum of a finite number of functions all absolutely continuous on one side in Q, or a linear combination of such functions with positive coefficients, is absolutely continuous on the same side in Q.

A function may be absolutely continuous on one side in Q without being continuous on Q.

6. The fact that πI is a function of systems of intervals which increases by sub-division of the intervals leads at once to the following propositions, of which the proofs will be left to the reader:

A function absolutely continuous on one side in an interval is of bounded variation in that interval. As a corollary from this it appears by § 4 that a function which is absolutely continuous on one side and at the same time feebly continuous in the closed interval (a, b) is continuous in this interval.

If $F(x)$ is absolutely continuous on one side in a closed set Q and if $\overline{F}(x)$ is the function which coincides with $F(x)$ on Q and is linear in the complementary intervals of Q, then $\overline{F}(x)$ is absolutely continuous on that side in the interval between the extreme points of Q.

It is seen at once that a function absolutely continuous above or below in an interval, in particular the function $\overline{F}(x)$ just mentioned, has an ordinary differential coefficient almost everywhere. It follows that if $F(x)$ is absolutely continuous above or below in a closed set Q it has an approximate differential coefficient at almost all points of Q.

7. Consider again the complementary intervals $(a_1, b_1), (a_2, b_2,) \ldots, (a_n, b_n), \ldots$ of a closed set Q. Let ω_n be the oscillation of $F(x)$ in the closed interval (a_n, b_n). If

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n < \infty$$

then $F(x)$ has *bounded oscillation about* Q [5]).

---

[5]) This definition is due to Denjoy. He calls the property '*variation finie autour de Q*'. See 4, p. 157.

Define the function $\overline{F}(x)$ as in § 6, and let

$$G(x) = F(x) - \overline{F}(x).$$

Then $G(x)$ is zero on Q and its oscillation in (a_n, b_n) cannot exceed $\omega_n + |\overline{F}(b_n) - \overline{F}(a_n)|$. If $F(x)$ is absolutely continuous on one side in Q, then $\overline{F}(x)$ is of bounded variation and

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{F}(b_n) - \overline{F}(a_n)| < \infty.$$

It follows that $G(x)$ is of bounded oscillation. Denjoy has shown[6]) that a function $G(x)$ with these properties satisfies

$$G'(x) \sim 0$$

on Q. Since $F(x)$ is the sum of the function $G(x)$ and a function whose variation between the extreme points of Q is bounded, $F(x)$ has an ordinary differential coefficient almost everywhere in Q.

8. A function $F(x)$ is *nearly absolutely continuous on one side* in a given closed set Q if every closed sub-set of Q contains a portion in which $F(x)$ is absolutely continuous on that side.

The word 'portion' means the common part of Q and some closed interval (α, β) having at least one point of Q in its interior.

A function $F(x)$, nearly absolutely continuous on one side in a closed set Q, has an approximate differential coefficient at almost all points of Q. For suppose that this is not the case. It may clearly be assumed that Q is of positive measure. The upper and lower approximate derivatives are measurable functions[7]) and they differ at the points of a sub-set E of Q of positive measure. The set E contains a perfect set P each portion of which is of positive measure. Reference to the definition, and to § 6, shows that $F^*(x)$ exists at almost all points of a portion of P; that is, there are points of E at which $F^*(x)$ exists. The definition of E is thus contradicted and the result follows.

9. The function $F(x)$ has *nearly bounded oscillation* in the closed set Q, if every closed sub-set of Q contains a portion about which the oscillation of $F(x)$ is bounded.

A function which is nearly absolutely continuous on one side in Q and is of nearly bounded oscillation in Q has an ordinary differential coefficient at almost all points of Q. For every closed sub-set contains a portion in which the function is absolutely continuous on one side and

---

[6]) 3, p. 138. Denjoy proves the theorem for perfect sets of which no portion is of measure zero. The extension to closed sets is a simple deduction from his result.

[7]) Burkill and Haslam-Jones, 2.

this again contains a portion about which the function is of bounded oscillation. On this latter portion the function has a differential coefficient almost everywhere. The argument of § 8 can easily be modified to give the result.

10. The definition of functions nearly absolutely continuous on one side is equivalent, for continuous functions, to that given by Ridder [8]) of the functions which he describes as 'absolutely continuous above or below in the generalised sense'. Ridder mentions that the class of continuous functions absolutely continuous above and below in the generalised sense is the same as the class of continuous *fonctions résolubles* of Denjoy [9]). Thus the class of continuous functions nearly absolutely continuous above and below is the same as the class of continuous *fonctions résolubles*. This is also clear directly, for Denjoy's results show that a continuous *fonction résoluble* is a continuous function such that every perfect set contains a portion in which the function is absolutely continuous, and that the converse is true.

11. It is easy to see that if $F(x)$ is nearly absolutely continuous on one side in Q, then $-F(x)$ is nearly absolutely continuous on the other side in Q. Further, if two functions are nearly absolutely continuous on the same side in Q, then their sum is nearly absolutely continuous on that side. In particular, if $\varphi(x)$ is nearly absolutely continuous above and $\psi(x)$ nearly absolutely continuous below in Q, then $\psi(x) - \varphi(x)$ is nearly absolutely continuous below.

12. If Q is a closed set with extreme points α and β, and if $F(x)$ is nearly absolutely continuous above in Q, then the function $\overline{F}(x)$, which is equal to $F(x)$ at points of Q and linear in the complementary intervals of Q, is nearly absolutely continuous above in (α, β).

Suppose that there is a perfect set P in (α, β) such that $\overline{F}(x)$ is not absolutely continuous above in any portion of P. It is clear that P is a sub-set of Q. Now $F(x)$ is absolutely continuous above in some portion of P. Since $F(x)$ and $\overline{F}(x)$ coincide on Q the assumed property of P is contradicted and the result follows.

The reader will observe that the set P is taken to be perfect because a closed set which is not perfect has portions consisting of isolated points; in such portions any function is absolutely continuous.

13. If $F(x)$ is continuous and nearly absolutely continuous below in an interval (a, b), and if

$$F^*(x) \gtrsim 0, \tag{1}$$

then $F(x)$ is an increasing function in (a, b).

[8]) Ridder, 11.

[9]) Denjoy, 4; see pp. 173, 175.

It will be shown that $F(x)$ is determinate below. The result then follows, as explained in § 3.

Suppose that (a, b) contains a negative characteristic set of $F(x)$, of index k and measure zero. In a portion of the characteristic set $F(x)$ is absolutely continuous below. Let this portion have extreme points α and β and let I_n be the system consisting of the first n complementary intervals of the portion, J_n its complement with respect to (α, β). Then

$$\begin{aligned} \sigma J_n &= F(\beta) - F(\alpha) - \sigma I_n \\ &= l(\beta - \alpha) - k \cdot m I_n, \end{aligned}$$

where, by § 3, $l < k$. Thus σJ_n can be made arbitrarily near to $(l - k)(\beta - \alpha)$ by taking n sufficiently large, and it follows that

$$\lim_{n \to \infty} \sigma J_n < 0,$$

or

$$\lim_{m J \to 0} \sigma J < 0,$$

where J is any system restricted to the portion in question. The hypothesis that $F(x)$ is absolutely continuous below in the portion is contradicted. Thus $F(x)$ is determinate below.

If $F(x)$ is feebly continuous and absolutely continuous below in (a, b), and (1) holds, then $F(x)$ increases in (a, b). For $F(x)$ is continuous, by § 4, and the result just proved shows that it increases.

14. If $F(x)$ is feebly continuous in the closed interval (a, b) and if $F(\beta) \geqq F(\alpha)$ whenever $a < \alpha < \beta < b$, then $F(x)$ increases throughout the closed interval (a, b).

Suppose, if possible, that $F(b) < F(\alpha)$ where α is some point which satisfies $a < \alpha < b$. It is clear that, for $\alpha < x < b$, $F(x)$ is an increasing function. Thus $F(x) \to l$ as $x \to b$, x remaining within (a, b). For every point x such that $a < \alpha < x < b$

$$F(x) \geqq F(\alpha) > F(b).$$

Thus $l > F(b)$. This contradicts the hypothesis of feeble continuity at b, and it follows that, if $a < \alpha < b$, $F(b) \geqq F(\alpha)$. In the same way it is seen that $F(\alpha) \geqq F(a)$, so that $F(x)$ increases throughout the closed interval (a, b).

It is further clear that if $F(x)$ increases in all intervals $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$, where $a < \alpha < \beta < c < \gamma < \delta < b$, and is feebly continuous throughout (a, b), then $F(x)$ increases throughout (a, b).

15. If $F(x)$ is feebly continuous and nearly absolutely continuous below in (a, b), and if

$$F^*(x) \gtrsim 0,$$

then $F(x)$ increases throughout (a, b).

The whole interval (a, b) is a closed set. By the definition of nearly absolute continuity below, there are sub-intervals of (a, b) in which $F(x)$ is absolutely continuous below. Consider the open set consisting of points ξ of (a, b) which have neighbourhoods in which $F(x)$ is absolutely continuous below. Let its closed complement with respect to (a, b) be called E_1. Then, by the definition of nearly absolute continuity below, E_1 is non-dense.

Take any interval (α, β) lying within a complementary interval of E_1. The closed interval (α, β) can be covered by a finite number of intervals in each of which $F(x)$ is absolutely continuous below. Hence $F(x)$ is absolutely continuous below in closed (α, β). By § 13, $F(x)$ increases throughout (α, β); § 14 then shows that $F(x)$ increases throughout each complementary interval of E_1, these intervals being taken closed.

Consider the set of points ξ of E_1 such that each point ξ is in the interior of an interval which defines a portion of E_1 in which $F(x)$ is absolutely continuous below. Let the complement of this set with respect to E_1 be called E_2. The definition of nearly absolute continuity below shows that E_2 is non-dense on E_1. It is obviously closed. Let (α, β) be an interval strictly interior to a complementary interval of E_2. The portion of E_1 defined by (α, β) can be covered by a finite set of intervals each defining a portion of E_1 in which $F(x)$ is absolutely continuous below. Hence $F(x)$ is absolutely continuous below in the portion of E_1 defined by (α, β). Since $F(x)$ increases in each closed complementary interval of this portion, it is absolutely continuous below and therefore increases throughout (α, β). By § 14, $F(x)$ increases throughout each complementary interval of E_2, taken closed.

Repetition of the above procedure leads to closed sets

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \ldots,$$

where E_n is non-dense on E_{n-1}. If E_n is null for some positive integral value of n, there is no more to be proved; for $F(x)$ is then absolutely continuous below in E_{n-1} and an argument already employed shows that $F(x)$ increases throughout (a, b). If, on the other hand,

$$E_\Omega = E_1 E_2 \ldots E_n \ldots$$

exists, it is a closed set, non-dense on each preceding set E_n. Let (α, β) be an interval strictly interior to a complementary interval of E_Ω. For sufficiently large n, the closed interval (α, β) contains no points of E_n. It follows that $F(x)$ increases in (α, β) and hence it increases throughout every complementary interval of E_Ω.

It is clear that the successive construction of closed sets E_β each non-dense on all preceding sets, and each such that $F(x)$ increases in the

complementary intervals, taken closed, can only be arrested by the vanishing of the set E_β, where β is the ordinal number of some countable set. It is known, from the properties of sequences of closed sets, that E_β is null for some index β. Thus there is a set $E_{\beta'}$, $(\beta' < \beta)$, in which $F(x)$ is absolutely continuous below, and such that $F(x)$ increases throughout its complementary intervals. It follows that $F(x)$ increases throughout (a, b).

It is worth notice that, in the conditions of the theorem, $F(x)$ is continuous; for an increasing feebly continuous function is continuous.

16. If $F(x)$ is continuous and of bounded variation in the closed interval (a, b) and is absolutely continuous above in every interval (α, β) such that $a < \alpha < \beta < b$, then $F(x)$ is absolutely continuous above in the closed interval (a, b).

Since $F(x)$ is of bounded variation, it can be written in the form

$$F(x) = p(x) - n(x) + F(a)$$

where $p(x)$ and $n(x)$ are continuous increasing functions and $p(a) = n(a) = 0$. It is easy to see that a necessary and sufficient condition that a function $F(x)$ of bounded variation should be absolutely continuous above in an interval is that $p(x)$ should be absolutely continuous above in the same interval. It may therefore be assumed that $p(x)$ is absolutely continuous above in any interval strictly interior to (a, b). It will be proved that $p(x)$ is absolutely continuous above in closed (a, b); from this it follows that $F(x)$ is absolutely continuous above in the same interval.

Let $\varepsilon > 0$ be given. Since $p(x)$ is continuous and increases in (a, b), there is a number $\eta > 0$ such that, for any system J_1 restricted to the intervals $(a, a + \eta)$ and $(b - \eta, b)$,

$$\pi(p, J_1) < \varepsilon/2.$$

In $(a + \eta, b - \eta)$, $p(x)$ is absolutely continuous above; thus, for systems J_2 of sufficiently small measure restricted to this interval

$$\pi(p, J_2) < \varepsilon/2.$$

Now any system J restricted to (a, b) can be divided into two such systems J_1 and J_2 by the insertion of at most two new points of subdivision, $a + \eta$ and $b - \eta$. If mJ is sufficiently small

$$\pi(p, J) = \pi(p, J_1) + \pi(p, J_2) < \varepsilon,$$

so that $p(x)$ is absolutely continuous above in the whole interval (a, b).

17. If $F(x)$ is absolutely continuous above in a closed set E whose extreme points are α and β, and if it is absolutely continuous above in each complementary interval of E, taken closed, and of bounded variation in (α, β), then $F(x)$ is absolutely continuous above in the closed interval (α, β).

Again consider the positive variation $p(x)$ of $F(x)$. Let the complementary intervals of E with respect to (α, β) be

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots. \tag{1}$$

Then the series $\sum_{r=1}^{\infty} (p(b_r) - p(a_r))$ is convergent. Let $\varepsilon > 0$ be given. Fix n such that

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} (p(b_r) - p(a_r)) < \varepsilon.$$

Then

$$\pi(F, I) < \varepsilon \tag{2}$$

whenever I is a non-overlapping system each of whose intervals is a sub-interval of one of the intervals $(a_{n+1}, b_{n+1}), \ldots$. Consider any non-overlapping system J restricted to (α, β). By the insertion of a finite number of fresh points of subdivision, J can be divided into a system J_1 restricted to the first n complementary intervals, a system J_2 restricted to the rest of the intervals (1) and a system J_3 restricted to E. Then

$$\pi(F, J) \leqq \pi(F, J_1) + \pi(F, J_2) + \pi(F, J_3).$$

The first and last terms on the right are arbitrarily small if the measure of J is sufficiently small. This, with (2), shows that $F(x)$ is absolutely continuous above in (α, β).

18. A continuous function, if it is also of bounded variation and nearly absolutely continuous above in an interval, is absolutely continuous above in that interval.

The proof of this theorem is a repetition, *mutatis mutandis*, of the argument of § 15; the results of § 16 and § 17 take the place of those of § 14 and § 13. The actual construction of the proof may be left to the reader.

The above theorem remains true if the word 'continuous' in the enunciation is replaced by 'feebly continuous'.

19. If $F(x)$ is nearly absolutely continuous above in (a, b), and if E is any closed set in (a, b) and $\overline{F}(x)$ the function equal to $F(x)$ on E and linear in the complementary intervals of E, then $\overline{F}(x)$ is nearly absolutely continuous above in (a, b).

Suppose that there is a set E_1 in no portion of which $\overline{F}(x)$ is absolutely continuous above. Then E_1 is a sub-set of E. For, if any complementary interval of E defines a portion of E_1, then $\overline{F}(x)$, which is linear in that interval, is absolutely continuous above in that portion of E_1. Hence $F(x)$ and $\overline{F}(x)$ coincide on E_1. But $F(x)$, being nearly absolutely continuous above in (a, b), is absolutely continuous above in some portion of E_1.

Chapter III.

Pencils of functions.

20. Consider pencils of functions which, taking the same value at a, are single-valued in (a, b), regarded as closed. In view of the applications which follow the value at a will be taken to be zero.

From any two functions $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ of the pencil a composite function can be formed. Take any point c of (a, b) and make the new function coincide with $\varphi_1(x)$ in (a, c) and with $\varphi_2(x) + \varphi_1(c) - \varphi_2(c)$ in (c, b). If the two functions $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ are preponderantly continuous, then the new function is preponderantly continuous, and a similar remark may be made in the case where the functions are continuous. When a pencil already contains all the functions of this kind which can be formed from pairs of its members it is said to be *complete*. The process of defining the new function which is equal to $\varphi_1(x)$ in (a, c) and differs by a constant from $\varphi_2(x)$ in (c, b), taking the value $\varphi_1(c)$ at c, is described as *continuing* $\varphi_1(x)$ in the interval (c, b) *parallel* to $\varphi_2(x)$.

A pencil of functions is said to be *bounded above* if there is a finite function which is nowhere exceeded by any function of the pencil. If the pencil of functions $\varphi(x)$ is bounded above its *upper boundary* $\Phi(x)$ is the function which is, for each x in (a, b), the upper bound of the set of numbers $\varphi(x)$. In the case of a pencil of functions *bounded below* the *lower boundary* is similarly defined.

If a pencil of functions $\varphi(x)$ with an upper boundary $\Phi(x)$ is complete, the difference $\Phi(x) - \varphi(x)$ must increase for every member of the pencil.

Suppose that there is some member $\varphi_1(x)$ of the pencil such that $\Phi(x) - \varphi_1(x)$ does not increase. In this case there must be a pair of points α and β of (a, b) and a positive number ω such that

$$\Phi(\alpha) - \varphi_1(\alpha) = \Phi(\beta) - \varphi_1(\beta) + \omega, \qquad \beta > \alpha.$$

The definition of $\Phi(x)$ shows that there is at least one function $\varphi_2(x)$ of the pencil such that

$$\Phi(\alpha) - \varphi_2(\alpha) < \omega.$$

Continue the function $\varphi_2(x)$ parallel to $\varphi_1(x)$ in (a, b), and let the new function obtained be $\varphi_{2\,1}(x)$. It belongs to the pencil. Also

$$\begin{aligned} \Phi(\beta) - \varphi_{2\,1}(\beta) &= \Phi(\beta) - \varphi_1(\beta) - \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\alpha) \\ &= \Phi(\alpha) - \omega - \varphi_2(\alpha) \\ &< 0, \end{aligned}$$

which is contrary to the definition of $\Phi(x)$.

21. Suppose that a complete pencil of preponderantly continuous functions $\varphi(x)$ is bounded above and denote the upper boundary by $\Phi(x)$.

Then either $\Phi(x)$ is itself a member of the pencil or it is possible to find a sequence

(1) $$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

of functions of the pencil tending uniformly to $\Phi(x)$.

It is clear that if $\Phi(x)$ is not a member of the pencil then there are numbers $\varphi(b)$ arbitrarily near to $\Phi(b)$. Choose a sequence $\varphi_1(b), \varphi_2(b), \ldots, \varphi_n(b), \ldots$ of the numbers $\varphi(b)$ tending to $\Phi(b)$. Since, for $a < x < b$,

$$\Phi(b) - \varphi_n(b) \geqq \Phi(x) - \varphi_n(x) \geqq 0,$$

the sequence of functions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ tends uniformly to $\Phi(x)$.

22. It follows immediately from the last result that in the simple case of a complete pencil of continuous functions the upper boundary, if it exists, is a continuous function.

If the functions of the pencil are preponderantly continuous so also is the boundary. With the same notation as before, let $\varphi_1(x)$ be any member of the pencil. Then $\Phi(x)$ can only fail to be preponderantly continuous at a point of discontinuity of the increasing function

(1) $$\chi(x) = \Phi(x) - \varphi_1(x).$$

If ξ is such a point of failure, then $\chi(x)$ has definite limits on the left and right of ξ and these limits are distinct. This is easily seen to be incompatible with uniform approximation to $\Phi(x)$ by preponderantly continuous functions.

In the case of a complete pencil of preponderantly continuous functions the differences of the form (1) are increasing feebly continuous functions. They are therefore continuous.

23. Still under the hypothesis that the pencil is complete and bounded above, suppose that each of its members is differentiable almost everywhere in (a, b). Then the boundary is differentiable almost everywhere in (a, b).

If $\Phi(x)$ is not a member of the pencil, use the sequence (21.1) of functions tending uniformly to $\Phi(x)$ to form the increasing functions

$$\vartheta_n(x) = \Phi(x) - \varphi_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

The sequence $\{\vartheta_n(x)\}$ tends uniformly to zero and

$$\vartheta_n(b) - \vartheta_n(a) \to 0.$$

There are sub-sequences

(1) $$\vartheta_{n_1}(x), \vartheta_{n_2}(x), \ldots, \vartheta_{n_r}(x), \ldots$$

such that

(2) $$\vartheta'_{n_r}(x) \to 0$$

almost everywhere in (a, b)[10]). The corresponding sub-sequences

$$\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \ldots, \varphi_{n_r}(x), \ldots$$

evidently are such that

$$\varphi'_{n_r}(x) \to \Phi'(x)$$

almost everywhere in (a, b).

If the members of the pencil are approximately differentiable almost everywhere, a sequence (1) can still be found such that (2) holds almost everywhere. It then follows that the boundary is approximately differential almost everywhere and

$$\varphi^*_{n_r}(x) \to \Phi^*(x)$$

almost everywhere in (a, b).

Similar results hold for pencils bounded below.

Chapter IV.

Upper and lower integrals.

24. Let $f(x)$ be a single-valued real function defined in (a, b). A function $\varphi(x)$ is a *first type lower function* of $f(x)$ if:

(1_*) $\varphi(x)$ *is preponderantly continuous in* (a, b);

(2_*) $\varphi(x)$ *is nearly absolutely continuous above in* (a, b);

(3_*) $\varphi^*(x) \precsim f(x)$ *holds in* (a, b);

(4_*) $\varphi(a) = 0$.

A function $\psi(x)$ is a *first type upper function* of $f(x)$ if:

(1*) $\psi(x)$ *is preponderantly continuous in* (a, b);

(2*) $\psi(x)$ *is nearly absolutely continuous below in* (a, b);

(3*) $\psi^*(x) \succsim f(x)$ *holds in* (a, b);

(4*) $\psi(a) = 0$.

The reader should observe that conditions (2_*) and (2*) ensure the existence of the approximate differential coefficients $\varphi^*(x)$ and $\psi^*(x)$ almost everywhere in (a, b).

If $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ are two first type lower functions of $f(x)$, then any composite function obtained by continuation of one of these parallel to the other is seen to be a first type lower function of $f(x)$. Thus the first type lower functions of $f(x)$, if any exist, form a complete pencil. The same is true of the first type upper functions.

If $\psi(x)$ and $\varphi(x)$ are respectively an upper and a lower function of the first type, then the function $\psi(x) - \varphi(x)$ is feebly continuous and

---

[10]) F. Riesz, 12.

nearly absolutely continuous below. It has an approximate differential coefficient almost everywhere in (a, b) and

$$(\psi(x) - \varphi(x))^* \sim \psi^*(x) - \varphi^*(x) \gtrsim 0,$$

by (3*) and (3_*). By § 15, $\psi(x) - \varphi(x)$ is an increasing function. By (4*) and (4_*),

(1) $$\psi(x) - \varphi(x) \geqq 0, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

25. A function $f(x)$ which has first type upper and lower functions is said to be *integrable above and below (first type)*. Its lower functions form a complete pencil which is seen, by (24. 1), to be bounded above. The boundary $\Phi(x)$ of this pencil is the *first type lower integral* of $f(x)$. In the same way, the pencil of upper functions has a lower boundary $\Psi(x)$. This is the *first type upper integral* of $f(x)$. It is seen at once that $\Psi(x) - \Phi(x)$ is an increasing function and that $\Psi(a) = \Phi(a) = 0$.

Upper and lower first type integrals are preponderantly continuous, by § 22. By § 23, they satisfy the relations

$$\Psi^*(x) \gtrsim f(x), \qquad \Phi^*(x) \lesssim f(x).$$

26. If the first type upper and lower integrals of $f(x)$ coincide throughout (a, b) their common value is the *first type integral* of $f(x)$ in (a, b).

A first type integral $F(x)$ is seen to be a preponderantly continuous function. It has an approximate differential coefficient almost everywhere in (a, b) and

$$F^*(x) \sim f(x).$$

From this it is clear that any function which has a first type integral is measurable, for an approximate differential coefficient is a measurable function.

27. Upper and lower first type integrals are respectively nearly absolutely continuous below and above.

Let $\Psi(x)$ and $\Phi(x)$ be the upper and the lower first type integrals of some function $f(x)$, and let $\psi(x)$ and $\varphi(x)$ be representative members of the pencils of first type upper and lower functions.

Suppose that $\Phi(x)$ is not nearly absolutely continuous above. Let P be a perfect set in no portion of which $\Phi(x)$ is absolutely continuous above. Take a portion P_1 of P in which some fixed lower function $\varphi(x)$ is absolutely continuous above, and let P_{12} be a portion of P_1 in which some function $\psi(x)$ is absolutely continuous below. Let $\bar{\Phi}(x)$ be the function which coincides with $\Phi(x)$ on P_{12} and is linear in the complementary intervals of P_{12}, and let $\bar{\varphi}(x)$ and $\bar{\psi}(x)$ be the corresponding functions obtained from $\varphi(x)$ and $\psi(x)$.

It will first be shown that $\overline{\varphi}(x)$, which is absolutely continuous above and hence of bounded variation in the interval between the extreme points of P_{12}, is continuous in the same interval. Suppose that $\overline{\varphi}(x)$ is discontinuous at the point ξ, which is necessarily a point of P_{12}. If $\overline{\varphi}(x)$ is discontinuous on the left at ξ, then there are points x of P_{12} arbitrarily near ξ on the left; either

$$\lim_{x \to \xi -} (\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(\xi)) < 0, \quad \text{or} \quad \lim_{x \to \xi -} (\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(\xi)) > 0.$$

Suppose the former. There is a positive number h and a point x of P_{12} arbitrarily near ξ such that

$$\overline{\varphi}(\xi) - \overline{\varphi}(x) > h, \qquad x < \xi. \tag{1}$$

But $\bar{\varphi}(x)$ and $\varphi(x)$ coincide on P_{12}, so that (1) contradicts the hypothesis that $\varphi(x)$ is absolutely continuous above on P_{12}. Thus

$$\lim_{x \to \xi -} \overline{\varphi}(x) \geqq \overline{\varphi}(\xi)$$

and, in the same way,

$$\lim_{x \to \xi +} \overline{\varphi}(x) \leqq \overline{\varphi}(\xi).$$

Now consider $\overline{\psi}(x)$, which may be written

$$\overline{\psi}(x) = \overline{\varphi}(x) + \chi(x),$$

where $\chi(x)$ is a continuous increasing function. It is clear that, if $\overline{\varphi}(x)$ is discontinuous at ξ, so is $\overline{\psi}(x)$, and that the discontinuity is of such a form that one or both of the inequalities

$$\lim_{x \to \xi -} (\overline{\psi}(x) - \overline{\psi}(\xi)) > 0, \qquad \lim_{x \to \xi +} (\overline{\psi}(x) - \overline{\psi}(\xi)) < 0$$

holds. These inequalities are each sufficient to contradict the assumed absolute continuity below of $\psi(x)$ in P_{12}. It has thus been proved that the perfect set P contains a portion P_{12} such that $\varphi(x)$ is absolutely continuous above in this portion, the function $\overline{\varphi}(x)$ being continuous in the interval between the extreme points of this portion.

By § 6, $\overline{\varphi}(x)$ is of bounded variation in this interval. Since, by § 22, $\overline{\Phi}(x) - \overline{\varphi}(x)$ is a continuous increasing function, $\overline{\Phi}(x)$ is of bounded variation. Let $\varphi_1(x)$ be any first type lower function of $f(x)$. Then $\overline{\Phi}(x) - \overline{\varphi}_1(x)$ is a continuous increasing function. It is seen that $\overline{\varphi}_1(x)$ is continuous and of bounded variation and nearly absolutely continuous above, and hence it is absolutely continuous above in the interval between the extreme points of P_{12}. It follows that $\varphi_1(x)$ is absolutely continuous above in P_{12}.

Consider non-overlapping systems I restricted to P_{12}. The hypothesis that $\Phi(x)$ is not absolutely continuous above in any portion of P shows that

$$\overline{\lim_{m I \to 0}} \pi(\Phi, I) = k > 0. \tag{2}$$

But a lower function $\varphi(x)$ can be found, such that $\Phi(x) - \varphi(x)$, which increases, never exceeds $k/2$. Now

$$\pi(\Phi, I) - \pi(\varphi, I) < k/2,$$

with (2), gives

$$\overline{\lim_{mI \to 0}} \pi(\varphi, I) \geqq k/2.$$

This is impossible, since $\varphi(x)$ is absolutely continuous above in P_{12}, and it follows that $\Phi(x)$ is nearly absolutely continuous above.

Substitution of the function $-f(x)$ for $f(x)$ shows that $\Psi(x)$ is nearly absolutely continuous below.

The result may be stated in the form: First type upper and lower integrals of a function are also first type upper and lower functions.

A first type integral is both a lower and an upper function of the first type. It is nearly absolutely continuous on both sides.

28. If $f(x)$ is measurable and has upper and lower first type integrals $\Psi(x)$ and $\Phi(x)$, then

(1) $$\Psi^*(x) \sim \Phi^*(x) \sim f(x).$$

Let E be the set of points at which $\Psi^*(x)$ and $\Phi^*(x)$ both exist but are unequal. The approximate differential coefficient being measurable, the set E is measurable. On it $\Psi^*(x) > \Phi^*(x)$ since $\Psi(x) - \Phi(x)$ increases. Suppose that E is of positive measure.

Let the measurable sets E_1 and E_2 consist of those points at which $\Phi^*(x) < f(x)$ and $\Psi^*(x) > f(x)$ respectively. Then $EE_1 + EE_2 = E$ and, of E_1 and E_2, at least one is of positive measure. Suppose $mE_1 > 0$.

There is a positive number ε and a measurable set $\bar{E}_1$, $m\bar{E}_1 > 0$, such that on $\bar{E}_1$

$$f(x) - \Phi^*(x) \geqq \varepsilon.$$

Consider the function

$$\Phi(x) + \varepsilon \int_a^x g(x)\, dx,$$

where $g(x)$ is the characteristic function of $\bar{E}_1$. It has an approximate differential coefficient not greater than $f(x)$ almost everywhere. It is nearly absolutely continuous above; for $\Phi(x)$ is so, and the second term is absolutely continuous. It is preponderantly continuous. It is a first type lower function of $f(x)$. This is impossible, for no first type lower function can exceed $\Phi(x)$. It can be shown in the same way that the assumption $mE_2 > 0$ leads to a contradiction. It follows that (1) holds.

29. Suppose that $f_1(x)$ and $f_2(x)$ have first type integrals $F_1(x)$ and $F_2(x)$ respectively. Then it is possible that $F_1(x) + F_2(x)$ is not a

first type integral. The usual result, that the sum of two integrable functions is integrable and its integral is the sum of the integrals of the given functions, does not hold for first type integration.

An example will be given of two first type integrals whose sum is not a first type integral.

In the interval $(0, 1)$ take the points $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{3}$, ..., $c_n = 1/(n+1)$, ... Let the intervals (a_n, c_n) and (c_n, b_n) both be of length $\frac{1}{3}/(n+1)(n+2)$, $a_n < c_n < b_n$; $n = 1, 2, \ldots$. Then

$$\sum_{r=n}^{\infty} (b_r - c_r) = \sum_{r=n}^{\infty} (c_r - a_r) = \sum_{r=n}^{\infty} \tfrac{1}{3}/(r+1)(r+2) = \tfrac{1}{3}/(n+1).$$

Consider the set E_1 consisting of the point $x = 0$ and the points x such that $a_n \leqq x \leqq c_n$, $n = 1, 2, \ldots$. The portion of the closed set E_1 defined by the interval $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ has measure $\frac{1}{3}/(n+1)$; it is clear that the set E_1 has density $\frac{1}{3}$ on the right at $x = 0$. The set E_2 consisting of the point $x = 0$ and the points x such that $c_n \leqq x \leqq b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, also has density $\frac{1}{3}$ on the right at $x = 0$.

The function $F_1(x)$ is defined as follows: for all positive integral values of n,

$F_1(x)$ is linear and increases from 0 to 1 in the interval $\left(a_n, \frac{a_n + c_n}{2}\right)$;

$F_1(x)$ is linear and decreases from 1 to 0 in the interval $\left(\frac{a_n + c_n}{2}, c_n\right)$;

$F_1(x)$ is zero at all other points of $(0, 1)$, including the end-points.

It is seen that $F_1(x)$ is continuous at all points of $(0, 1)$ except $x = 0$. It is absolutely continuous in any closed sub-interval of $(0, 1)$ which has not $x = 0$ as end-point. Further, $F_1(x)$ is preponderantly continuous at $x = 0$; for $F_1(x)$ has the value zero on the closed complement of the set of interior points of the intervals (a_n, c_n), and this closed complement has density $\frac{2}{3}$ on the right at $x = 0$.

The function $F_2(x)$ is defined as follows: for all positive integral values of n,

$F_2(x)$ is linear and increases from 0 to 1 in the interval $\left(c_n, \frac{b_n + c_n}{2}\right)$;

$F_2(x)$ is linear and decreases from 1 to 0 in the interval $\left(\frac{b_n + c_n}{2}, b_n\right)$;

$F_2(x)$ is zero at all other points of $(0, 1)$, including the end-points.

The function $F_2(x)$ is continuous at all points of $(0, 1)$ except $x = 0$. It is absolutely continuous in any closed sub-interval of $(0, 1)$ which has not $x = 0$ as end-point. Further, $F_2(x)$ is preponderantly continuous at $x = 0$.

Both $F_1(x)$ and $F_2(x)$ are nearly absolutely continuous in $(0,1)$. For any closed set in $(0,1)$ consists either of the single point $x = 0$, and a single point is a set in which any function is absolutely continuous, or it contains a portion whose defining interval has not $x = 0$ as end-point, and in this portion both functions are absolutely continuous.

Both $F_1(x)$ and $F_2(x)$ have differential coefficients almost everywhere in $(0,1)$. Let $f_1(x)$ be equal to $F_1'(x)$ wherever this differential coefficient exists and to zero at all other points of $(0,1)$; let $f_2(x)$ be similarly defined. Then $f_1(x)$ and $f_2(x)$ have $F_1(x)$ and $F_2(x)$ as first type integrals. Consider $F_1(x) + F_2(x)$. Let $\varepsilon > 0$ be given. Then $F_1(x) + F_2(x) \geqq \varepsilon$ in two sub-intervals of (a_n, b_n) whose combined measure is $(1 - \varepsilon)(b_n - a_n)$. Let E be the set of points x at which $F_1(x) + F_2(x) \geqq \varepsilon$. Then E has density $2(1 - \varepsilon)/3$ on the right at $x = 0$. For sufficiently small values of ε this density exceeds $\frac{1}{2}$. Since $F_1(0) + F_2(0) = 0$ it is clear that $F_1(x) + F_2(x)$ is not preponderantly continuous at $x = 0$. The function $F_1(x) + F_2(x)$ is therefore not a first type integral.

30. It may be well to state explicitly that first type integrals are not necessarily bounded. It is easy to construct an unbounded preponderantly continuous function which is nearly absolutely continuous. Such a function differs from a first type integral only by a constant.

31. The *second type upper and lower functions* associated with a given function $f(x)$ are first type upper and lower functions which are continuous instead of being merely preponderantly continuous.

The second type lower and upper functions of $f(x)$ form complete pencils, which are sub-pencils of the first type lower and upper pencils. From this it is seen at once that if $\psi(x)$ is a second type upper function and $\varphi(x)$ a second type lower function then $\psi(x) - \varphi(x)$ is an increasing function. This also follows directly from §§ 3 and 13.

The second type pencils have boundaries $\Psi(x)$ and $\Phi(x)$ which will be called the *second type upper* and *lower integrals* of $f(x)$. If $\Psi(x)$ and $\Phi(x)$ coincide, their common value is the second type integral of $f(x)$.

A second type upper or lower integral is continuous and nearly absolutely continuous on one side. If $f(x)$ is measurable and has second type upper and lower integrals $\Psi(x)$ and $\Phi(x)$, then

$$\Psi^*(x) \sim \Phi^*(x) \sim f(x).$$

The existence of a second type integral shows that $f(x)$ is measurable. These statements are special cases of results proved above. In this case, where the functions concerned are continuous, part of the proof given in § 27 could be omitted.

A second type integral $F(x)$ is continuous and nearly absolutely continuous. Further,

$$F^*(x) \sim f(x).$$

32. Since a function which is continuous and nearly absolutely continuous is a *fonction résoluble*, a second type integral is an indefinite Denjoy integral. It will now be shown that the second type integral and the Denjoy integral are exactly equivalent.

If $f(x)$ is integrable by Denjoy's definition, then it has a second type integral which coincides with an indefinite Denjoy integral of $f(x)$.

Let $F(x)$ be an indefinite Denjoy integral of $f(x)$ in (a, b). Then $F(x)$ is a continuous *fonction résoluble* and has almost everywhere an approximate differential coefficient which coincides with $f(x)$. It is clear that $F(x) - F(a)$ is both a second type lower and upper function of $f(x)$. It is therefore the second type integral of $f(x)$.

Now let $F(x)$ be the second type integral of $f(x)$. Then, as a *fonction résoluble*, $F(x)$ is an indefinite Denjoy integral of some function $g(x)$ and

$$F^*(x) \sim g(x).$$

But

$$F^*(x) \sim f(x),$$

so that

$$f(x) \sim g(x).$$

This shows that $f(x)$ is integrable in Denjoy's sense and its integral is the same as that of $g(x)$. It therefore has $F(x)$ as an indefinite Denjoy integral.

33. As a third example of upper and lower integrals, the case may be considered in which the upper and lower functions satisfy all the conditions that they should be second type upper and lower functions and are required in addition to have ordinary differential coefficients almost everywhere in (a, b). Such functions are *third type upper* and *lower functions*. The definitions of *third type upper* and *lower integrals* and of the *third type integral* follow the usual lines, and the properties of the integrals are those of second type integrals with the addition that they have ordinary differential coefficients almost everywhere. The third type integral is equivalent to the Denjoy-Khintchine integral.

34. A *fourth type lower function* $\varphi(x)$ of $f(x)$ is a second type lower function which is of nearly bounded oscillation. *Fourth type upper functions* are similarly defined.

It is seen that the pencils of fourth type lower and upper functions are complete. They are sub-pencils of the third type pencils, for § 9 shows that the functions composing them have ordinary differential coefficients almost everywhere.

If $f(x)$ has fourth type lower and upper functions, the boundaries $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ of the pencils which they form are the *fourth type lower* and *upper integrals* of $f(x)$.

The lower and upper integrals of fourth type have ordinary differential coefficients almost everywhere. They are of nearly bounded oscillation.

Suppose, if possible, that Q is a closed set such that, for every portion ω of Q with complementary intervals (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), ...,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi(\beta_n) - \Phi(\alpha_n)| = \infty, \tag{1}$$

provided that α_n and β_n are, for $n = 1, 2, \ldots$, suitably chosen points satisfying $a_n \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq b_n$.

Let $\varphi(x)$ be any fourth type lower function and let ω be a portion of Q such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(\delta_n) - \varphi(\gamma_n)| < \infty,$$

where, for $n = 1, 2, \ldots$, γ_n and δ_n are any two points satisfying $a_n \leqq \gamma_n < \delta_n \leqq b_n$.

Let $\gamma_n = \alpha_n$, $\delta_n = \beta_n$. Then, since $\Phi(x) - \varphi(x)$ increases,

$$|\Phi(\beta_n) - \Phi(\alpha_n)| - |\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)| \leqq (\Phi(\beta_n) - \varphi(\beta_n)) - (\Phi(\alpha_n) - \varphi(\alpha_n)),$$

$$\sum_{n=1}^{r} |\Phi(\beta_n) - \Phi(\alpha_n)| - \sum_{n=1}^{r} |\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)| \leqq \Phi(\beta) - \varphi(\beta),$$

where r is any integer.

The series $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)|$ converges; $\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi(\beta_n) - \Phi(\alpha_n)|$ therefore converges, and this contradicts (1). It follows that $\Phi(x)$ has nearly bounded oscillation, and it is seen at once that $\Psi(x)$ has the same property.

The lower and upper fourth type integrals are nearly absolutely continuous above and below respectively. This needs no fresh proof.

These results may be summarised in the statement that the lower and upper fourth type integrals are respectively a fourth type lower and upper function.

35. If $f(x)$ has lower and upper fourth type integrals which coincide throughout (a, b), the common value is the *fourth type integral* of $f(x)$. Suppose that it exists and denote it by $F(x)$. Then $F(x)$ has the following properties:

(1) $F(x)$ is continuous and nearly absolutely continuous;

(2) $F(x)$ has an ordinary differential coefficient almost everywhere in (a, b) and

$$F'(x) \sim f(x);$$

(3) $F(x)$ is of nearly bounded oscillation;
(4) $F(a) = 0$.

The existence of a function $F(x)$ associated with $f(x)$ and having the first three of these properties is a necessary and sufficient condition that $f(x)$ should be integrable in the special Denjoy, or Perron-Denjoy sense[11]). A function with these properties is an indefinite Perron-Denjoy integral of $f(x)$. It is seen at once that, if $f(x)$ has a fourth type integral in (a, b), then it is integrable in (a, b) in the sense of Perron-Denjoy and the fourth type integral is an indefinite Perron-Denjoy integral.

Again, suppose that $f(x)$ is integrable in (a, b) in the Perron-Denjoy sense and has $G(x)$ as an indefinite integral. Then the function $F(x) = G(x) - G(a)$ satisfies the conditions (1) to (4). It is a fourth type lower and a fourth type upper function of $f(x)$. This shows that $f(x)$ has $F(x)$ as its fourth type integral.

36. *Lower functions* of the *fifth type* are second type lower functions which are absolutely continuous above. *Fifth type upper functions* are similarly defined. They form pencils which are clearly sub-pencils of the first, second, and third type pencils. To show that they are sub-pencils of the fourth type pencils, it is necessary to show that the fifth type upper and lower functions are of bounded oscillation. But this is obvious; for these functions, being absolutely continuous on one side, are of bounded variation in (a, b).

The definitions of *fifth type upper* and *lower integrals* and of the *fifth type integral* follow the usual lines. It has been shown elsewhere[12]) that the fifth type integral is exactly equivalent to the Lebesgue integral, and that every measurable function which possesses fifth type upper and lower integrals has a fifth type integral. The fifth type upper and lower integrals of a non-measurable function are its upper and lower Lebesgue integrals, and are absolutely continuous, without restriction of side.

References.

1. P. Alexandroff. Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjoyschen Integralbegriffes. *Math. Zeitschr.* **20** (1924), 213—222.

2. J. C. Burkill and U. S. Haslam-Jones. The derivates and approximate derivates of measurable functions. *Proc. London Math. Soc.* (2) **32** (1931), 346—355.

3. A. Denjoy. Sur les nombres dérivés des fonctions continues. *Journal de Math.* (7) **1** (1915), 105—240.

---

[11]) Denjoy, 5, p. 199. See also Perron, 10; Alexandroff, 1; Looman, 9.
[12]) Kennedy, 8.

4. A. Denjoy. Totalisation des nombres dérivés non sommables. *Annales de l'École Normale* (3) **33** (1916), 127—232.

5. A. Denjoy. Totalisation des nombres dérivés non sommables. *Annales de l'École Normale* (3) **34** (1917), 181—236.

6. S. Izumi. A new Concept of Integrals. *Proc. Imp. Acad. of Japan.* **9**, (1933), 570—573.

7. M. D. Kennedy. Determinate functions of intervals. *Proc. London Math. Soc.* (2) **30** (1930), 58—80.

8. M. D. Kennedy. Upper and lower Lebesgue integrals. *Proc. London Math. Soc.* (2) **32** (1931), 21—50.

9. H. Looman. Über die Perronsche Integraldefinition. *Math. Annalen* **93** (1925), 153—156.

10. O. Perron. Über den Integralbegriff. *Sitzungsber. d. Heidelberger Akad.* **5a** (1914) Nr. 14.

11. J. Ridder. Über den Perronschen Integralbegriff und seine Beziehungen zu den *R*-, *L*- und *D*-Integralen. *Math. Zeitschr.* **34** (1932), 234—269.

12. F. Riesz. Existence de la dérivée des fonctions monotones. *Acta Reg. Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae* **5** (1932), 208—221.

13. S. Saks. Sur certaines classes de fonctions continues. *Fundamenta Math.* **17** (1931), 124—151.

(Eingegangen am 15. März 1934.)

Über einen Satz von Phragmén und Lindelöf.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. Mit dem klassischen Satz von Phragmén und Lindelöf, wonach eine ganze transzendente Funktion, falls sie innerhalb eines Winkels von der Öffnung $\alpha < \frac{\pi}{\varrho}$ die Ordnung ϱ besitzt, auf dessen Schenkeln nicht beschränkt sein kann [1]), ist die Grundlage für eine Reihe von Untersuchungen gelegt, welche durch die Arbeiten von Denjoy, Carleman, Ahlfors, Bieberbach, Nevanlinna und Milloux zu einem gewissen Abschluß gekommen sind.

In dieser Arbeit wird dieser Satz mit Hilfe einer von Carleman gegebenen und später von Julia verallgemeinerten Ungleichung bewiesen und verschärft, und es wird gezeigt, wie diese Carleman-Juliasche Ungleichung mit einer vor kurzem von Milloux angegebenen interessanten Ungleichung zusammenhängt.

2. Es sei in der Ebene $z = r e^{i\varphi}$ der sich ins Unendliche erstreckende Sektor S_k

$$r \geqq 0 \qquad -\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k} \qquad \left(k \geqq \frac{1}{2}\right) \tag{2.1}$$

gegeben, $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion von z, die in ihm von der Ordnung ϱ ist, und es seien $M_0(r)$, $M(r)$ durch

$$M_0(r) = \operatorname{Max} |f(t e^{\pm i\frac{\pi}{2k}})| \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq r \text{ [2])}, \tag{2.2}$$

$$M(r) = \operatorname{Max} |f(r e^{i\varphi})| \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k} \tag{2.3}$$

definiert und möge folgenden Bedingungen genügen:

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M_0(r)}{r^\varrho} = 0, \tag{2.4}$$

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\varrho} = \sigma \qquad (\sigma > 0). \tag{2.5}$$

Unter diesen Voraussetzungen wird in **4.** *bewiesen, daß* $k \leqq \varrho$ *ist.*

---

[1]) Phragmén und Lindelöf, Sur une extenstion d'un principe classique d'analyse ..., Acta Mathematica **31** (1908), S. 381.

[2]) $M_0(r)$ ist also eine nicht-abnehmende Funktion von r.

3. Die Ungleichung von Carleman-Julia. $g(z)$ sei eine ganze Funktion von z. Im Kreissektor S_a

$$0 \leqq r \leqq a \qquad -\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k} \qquad (k \geqq \tfrac{1}{2}) \tag{3.1}$$

sei $|g(z)| \leqq M_0$ auf seinen beiden geradlinigen Begrenzungen und $|g(z)| \leqq M$ für $z = a e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}$, und es sei $M_0 < M$ vorausgesetzt. Bezeichnet man mit $\Phi(z)$ die innerhalb (3.1) reguläre Potentialfunktion

$$\operatorname{Arctg} \frac{2\left(\frac{r}{a}\right)^k \cos k\varphi}{1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}}\,^{3}), \tag{3.2}$$

so ist

$$\Phi\left(r e^{\pm i\frac{\pi}{2k}}\right) = 0 \qquad (0 \leqq r < a),$$

während sie auf dem Kreisbogen $r = a$, $-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}$ den konstanten Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt. Wie sich leicht bestätigt, ist $\log|g(z)|$ am Rande von S_a von der regulären Potentialfunktion $\log M_0 + \frac{2}{\pi}\log\frac{M}{M_0}\Phi(z)$ majorisiert, also muß dem Maximumprinzip gemäß [4]) in S_a die Ungleichung

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{2}{\pi}\log\frac{M}{M_0}\Phi(z) \tag{3.3}$$

gelten, wo das Gleichheitszeichen (falls es nicht immer gilt) nur am Rande richtig sein kann. Bekanntlich ist (3.3) die Carlemansche Ungleichung in der von Julia angegebenen verallgemeinerten Form [5]). Nun ist aber wegen $0 \leqq r \leqq a$, $\cos k\varphi \geqq 0$

$$\operatorname{Arctg} \frac{2\left(\frac{r}{a}\right)^k \cos k\varphi}{1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}} \leqq \operatorname{Arctg} \frac{2\left(\frac{r}{a}\right)^k}{1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}} = 2\operatorname{Arctg}\left(\frac{r}{a}\right)^k \leqq 2\left(\frac{r}{a}\right)^k,$$

also nach (3.3) in (3.1).

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi}\log\frac{M}{M_0}\left(\frac{r}{a}\right)^k. \tag{3.4}$$

---

[3]) Als Imaginärteil der innerhalb S_a regulären analytischen Funktion

$$\log\frac{1+i\left(\frac{z}{a}\right)^k}{1-i\left(\frac{z}{a}\right)^k}.$$

[4]) Vgl. z. B. G. Julia, Principes d'Analyse II, S. 29.

[5]) G. Julia, Sur quelques majorantes ..., Ann. de l'ec. norm. sup. 31 (1931).

4. Es sei gegen die Behauptung $k > \varrho$ vorausgesetzt. Wir bilden die im Winkel $-\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}$ eindeutige Funktion $G(z) = f(z)\, e^{-\varepsilon z^{\varrho}}$[6]), mit $\varepsilon > 0$ (das sonst beliebig klein gewählt werden kann) und setzen

$$M_0^*(r) = \operatorname{Max} |G(t\, e^{\pm i \frac{\pi}{2k}})| \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq r \tag{4.1}$$

und

$$M^*(r) = \operatorname{Max} |G(r\, e^{i\varphi})| \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2k} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2k}. \tag{4.2}$$

Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $M_0^*(0) > 1$ voraussetzen, was immer durch Multiplikation von $f(z)$ mit einer Konstanten zu erreichen ist. Bezeichnet man mit δ die positive Zahl $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varrho}{k}\right)$, so ist erstens

$$M_0^*(r) \leqq M_0(r), \qquad M^*(r) \geqq M(r)\, e^{-\varepsilon r^{\varrho}}, \tag{4.3}$$

und zweitens ist wegen (2.4) (2.5) die Ungleichung

$$M_0(r) < M(r)\, e^{-\varepsilon r^{\varrho}} \tag{4.4}$$

für unendlich viele und beliebig große r, die wir mit a bezeichnen wollen, erfüllt[7]). Durch Kombination von (4.3) mit (4.4) erhält man, daß die Ungleichung $M_0^*(r) < M^*(r)$ von diesen a ebenfalls erfüllt ist, und folglich kann man für die Funktion $G(z) = f(z)\, e^{-\varepsilon z^{\varrho}}$ die Abschätzung

$$\log |f(z)\, e^{-\varepsilon z^{\varrho}}| \leqq \log M_0^*(a) + \frac{4}{\pi} \log \frac{M^*(a)}{M_0^*(a)} \left(\frac{r}{a}\right)^k \qquad (z = r\, e^{i\varphi}) \tag{4.5}$$

gewinnen und a fortiori

$$\log |f(z)\, e^{-\varepsilon z^{\varrho}}| \leqq \log M_0^*(a) + \frac{4\, r^k}{\pi} \cdot \frac{\log M^*(a)}{a^k}. \tag{4.6}$$

Nun halten wir z fest und lassen $a \to \infty$ konvergieren. Zunächst strebt das letzte Glied der rechten Seite von (4.6) wegen (2.4), der Ungleichung $M^*(a) \leqq M(a)$ und der Voraussetzung $k > \varrho$ gegen Null, während das erste Glied nach oben beschränkt bleibt; denn es ist $\overline{\lim_{r=\infty}} |f(r\, e^{\pm i \frac{\pi}{2k}})|\, e^{-\varepsilon \delta r^{\varrho}} = 0$, und deswegen kann $M_0^*(a)$ nicht über alle

---

[6]) Wir wählen denjenigen Zweig von $e^{-\varepsilon z^{\varrho}}$, der auf der reellen Achse reell wird.

[7]) Wäre nämlich für alle $r \geqq r_0$ $M_0(r) \geqq M(r)\, e^{-\varepsilon r^{\varrho}}$, so wäre

$$\frac{\log M_0(r)}{r^{\varrho}} \geqq \frac{\log M(r)}{r^{\varrho}} - \varepsilon$$

und daraus hätte man $0 \geqq \sigma - \varepsilon$ folgern können. σ ist aber > 0, und ε kann beliebig klein gewählt werden.

Grenzen wachsen. Bezeichnet man die obere Schranke von $M_0^*(a)$ mit C, so kann man aus (4.6) folgendes erhalten.

$$\log |f(z)\, e^{-\varepsilon z^\varrho}| \leqq \log C, \tag{4.7}$$

d. h. $|f(z)| \leqq C e^{\varepsilon r^\varrho}$, oder auch

$$M(r) \leqq C e^{\varepsilon r^\varrho}. \tag{4.8}$$

Aus dieser letzten Ungleichung entnimmt man, daß

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\varrho} = \sigma \leqq \varepsilon \tag{4.9}$$

sein muß, weil für festes $\varepsilon > 0$ C nur von ihm abhängt, was offenbar mit der Annahme $\sigma > 0$ in Widerspruch steht[8]).

5. Wir werden jetzt sagen, die ganze Funktion $f(z)$ von der Ordnung ϱ ist auf der Halbgeraden $r \geqq 0$ $\varphi = \varphi_0$ von Maximal-, Normal- oder Minimaltypus, je nachdem $\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |f(r e^{i\varphi_0})|}{r^\varrho}$ unendlich, endlich > 0, oder gleich Null wird, und analog, daß $f(z)$ innerhalb des Winkels $0 \leqq \alpha \leqq \varphi \leqq \beta < 2\pi$ dem Maximal-, Normal- oder Minimaltypus angehört, je nachdem $\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\varrho}$ unendlich, endlich oder Null wird. Hier stellt übrigens $M(r)$ das Maximum von $|f(r e^{i\varphi})|$ für $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$ dar.

Nach diesen Festsetzungen besagt nun der vorher bewiesene Satz folgendes:

I. *Es gibt keine ganze Funktion $f(z)$ von der Ordnung ϱ, welche innerhalb eines Winkels von der Öffnung $< \frac{\pi}{\varrho}$ dem Maximal- oder dem Normaltypus angehört, während sie auf seinen beiden Schenkeln vom Minimaltypus bleibt.*

Dieser Satz enthält in sich offenbar den Satz von Phragmén und Lindelöf.

Ferner ist noch folgender Satz richtig:

II. *Es gibt keine ganze transzendente Funktion $f(z)$, welche auf mehr als 2ϱ Halbgeraden*[9]) *den Minimaltypus von der Ordnung ϱ hat, während sie innerhalb von je zwei aufeinanderfolgenden, von ihnen begrenzten Winkeln, den Maximal- oder den Normaltypus besitzt, und von der Ordnung ϱ ist.*

Ob man in diesem Satz die Halbgeraden durch beliebige, sich nicht schneidende und sich ins Unendliche erstreckende Wege mit passender Verallgemeinerung des Typus einer ganzen Funktion von der Ordnung ϱ

[8]) Man wähle z. B. $\varepsilon < \sigma$.

[9]) ϱ ganz.

„auf einem Wege" ersetzen kann[10]), bleibt unentschieden. Es ist wahrscheinlich, daß ein solcher Satz gilt.

Zum Schluß dieser Betrachtungen bemerken wir, daß man Funktionen angeben kann, die außerhalb eines Winkels von der Öffnung $\frac{\pi}{\varrho}$ dem Minimaltypus derselben Ordnung angehören, während sie innerhalb dieses Winkels den Normaltypus der Ordnung besitzen. Ist nämlich $E_\varrho(z)$ die der Zahl ϱ entsprechende Mittag-Lefflersche Funktion[11]) und $\varphi(z)$ eine beliebige ganze Funktion vom Minimaltypus der Ordnung ϱ, so ist $\varphi(z) \cdot E_\varrho(z)$ eine Funktion, die die Grenze des Satzes I erreicht. Ist ferner ϱ eine ganze Zahl und betrachtet man die Funktion

$$H_\varrho(z) = \int_0^z \frac{\sin t^\varrho}{t^\varrho} dt,$$

so ist $\varphi(z) \cdot H_\varrho(z)$ auf genau 2ϱ Halbgeraden vom Minimaltypus der Ordnung ϱ, während sie auf allen übrigen Halbgeraden dem Normaltypus derselben Ordnung angehört.

6. Die Ungleichung von Milloux. Einige Bemerkungen zu der Ungleichung (3.4) mögen hier noch angeführt werden. Ist nämlich θ die Winkelöffnung von S_k, so ist nach (3.4)

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} \log \frac{M}{M_0} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{\theta}} \tag{6.1}$$

oder auch

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} \log \frac{M}{M_0} e^{-\frac{\pi}{\theta}\int_r^a \frac{dt}{t}}. \tag{6.2}$$

Setzt man ferner $\theta \cdot t = s(t)$, so geht diese letzte Formel in folgende über:

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} \log \frac{M}{M_0} e^{-\pi\int_r^a \frac{dt}{s(t)}}. \tag{6.3}$$

Es taucht nun die Frage auf, ob eine ähnliche Ungleichung auch für allgemeinere Sektorbereiche bestehen kann, für einfach zusammenhängende Bereiche B etwa, die von einem Kreisbogen AB und zwei Kurvenbogen C_1, C_2 begrenzt sind (Fig. 1). Der Einfachheit halber werden wir annehmen, daß $C_1 C_2$ aus analytischen Kurvenstücken zusammengesetzt

---

[10]) Wenn z. B. $z = z(t)$ $0 \leqq t \leqq \infty$ die Gleichung des Weges, wo $t = \infty$ dem unendlich fernen Punkte entspricht, ist, so könnte man den Typus einer ganzen Funktion von der Ordnung ϱ durch $\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log|f(z(t))|}{|z(t)|^\varrho}$ definieren.

[11]) Vgl. z. B. Bieberbach, Funktionentheorie II, S. 272.

sind. Daß dies nun der Fall ist, hat Milloux in einer in den Acta Mathematica veröffentlichten Arbeit gezeigt [12]). Hier wird ein Beweis, der dem der Ungleichung analog verläuft, angegeben, der aber von dem Millouxschen ein wenig abweicht.

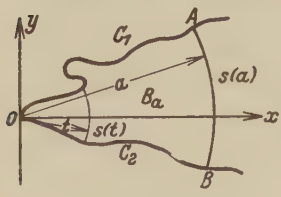


Fig. 1.

Es sei $w = u + iv = F(z)$ diejenige analytische Funktion, durch welche das Gebiet B auf den Halbkreis $|w| \leqq 1 \quad Rw > 0$ abgebildet ist, derart, daß die Punkte $0, A, B$ in die Punkte $0, i, -i$ der w-Ebene übergehen. Dann ist $\Phi(z) = \operatorname{Arctg} \frac{2u}{1-|w|^2}$ diejenige innerhalb B reguläre Potentialfunktion [13]), welche auf dem Kreisbogen AB gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, während sie auf dem übrigen Rande verschwindet. Ist nun die Funktion $|f(z)|$ auf $C_1, C_2 < M_0$ und auf dem Kreisbogen AB kleiner als M, so gilt auf dem Rand von B die Ungleichung

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{2}{\pi} \log \frac{M}{M_0} \Phi(z) \tag{6.4}$$

und also dem Maximumprinzip gemäß dieselbe Ungleichung für das ganze Gebiet B. Bekanntlich darf das Gleichheitszeichen in (6.4) innerhalb B nicht gelten, abgesehen von dem Falle, wo $\frac{f(z)}{M_0} = \left(\frac{M}{M_0}\right)^{-\frac{2i}{\pi} \log \frac{1+iF}{1-iF}}$ ist. Nun ist

$$\operatorname{Arctg} \frac{2u}{1-|w|^2} \leqq \operatorname{Arctg} \frac{2|w|}{1-|w|^2} = 2 \operatorname{Arctg}|w| \leqq 2|w|,$$

so daß (6.4) folgende Gestalt annimmt

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} \log \frac{M}{M_0} |F(z)|. \tag{6.5}$$

Wir werden jetzt mit $s(t)$ denjenigen Teil des innerhalb B verlaufenden Bogen des Kreises $|z| = t$ bezeichnen, der den Nullpunkt vom Kreisbogen AB trennt. Die Funktion $s(t)$ ist bis auf isolierte Stellen eine stetige Funktion von t. Betrachtet man nun die Funktion

$$\zeta = \xi + i\eta = -\log F(z),$$

welche das Gebiet B derart auf den Streifen $\xi \geqq 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{2}$ konform abbildet, daß die Punkte A, B in die Punkte $-i + i$ über-

[12]) H. Milloux, Sur les domaines de détermination infinie des fonctions entieres, Acta Math. 61 (1933), S. 105.

[13]) Als Imaginärteil der innerhalb B regulären analytischen Funktion $\log \frac{1+iF(z)}{1-iF(z)}$.

gehen, während dem Nullpunkte der z-Ebene der Punkt $\zeta = \infty$ entspricht, so kann man mit Hilfe der Ahlforsschen Methode [14]) folgendes beweisen:

Ist

$$\int_r^a \frac{dt}{s(t)} > 1, \tag{6.6}$$

so gilt

$$\xi = -\log|F(z)| > \pi \int_r^a \frac{dt}{s(t)} - 2\pi \text{ [15])}. \tag{6.7}$$

Daraus folgt für die r, die (6.6) erfüllen, die Ungleichung

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} e^{3\pi} \cdot \log \frac{M}{M_0} e^{-\pi \int_r^a \frac{dt}{s(t)}} \text{ (Milloux)}. \tag{6.8}$$

Ob man nun die Konstante $\frac{4}{\pi} e^{2\pi}$ weiter herabsetzen kann, ist unentschieden. Milloux erhält unter Annahme, daß $\int_r^a \frac{dt}{s(t)} > 2$ ist, als solche die Konstante $\frac{4}{\pi} e^{4\pi}$. Hier war es wegen der Tatsache, daß der Bogen AB auf die Strecke $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{2}$ der imaginären Achse abgebildet worden ist (Schwankung von ξ auf AB gleich Null), möglich, die Ungleichung (6.7) unter Voraussetzung von (6.6) zu gewinnen.

---

[14]) L. Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildungen und ganzen Funktionen, Acta soc. scient. Fenn. Nova Series T. I (1930), Nr. 9.

[15]) Der Umstand, daß man hier -2π statt -4π (wie es bei Ahlfors vorkommt) gewinnen kann, besteht darin, daß wir eine Kurve, nämlich den Kreisbogen AB, auf dem die Schwankung von ξ gleich Null ist, besitzen.

Berlin, den 29. Dezember 1933.

(Eingegangen am 2. März 1934).

Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz.

Von

Ernst Witt in Göttingen.

Hier soll eine Untersuchung der Körper vom Geschlecht 0 durchgeführt werden. Diese Körper stehen in bemerkenswertem Zusammenhang mit den Algebren vom Rang 4 über dem Konstantenkörper. Lassen wir den Körper $\Omega(x)$ und die Algebra Ω beiseite, so hat jede Algebra genau einen Zerfällungskörper, umgekehrt zerfällt jeder Körper auch nur eine Algebra. Insbesondere gibt es also ebenso viele Körper vom Geschlecht 0 wie Algebren vom Rang 4.

Im Anschluß daran gewinnen wir ein interessantes Gegenbeispiel zum Normensatz der Zahlentheorie. Bedeutet R den Körper der rationalen Zahlen, so ist zwar -1 nicht Summe von zwei Quadraten im Körper $k = R\left(x, \sqrt{-x^2-21}\right)$, wird es dagegen in jedem Grenzkörper $\bar{k}$, der durch irgendeine Bewertung von k entsteht.

Für den Satz „In einem Funktionenkörper über einem Galoisfeld gibt es Divisoren von jeder Ordnung" hat F. K. Schmidt[1]) einen sehr kurzen und eleganten analytischen Beweis gegeben. Vom algebraischen Standpunkt aus ist es wohl nicht unnütz, wenn bei dieser Gelegenheit ein gruppentheoretischer Beweis mitgeteilt wird.

Zum Schluß bringen wir einen Beweis für die bekannte Tatsache, daß die Diskriminante eines quadratischen Schiefkörpers über dem rationalen Körper von ± 1 verschieden ist, indem wir die Methode von Minkowski anwenden.

1.

k sei ein Funktionenkörper über dem vollkommenen Konstantenkörper Ω. $\bar{\Omega}$ sei ein beliebiger vollkommener Oberkörper von Ω, wir schreiben $k\Omega = K$. Dann ist

$$\mathrm{Ord}_{k\bar{\Omega}}\mathfrak{d} = \mathrm{Ord}_{K/\bar{\Omega}}\mathfrak{d}, \qquad \{\mathfrak{d}\}_{k/\Omega} = \{\mathfrak{d}\}_{K/\bar{\Omega}},$$

das letztere folgt daraus, daß eine Normalbasis bei konstanter Erweiterung Normalbasis bleibt. Da eine konstante Erweiterung unverzweigt ist, ist $\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{o}^2}$ ein Divisor der Differentialklasse in beiden Körpern; aus dessen Ordnung

[1]) F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 27.

ergibt sich, daß k und K dasselbe Geschlecht haben. (Im Nichtkommutativen kann das Geschlecht jedoch erniedrigt werden.)

Wir werden mit $\mathfrak{d}$ alle Divisoren, $\mathfrak{a}$ Divisoren der Ordnung 0, (α) Zahldivisoren, ε Konstanten des Körpers k bezeichnen, im Körper K verwenden wir entsprechend große Buchstaben. $\{\mathfrak{a}\} = 0$ kennzeichnet diejenigen $\mathfrak{a}$, die nicht Zahldivisoren in k sind, sie können es daher auch nicht in K werden. D. h. die Klassen von k können in K nicht zusammenfallen.

Von jetzt ab setzen wir voraus, daß $\overline{\Omega}/\Omega$ zyklisch ist, σ sei ein erzeugender Automorphismus. $1 - \sigma$ werde mit Δ bezeichnet, N bedeute Normbildung. Die folgenden Schlüsse sind dem Umkehrsatz der Klassenkörpertheorie[2]) entnommen, wir können daher einige Erklärungen sparen. Alle Lösungen der Gleichungen

$$\mathfrak{D}^{\Delta} = (1), \quad \mathsf{E}^{N} = 1, \quad \mathsf{A}^{N} = 1, \quad \mathfrak{D}^{N} = (1) \tag{1}$$

werden durch

$$\mathfrak{d}, \qquad \mathsf{E}^{\Delta}, \qquad \mathsf{A}^{\Delta}, \qquad \mathfrak{D}^{\Delta}$$

gegeben. Wir definieren gewisse Untergruppen durch die Gleichungen

$$\mathfrak{A}_1^{N} = (\alpha_1); \quad \mathfrak{D}_2^{\Delta} = (\mathsf{A}_2) \quad \text{oder} \quad \mathsf{A}_2^{N} = \varepsilon_2. \tag{2}$$

Durch Anwendung von N, $(\,)$, Δ folgen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (\mathsf{A}_2 : \mathsf{A}^{\Delta}\mathsf{E}) &= (\varepsilon_2 : \mathsf{E}^{N}) \\ (\mathfrak{D}_2 : (\mathsf{A})\mathfrak{d}) &= ((\mathsf{A}_2) : (\mathsf{A})^{\Delta}). \end{aligned} \tag{3}$$

Für den Rest dieses Abschnittes sei Ω ein Galoisfeld. Dann ist $\varepsilon = \mathsf{E}^{N}$, daher hat jeder Index in (3) den Wert 1. Da die Klassenanzahl $(\mathfrak{A} : (\mathsf{A}))$ endlich ist, folgt durch Anwendung von Δ und N

$$(\mathfrak{A} : (\mathsf{A})) = \begin{cases} (\mathfrak{A}^{\Delta} : (\mathsf{A})^{\Delta}) \cdot (\mathfrak{a} : (\alpha)) \\ (\mathfrak{A}^{N} : (\mathsf{A})^{N}) \cdot (\mathfrak{D}^{\Delta} : \mathfrak{D}_2^{\Delta}). \end{cases} \tag{4}$$

Nach (3) ist $\mathfrak{D}_2 = (\mathsf{A})\mathfrak{d}$, oder

$$(\mathfrak{D} : \mathfrak{D}_2) \cdot (\mathfrak{a} : (\alpha)) = (\mathfrak{D} : \mathfrak{A}\mathfrak{d}) \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{d} : (\mathsf{A})\mathfrak{d}) \cdot (\mathfrak{a} : (\alpha)).$$

Hierin werden zwei Indizes mit Δ potenziert, und die sich so ergebende Gleichung nach (4) umgeformt:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{D}^{\Delta} : \mathfrak{D}_2^{\Delta}) \cdot (\mathfrak{a} : (\alpha)) &= (\mathfrak{D} : \mathfrak{A}\mathfrak{d}) \cdot (\mathfrak{A}^{\Delta} : (\mathsf{A})^{\Delta}) \cdot (\mathfrak{a} : (\alpha)), \\ (\mathfrak{D}^{\Delta} : \mathfrak{D}_2^{\Delta}) \cdot (\mathfrak{a} : (\alpha)) &= (\mathfrak{D} : \mathfrak{A}\mathfrak{d}) \cdot (\mathfrak{A}^{N} : (\mathsf{A})^{N}) \cdot (\mathfrak{D}^{\Delta} : \mathfrak{D}_2^{\Delta}). \end{aligned} \tag{5}$$

Durch Umformung des zweiten und dritten Index geht ferner $(\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^{N}(\alpha)) \cdot (\mathfrak{A}^{N}(\alpha) : (\alpha)) \cdot (\alpha_1 : \mathsf{A}^{N})$ über in $(\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^{N}(\alpha)) \cdot (\mathfrak{A}^{N} : (\alpha_1)) \cdot ((\alpha_1) : (\mathsf{A})^{N})$, oder durch Zusammenfassung ist

$$(\mathfrak{a} : (\alpha)) \cdot (\alpha_1 : \mathsf{A}^{N}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^{N}(\alpha)) \cdot (\mathfrak{A}^{N} : (\mathsf{A})^{N}). \tag{6}$$

---

[2]) H. Hasse, Vorlesungsausarbeitung über Klassenkörpertheorie. Marburg 1933.

Da leicht folgt, daß sämtliche Indizes endlich sind, können wir (5) und (6) folgendermaßen schreiben:

$$(7) \qquad \frac{(\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^N(\alpha))}{(\alpha_1 : \mathsf{A}^N)} = \frac{(\mathfrak{a} : (\alpha))}{(\mathfrak{A}^N : (\mathsf{A})^N)} = (\mathfrak{D} : \mathfrak{A}\mathfrak{d}).$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Satz von F. K. Schmidt beweisen. $\mathfrak{d}_0$ sei ein Divisor von der möglichst kleinen positiven Ordnung n. In der konstanten Erweiterung n-ten Grades K wird dann jeder Primdivisor von k vollständig zerlegt, daraus folgt $\mathfrak{d} = \mathfrak{D}^N$ und $(\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^N(\alpha)) = 1$. Ist speziell $\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{D}_0^N$, so hat $\mathfrak{D}_0$ die Ordnung 1, daher ist $(\mathfrak{D} : \mathfrak{A}\mathfrak{d}) = n$. Beim Einsetzen der beiden Werte in (7) erkennen wir, daß $n = 1$ sein muß, q. e. d.

Ist K wieder irgendeine konstante Erweiterung, so ergibt sich noch nach dem soeben bewiesenen Satz $(\mathfrak{D} : \mathfrak{A}\mathfrak{d}) = 1$. Auf analytischem Wege läßt sich der Normensatz $(\alpha_1 : \mathsf{A}^N) = 1$ beweisen, vermutlich kann dieser Beweis aber nicht arithmetisch erbracht werden.

2.

Für irgend zwei Zahlen $a, b \neq 0$ aus dem festen vollkommenen Konstantenkörper Ω, dessen Charakteristik nicht 2 sei, definieren wir die *Algebra* (a, b) durch die Basis 1, u, v, uv und die Regeln $u^2 = a$, $v^2 = b$, $vu = -uv$; den *Funktionenkörper* $\Omega_{a,b}$ durch die Gleichung

$$a x^2 + b y^2 - ab = 0.$$

Satz: *Aus* $(a, b) \simeq (c, d)$ *folgt* $\Omega_{a,b} \simeq \Omega_{c,d}$.

Beweis: In der Norm

$$\mathfrak{w}^2 - a x^2 - b y^2 + ab z^2 = \mathfrak{w}^2 - c\xi^2 - d\eta^2 + cd\zeta^2$$

hängen die griechischen Variablen linear von den lateinischen ab, und umgekehrt. Ersetzen wir $\mathfrak{w}, x, y, z$ durch die Größen $0, x, y, 1$ des Körpers $\Omega_{a,b}$, so kann ζ nicht verschwinden, und es folgt

$$c\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 + d\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^2 - cd = 0.$$

Wegen $1 = \zeta \cdot z\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}, 1\right)$ ist daher

$$\Omega_{c,d} \simeq \Omega\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right) = \Omega(\xi, \eta, \zeta) = \Omega(x, y) = \Omega_{a,b}.$$

Speziell ist also $\Omega_{a,b} \simeq \Omega_{b, -\frac{b}{a}} = \Omega(x, \sqrt{a x^2 + b})$.

Nun sei k irgendein Funktionenkörper vom Geschlecht 0. Angenommen, k besitze einen Divisor $\mathfrak{d}_0$ der Ordnung 1. Dann ist nach dem Riemann-Rochschen Satz $\{\mathfrak{d}_0\} = 2$, es gibt daher in der Klasse von $\mathfrak{d}_0$ zwei un-

abhängige Primdivisoren p und q. Da der Nenner von $(x) = \frac{p}{q}$ die Ordnung 1 hat, ist $k = \Omega(x)$. Aus $(a, b) \sim 1$ folgt $\Omega_{a,b} \simeq \Omega(x)$, denn in $\Omega_{a,b} \simeq \Omega(x, \sqrt{x^2+1})$ wird das Ideal x zerlegt, liefert also einen Divisor erster Ordnung. In der weiteren Untersuchung der Körper k vom Geschlecht 0 lassen wir jetzt den Fall $k \simeq \Omega(x)$ beiseite.

Ist $\mathfrak{w}$ ein Differentialdivisor, so ist wieder nach dem Riemann-Rochschen Satz $\{\frac{1}{\mathfrak{w}}\} = 3$, es gibt daher in der Klasse von $\frac{1}{\mathfrak{w}}$ mindestens zwei unabhängige Primdivisoren p und q. Da der Nenner von $(x) = \frac{p}{q}$ die Ordnung 2 hat, ist $k/\Omega(x)$ vom Grade 2. k kann somit durch eine Gleichung $y^2 = f(x)$ definiert werden, wobei $f(x)$ ein quadratfreies Polynom n-ten Grades ist. Andererseits hat die Gleichung $y^2 = f(x)$ das Geschlecht $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Daher ist $n = 2$, denn $n = 1$ führt auf den bereits erledigten Fall zurück. Durch eine lineare Transformation in x läßt sich die erzeugende Gleichung auf die Normalform $y^2 = ax^2 + b$ bringen, sodaß immer $k \simeq \Omega_{a,b}$ wird. Hier ist $(a, b) \neq 1$. Umgekehrt, ist $(a, b) \neq 1$, so ist auch $\Omega_{a,b} \neq \Omega(x)$; denn wegen $N(xu + yv + uv) = 0$ zerfällt der Schiefkörper (a, b) über $\Omega_{a,b}$, während über $\Omega(x)$ sicher kein Zerfall stattfindet.

p sei ein Primdivisor des Funktionenkörpers k, und $k_\mathfrak{p}$, $k/\mathfrak{p}$ der zugehörige Grenzkörper bzw. Restklassenkörper. Ist dann S eine Algebra über dem Konstantenkörper Ω, so gilt der

Hilfssatz: $S_{k_\mathfrak{p}} \sim 1$ und $S_{k/\mathfrak{p}} \sim 1$ bedingen sich gegenseitig.

Beweis: Die Basis von S kann als Basis einer Maximalordnung von $S_{k_\mathfrak{p}}$ gewählt werden, diese Maximalordnung ist unverzweigt und hat den Restklassenring $S_{k\mathfrak{p}}$. Nach der Theorie von Hasse[3]) haben dann $S_{k_\mathfrak{p}}$ und $S_{k/\mathfrak{p}}$ denselben Index.

Satz: *Nur zwei Algebren S zerfallen über $k \simeq \Omega_{a,b}$, nämlich* 1 *und* (a, b).

Beweis: Um die Beziehung (3) des vorigen Abschnittes verwenden zu können, wählen wir einen festen Primdivisor p von zweiter Ordnung aus k, den Restklassenkörper bezeichnen wir mit $\bar{\Omega}$, und setzen wieder $K = k\bar{\Omega}$. p wird also in K zerlegt und liefert dort einen Divisor erster Ordnung. In K ist nach dem Riemann-Rochschen Satz $\{\mathfrak{A}\} = 1$, daher ist jedes $\mathfrak{A} = (\mathsf{A})$ und jedes $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_2$. Aus $S_k \sim 1$ folgen $S_{k_\mathfrak{p}} \sim 1$ und $S_{k/\mathfrak{p}} \sim 1$, somit hat S die Form $(\varepsilon, \bar{\Omega}, \sigma)$. Die Anzahl solcher S ist aber $(\varepsilon_2 : \mathsf{E}^N) = (\mathfrak{D} : \mathfrak{A}\mathfrak{d}) = 2$.

[3]) H. Hasse, Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme. Math. Ann. 104 (1931).

Beide Sätze stellen zusammengenommen eine *gegenseitige Beziehung zwischen den Körpern* $\Omega_{a,b}$ einerseits *und den Algebren* (a, b) andererseits dar.

3.

Zur Konstruktion des Gegenbeispiels zum Normensatz nehmen wir Ω als rationalen Körper. (a, b) bzw. $S = (c, d)$ möge die Verzweigungsstellen p_1, p_2, p_3, p_4 bzw. p_1, p_2 haben. (In dem eingangs erwähnten Beispiel haben wir $p_1, p_2, p_3, p_4 = \infty, 2, 3, 7$ gewählt.) Nach dem im vorigen Abschnitt Bewiesenen zerfällt S nicht über $k = (x, \sqrt{a x^2 + b})$. Wir behaupten, daß S trotzdem über dem Grenzkörper $\bar{k}$ irgendeiner Bewertung von k zerfällt.

Wenn die Bewertung von k allen rationalen Zahlen (außer der 0) den Betrag 1 erteilt, so ist $\bar{k}$ ein p-adischer Oberkörper $k_\mathfrak{p}$ von k. Unter Verwendung des Hilfssatzes schließen wir folgendermaßen: Aus $(a, b)_k \sim 1$ folgt $(a, b)_{k_\mathfrak{p}} \sim 1$ und $(a, b)_{k|\mathfrak{p}} \sim 1$. Daher sind die p_1- und p_2-Grade von $k/\mathfrak{p}$ gerade Zahlen, folglich ist auch $S_{k|\mathfrak{p}} \sim 1$ und $S_{k_\mathfrak{p}} \sim 1$.

Wenn die Bewertung von k die rationalen Zahlen p-adisch bewertet, so ist $\Omega_p \leqq \Omega_p (x, \sqrt{a x^2 + b}) \leqq \bar{k}$. Für $p = p_1$ oder p_2 fallen (a, b) und S über Ω_p zusammen, und beide haben den Zerfällungskörper $\Omega_p (x, \sqrt{a x^2 + b})$. Ist dagegen $p \neq p_1, p_2$, so zerfällt S schon in Ω_p. —

Es soll noch bemerkt werden, daß sich der Satz von den zerfallenden Algebren über den Körpern vom Geschlecht 0 leicht arithmetisch beweisen läßt, wenn Ω ein Galoisfeld oder ein p-adischer Zahlkörper ist. Denn nach dem Satz von Tsen[4]) besitzt jede Algebra S über k einen konstanten Zerfällungskörper $K = k\bar{\Omega}$ von endlichem Grade. Nach einer bekannten Reduktion[5]) genügt es, K/k als zyklisch anzunehmen. Zerfällt dann $S = (\alpha, K, \sigma)$ an jeder Stelle, so ist jedenfalls $(\alpha) = \mathfrak{A}^N = (\mathsf{A})^N$, denn die Klassenzahl ist ja 1. Wird $\frac{\alpha}{\mathsf{A}^N} = \varepsilon$ gesetzt, so ist $S \simeq (\varepsilon, \bar{\Omega}, \sigma)_k = T_k$. Enthält k einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von erster Ordnung, so muß T über $k/\mathfrak{p} \simeq \Omega$ zerfallen. Anderenfalls enthält $k \simeq \Omega_{a,b}$ einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von zweiter Ordnung, und T besitzt den quadratischen Zerfällungskörper $k/\mathfrak{p}$. Da es über Ω höchstens einen quadratischen Schiefkörper gibt, stimmt T mit 1 oder (a, b) überein, und zerfällt also über k.

---

[4]) Ch. Tsen, Divisionsalgebren über Funktionenkörpern. Gött. Nachr. 1933, S. 335.

[5]) H. Hasse, Die Struktur der R. Bauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Math. Ann. 107 (1933), S. 748.

4.

Der Beweis des Satzes von den zerfallenden Algebren zeichnete sich bei gewissen Grundkörpern vom Geschlecht 0 durch besondere Einfachheit aus. Ähnlich wird es, wenn wir als Grundkörper die rationalen Zahlen nehmen und uns auf quadratische Schiefkörper beschränken. Wir werden hier einen kurzen geometrischen Beweis geben für die gleichwertige Tatsache, daß die (reduzierte) Diskriminante eines quadratischen Schiefkörpers stets von ± 1 verschieden ist.

Der Schiefkörper S enthalte die Maximalordnung G mit der Diskriminante $-d^2$. Werden zum Grundkörper alle reellen Zahlen hinzugenommen, so entsteht das einfache System $S_\infty \simeq (\pm 1, -1)$, d. h. entweder das Matrizen- oder das Quaternionensystem. Die Basisgrößen $1, u, v, uv$ mit der Diskriminante -4^3 deuten wir als Basisvektoren des rechtwinkligen vierdimensionalen Raumes. In ihm erscheint die Maximalordnung G als ein Gitter, dessen Grundmasche das Volumen $\frac{d}{4}$ hat. Die offene Einheitskugel vom Volumen $\frac{\pi^2}{2}$ enthält nur den Gitterpunkt 0, denn in ihr ist $|N(w + xu + yv + zuv)| = |w^2 \mp x^2 + y^2 \mp z^2| \leqq w^2 + x^2 + y^2 + z^2 < 1$, andererseits ist die Norm für jeden Gitterpunkt ganzzahlig und verschwindet im Schiefkörper nur für 0. Wir können also das Theorem von Minkowski über konvexe Körper anwenden und erhalten $\frac{\pi^2}{2} \leqq 2^4 \cdot \frac{d}{4}$ oder $d \geqq \frac{\pi^2}{8} > 1$.

Leider konnte ich für höheren Index keinen konvexen Körper ausfindig machen, der das Entsprechende leistet.

Göttingen, im April 1934.

(Eingegangen am 21. April 1934.)

Über die Stirlingsche Reihe.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. B.

1. Die Darstellung von $\log \Gamma(s)$ als Summe aus dem Stirlingschen Näherungsausdruck

$$s \log s - \tfrac{1}{2} \log s - s + \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$

und einem Restintegral, sowie die Entwicklung des letzteren in die asymptotische Stirlingsche Reihe lassen sich im Rahmen der Theorie der Laplace-Transformation so einfach und übersichtlich bewerkstelligen, daß es angebracht sein mag, dies kurz darzulegen.

2. Wir betrachten die Funktion

$$f(s) = \log \Gamma(s) - s \log s + \tfrac{1}{2} \log s + s - \tfrac{1}{2} \log 2\pi,$$

von der man schon in den Anfängen der Analysis zu zeigen pflegt, daß sie für ganzzahlig wachsendes $s = n$ wie $\frac{1}{n}$ gegen Null strebt. Es ist also naheliegend, von ihr auszugehen. Unter der Annahme, daß diese Funktion eine Laplace-Transformierte, d. h. für alle s, deren Realteil einen gewissen Betrag übertrifft, in der Form

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}\{F\}$$

darstellbar ist (F = Objektfunktion, f = Resultatfunktion), läßt sich das zugehörige $F(t)$ leicht aus der Funktionalgleichung der Γ-Funktion gewinnen. Aus

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

folgt durch logarithmische Differentiation:

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{1}{s}.$$

Wegen

$$f'(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log s + \frac{1}{2s}$$

liefert das für $f(s)$ folgende Relation:

$$f'(s+1) + \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} = f'(s) + \log s - \frac{1}{2s} + \frac{1}{s}$$

oder

$$f'(s+1) - f'(s) = -\log \frac{s+1}{s} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right).$$

Beachtet man folgende Eigenschaften[1]) der Laplace-Transformation:

$$\mathfrak{L}\{tF(t)\} = -f'(s), \qquad \mathfrak{L}\{e^{-t}F(t)\} = f(s+1),$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \log\frac{s+1}{s}, \qquad \mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad \mathfrak{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1},$$

so kann man diese Differenzengleichung für $f'(s)$ sofort in folgende algebraische Gleichung für F „übersetzen“:

$$-te^{-t}F(t) + tF(t) = -\frac{1-e^{-t}}{t} + \frac{1}{2}(1+e^{-t}),$$

aus der

$$F(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)$$

folgt. Damit ergibt sich die bekannte fundamentale Formel:

$$\log\Gamma(s) = s\log s - \frac{1}{2}\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)dt.$$

3. Die Ableitung der asymptotischen Entwicklung des Restes, d. h. der *Stirlingschen Reihe*, stellt sich nun als ein hübsches Beispiel einer sogenannten „direkten Asymptotik Abelscher Art“[2]) dar. Der Rest tritt in Gestalt einer Laplace-Transformierten $f(s)$ auf. Für das Verhalten einer solchen bei $s \to \infty$ ist aber das Verhalten der zugehörigen Objektfunktion $F(t)$ für $t \to 0$ maßgebend, und dieses ist hier sehr einfach zu beherrschen. Der einschlägige allgemeine Satz[3]) lautet:

Ist die Objektfunktion $F(t)$ für $t \geqq 0$ definiert und bei $t = 0$ regulär: $F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$ (oder auch nur: Wird $F(t)$ für $t \to 0$ durch eine Reihe $\sum a_m t^m$ mit nicht notwendig ganzen m asymptotisch dargestellt), so gilt für

---

[1]) Sie lassen sich leicht nachrechnen. Die Formel für $\mathfrak{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}$ gewinnt man am einfachsten durch Reihenentwicklung: Für $\Re s > 0$ ist

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n!}\,dt$$

oder, da die Vertauschung von Summe und Integral gerechtfertigt werden kann (vgl. etwa Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, second edition, London 1926, S. 500), für $\Re s > 0$ und $|s| > 1$:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\,\mathfrak{L}\{t^{n-1}\} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,\frac{1}{s^n} = \log\left(1+\frac{1}{s}\right).$$

[2]) Wegen dieser Terminologie siehe meine Arbeit: Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 167 (1932) S. 274—293 (S. 277, 281).

[3]) Er findet sich bewiesen l. c. [2]), S. 284, 285.

$f(s)$, falls das Laplace-Integral absolut konvergiert, in dem Winkelraum $|\arg s| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig folgende asymptotische Poincarésche Entwicklung (die formal durch gliedweise Laplace-Transformation entsteht):

$$f(s) \sim \sum_0^\infty a_m \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \qquad \text{für } s \to \infty,$$

genauer:

$$s^\nu \left\{ f(s) - \sum_{m=1}^{\nu} a_{m-1} \frac{\Gamma(m)}{s^m} \right\} = O\left(\frac{1}{s}\right) \to 0.$$

Unsere Funktion $F(t)$ ist für $|t| < 2\pi$ regulär, also in eine Potenzreihe entwickelbar, und zwar dient sie bekanntlich als „erzeugende Funktion" für die Bernoullischen Zahlen:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} t^{2(n-1)}.$$

Mithin ergibt sich für das Restintegral die asymptotische (Stirlingsche) Reihe:

$$f(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{(2n-2)!}{s^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n-1)\,2n} \cdot \frac{1}{s^{2n-1}},$$

die in $|\arg s| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig gilt.

4. Es ist unmittelbar einzusehen, daß die *Ableitungen* von $f(s)$ durch die formal gliedweise gebildeten Ableitungen der asymptotischen Reihe dargestellt werden. Denn die Resultatfunktion $f(s)$ ν-mal differenzieren bedeutet bekanntlich, die Objektfunktion mit $(-t)^\nu$ multiplizieren:

$$\mathfrak{L}\{(-t)^\nu \cdot F\} = f^{(\nu)}(s).$$

War $F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$, so ist $\qquad (-t)^\nu \cdot F(t) = (-1)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{m+\nu}$;

die asymptotische Entwicklung von $f^{(\nu)}(s)$ lautet also nach dem oben angeführten Satz:

$$f^{(\nu)}(s) \sim (-1)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{s^{m+\nu+1}}.$$

Diese Reihe entsteht aber aus

$$f(s) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$$

durch ν-maliges gliedweises Differenzieren.

Es ist also z. B.

$$f'(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \log s + \frac{1}{2s} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{2n} \cdot \frac{1}{s^{2n}}.$$

5. Die Formel für den Rest war gewonnen worden unter der Voraussetzung, daß $f(s)$ eine Laplace-Transformierte ist. Es ist klar, daß diese Voraussetzung nur durch ein etwas eingehenderes Studium der Γ-Funktion verifiziert werden kann. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die in den letzten Jahren für die Darstellbarkeit einer Funktion durch ein Laplace-Integral angegeben wurden, sind in diesem Fall zu unhandlich. Am schnellsten kommt man noch mit dem schon 1905 von Pincherle[4]) aufgestellten Satz durch:

Wenn $f(s)$ in einer Halbebene $\Re s \geqq \sigma$ regulär ist und sich in die Gestalt

$$f(s) = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1(s)}{s^{1+\vartheta}}$$

setzen läßt, wo $\vartheta > 0$, C_0 eine Konstante und $C_1(s)$ eine für $\Re s \geqq \sigma$ beschränkte Funktion ist, so läßt sich $f(s)$ durch ein für $\Re s > \sigma$ konvergentes Laplace-Integral darstellen.

Daß dies für unsere Funktion $f(s)$ erfüllt ist, sieht man wohl am kürzesten so ein: Aus der Eulerschen Summenformel in ihrer einfachsten Gestalt kann man in wenigen Zeilen den in der ganzen s-Ebene mit Ausnahme der negativen reellen Achse gültigen Ausdruck herleiten[5]):

$$\log \Gamma(s) = s \log s - \frac{1}{2} \log s - s + \left[1 - \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{1+x}\, dx\right] + \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{s+x}\, dx,$$

wo $P_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$ zu setzen ist, also durch periodische Wiederholung der im Intervall $0 \leqq x < 1$ durch $-x + \frac{1}{2}$ definierten Funktion entsteht. — Die Konstante in $[\ldots]$ ist gleich $\frac{1}{2} \log 2\pi$. — Also gilt:

$$f(s) = \int_0^\infty \frac{P_1(x)}{s+x}\, dx \equiv \mathfrak{S}\{P_1\},$$

so daß $f(s)$ hier in Gestalt einer „Stieltjes-Transformierten" auftritt[6]). Setzt man die in $0 \leqq x < 1$ folgendermaßen definierten Funktionen[7]):

---

[4]) S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes. Ann. Éc. Norm. 22 (1905) S. 1—68 (S. 31 ff.).

[5]) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I. 2. Aufl. 1923, S. 306.

[6]) Die Ausrechnung dieses Integrals durch Umwandlung in eine Reihe liefert die Gudermannsche Formel:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{P_1(x)}{s+x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{n - x + \frac{1}{2}}{s+x}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\left(s+n+\frac{1}{2}\right) \log \frac{s+n+1}{s+n} - 1\right\}.$$

[7]) Vgl. Bieberbach l. c. [5]), S. 300 und 307.

$$P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12},$$

$$P_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}$$

periodisch fort, so ist bis auf die Stellen $x = 1, 2, \ldots$

$$P_2'(x) = -P_1(x), \quad P_3'(x) = P_2(x).$$

Also ergibt sich durch partielle Integration:

$$\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{s+x}\,dx = \frac{P_2(0)}{s} - \int_0^\infty \frac{P_2(x)}{(s+x)^2}\,dx = \frac{P_2(0)}{s} - 2\int_0^\infty \frac{P_3(x)}{(s+x)^3}\,dx.$$

Setzt man $\operatorname{Max}|P_3(x)| = M$, $s = re^{i\varphi}$ und $x = r\xi$, so erhält man:

$$\left|\int_0^\infty \frac{P_3(x)}{(s+x)^3}\,dx\right| \leqq M\int_0^\infty \frac{dx}{|s+x|^3} = \frac{M}{r^2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{|e^{i\varphi}+\xi|^3}.$$

Das letzte Integral hat für alle $\varphi \neq \pi$ einen Sinn und hängt stetig von φ ab, ist also z. B. für $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2}$ beschränkt.

Der Pincherlesche Satz ist also mit $C_0 = P_2(0)$, $\vartheta = 1$ und einem $\sigma > 0$ anwendbar.

6. Natürlich kann man, wenn auch mit Überlegungen, die vollständig durchgeführt etwas weitläufig sind, *direkt* beweisen, daß die beiden Ausdrücke für den Rest gleich sind:

$$\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{s+x}\,dx = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt.$$

Es ist für $\Re s > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{P_1(x)}{s+x}\,dx = \int_0^\infty P_1(x)\,dx \int_0^\infty e^{-(s+x)t}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_0^\infty e^{-tx}P_1(x)\,dx,$$

wobei die Vertauschung der Integrationsfolge zulässig ist, weil, wie man durch Ausrechnung bestätigt, das ursprüngliche iterierte Integral und die beiden inneren Integrale konvergent bleiben, wenn man alle Funktionen durch ihre Absolutbeträge ersetzt[8]).

Weiter kann man nachrechnen, daß das letzte Integral nach x unsere frühere Funktion $F(t)$ darstellt, womit wir hier nebenbei finden, daß $F(t)$ selbst eine Laplace-Transformierte ist. Die vollständigen Zusammenhänge werden durch das Formelsystem charakterisiert:

$$\mathfrak{L}\{P_1\} = F(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathfrak{L}\{F\} = f(s) = \log\Gamma(s) - s\log s + \tfrac{1}{2}\log s + s - \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

$$\mathfrak{S}\{P_1\} = \mathfrak{L}\{\mathfrak{L}\{P_1\}\} = f(s).$$

[8]) Siehe den bei Bromwich, l. c. [1]), S. 504, aufgeführten de la Vallee-Poussinschen Satz.

(Eingegangen am 11. Juli 1934.)

Über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen.

Von

Paul Erdös in Budapest.

Einleitung.

Aus dem Primzahlsatz für die arithmetischen Progressionen folgt ohne weiteres, daß jede arithmetische Reihe, deren Anfangsglied und Differenz teilerfremd sind, Primzahlen zwischen ξ und 2ξ enthält, sofern ξ eine (von der arithmetischen Progession abhängige) Schranke übersteigt. Über diese Schranke erfährt man aber aus dem Primzahlsatz nichts Näheres. Natürlich kann man den Beweis des Primzahlsatzes (es wird immer der Primzahlsatz für die arithmetischen Reihen gemeint) so verschärfen, daß man einen expliziten Ausdruck für die fragliche Schranke gewinnt; die dazu erforderlichen Berechnungen (es handelt sich um Ersetzung von O-Abschätzungen durch explizite Ungleichungen) sind aber recht kompliziert und würden eine sehr große Schranke ergeben. Für die Progressionen $3n+1$, $3n+2$, $4n+1$, $4n+3$ hat Herr Breusch[1]) die fraglichen Schranken durch funktionentheoretische Methoden bestimmt und dabei, um möglichst kleine Schranken zu bekommen, genaue zahlenmäßige Angaben über Anzahl und Lage der ersten Nullstellen der zugehörigen L-Funktionen benutzt. Sein Ergebnis lautet: für $\xi > 10^6$ liegen zwischen ξ und 2ξ stets Primzahlen einer jeden der vier oben erwähnten Progressionen; mit Hilfe der Primzahltabellen hat er alsdann die Schranke 10^6 auf 7 vermindert.

Da es sich um elementare Sätze handelt, so erscheint es wünschenswert, die tiefen Hilfsmittel des Herrn Breusch durch elementare Überlegungen (etwa vom gleichen Charakter wie diejenigen, die in der Tschebyschefschen Primzahltheorie zur Anwendung gelangen) zu ersetzen. Nun läßt sich die Methode, durch die ich den Tschebyschefschen Satz, laut dessen es zwischen ξ und 2ξ stets wenigstens eine Primzahl gibt, bewiesen habe[2]), auf den Fall der obenerwähnten arithmetischen Reihen übertragen. Durch dieselbe Methode lassen sich Sätze ähnlicher Art auch für andere arithmetische Reihen beweisen; statt ξ und 2ξ ergeben sich teilweise noch engere, teilweise aber weitere Grenzen.

---

[1]) Robert Breusch, Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, daß zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen, Math. Zeitschr. 34 (1932), S. 505—526.

[2]) P. Erdös, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Litt. ac Scient. Regiae Univ. Hungaricae Francisco Josephinae 5 (1930—1932), S. 194—198.

Der Hauptgedanke der Methode besteht darin, daß wir einen Ausdruck konstruieren, der durch alle Primzahlen, die der fraglichen Progression und dem betreffenden Intervall angehören, teilbar ist, von den übrigen Primzahlen hingegen durch möglichst wenige. Eine Abschätzung dieses Ausdruckes führt dann zum gewünschten Satz.

Im Teil I werden wir die nötigen Hilfssätze über solche Ausdrücke beweisen; im Teil II werden wir dieselben auf die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen anwenden. Um das Wesentliche der Methode klarer hervortreten zu lassen und um Wiederholungen zu vermeiden, werden wir die sich ergebenden Sätze auch dann allgemein formulieren, wenn ihre Voraussetzungen nur für einige Progressionen erfüllt werden. Im Teil III werden wir an dem Beispiel der arithmetischen Reihen $6n+1$, $6n+5$, $4n+1$, $4n+3$ zeigen, wie man die dabei auftretenden Schranken numerisch bestimmen kann. (Diese Progressionen sind im wesentlichen dieselben, wie bei Breusch; in der Tat sind die Primzahlen von der Form $3n+1$ dieselben, wie die von der Form $6n+1$; und die Primzahlen von der Form $3n+2$, außer 2, dieselben, wie die von der Form $6n+5$.) Die erhaltenen Schranken liegen in diesen Fällen übrigens tief unter 10^6.

Das Anfangsglied und die Differenz der arithmetischen Progression, um die es sich handelt, bezeichnen wir dauernd mit a bzw. d. Überhaupt sollen lateinische Buchstaben stets positive ganze Zahlen, der Buchstabe p (mit beliebigen Indizes) eine Primzahl, griechische Buchstaben stets positive Zahlen bedeuten; eine einzige Ausnahme bildet Hilfssatz 3, wobei k auch Null sein kann. Es wird stets $a < d$, $d \geqq 2$ und $(a, d) = 1$ vorausgesetzt; eine Kongruenz, deren Modul nicht angegeben ist, soll stets modulo d gelten.

I. Hilfssätze.

1. Die in der Einleitung erwähnten Ausdrücke werden mit Hilfe von Ausdrücken von der Form

$$P_n(a,d) = \frac{\prod_{p \mid d} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \prod_{k=1}^{n} (a+kd)}{n!} \tag{1}$$

aufgebaut; wir werden zunächst einige Hilfssätze über diese Ausdrücke $P_n(a, d)$ beweisen.

Vor allem zeigen wir, daß $P_n(a, d)$ (unter der vorausgesetzten Bedingung $(a, d) = 1$) eine ganze Zahl ist. Es sei p eine beliebige Primzahl; der Zähler bzw. der Nenner von (1) sei genau durch die $U_p(n)$-te bzw. $V_p(n)$-te Potenz von p teilbar; es ist zu zeigen, daß $U_p(n) \geqq V_p(n)$.

Bekanntlich ist

$$(2) \qquad V_p(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots \leqq \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \ldots = \frac{n}{p-1},$$

also, da $V_p(n)$ eine ganze Zahl ist, $V_p(n) \leqq \left[\frac{n}{p-1}\right]$, wodurch unsere Behauptung für p/d bewiesen ist. Ist aber $p \nmid d$, so ist $U_p(n)$ offenbar gleich der Anzahl der durch p teilbaren Faktoren des zweiten Produktes im Zähler von (1) plus Anzahl der durch p^2 teilbaren Faktoren desselben Produktes plus usw.; nun hat aber die Kongruenz

$$(3) \qquad a + k\,d \equiv 0 \pmod{p^r}$$

im fraglichen Intervall $1 \leqq k \leqq n$ wenigstens $\left[\frac{n}{p^r}\right]$ Lösungen in k, da jenes Intervall so viel vollständige Restsysteme mod p^r enthält; also ist auch in diesem Fall

$$U_p(n) \geqq \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots = V_p(n).$$

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen bemerken wir, daß der Ausdruck

$$(4) \qquad P'_n(a, d) = \frac{\prod\limits_{p/d} p^{\left[\frac{n-1}{p-1}\right]} \prod\limits_{k=1}^{n} (a + (k-1)\,d)}{n!}$$

ebenfalls ganz ist. In der Tat gilt in (2) stets das Ungleichheitszeichen, da gewiß verschwindende Glieder durch nichtverschwindende ersetzt wurden. Daher ist

$$(p-1)\,V_p(n) < n;\ (p-1)\,V_p(n) \leqq n-1;\ V_p(n) \leqq \left[\frac{n-1}{p-1}\right],$$

so daß die Primzahlen p/d im Zähler von (4) auf wenigstens so hoher Potenz enthalten sind, wie im Nenner. Für die Primzahlen $p \nmid d$ gilt aber dieselbe Betrachtung wie früher, da der Umstand, daß für die Lösungen der Kongruenz (3) statt $1 \leqq k \leqq n$ das Intervall $0 \leqq k \leqq n-1$ in Frage kommt, nichts ändert.

2. Über die Größenordnung von $P_n(a, d)$ unterrichtet der

Hilfssatz 1. Es ist

$$P_n(a, d) = \alpha^{n + o(n)},$$

wobei

$$\alpha = \alpha(d) = d \prod_{p/d} p^{\frac{1}{p-1}}.$$

Beweis. Wegen

$$\frac{n}{p-1} - \frac{p-2}{p-1} \leqq \left[\frac{n}{p-1}\right] \leqq \frac{n}{p-1}$$

und

$$k\,d \leqq a + k\,d \leqq (k+1)\,d$$

gilt

$$(5)\qquad \prod_{p|d} p^{-\frac{p-2}{p-1}}\left(d\prod_{p|d} p^{\frac{1}{p-1}}\right)^n \leqq P_n(a,d) \leqq (n+1)\left(d\prod_{p|d} p^{\frac{1}{p-1}}\right)^n,$$

und hier sind beide Schranken von der Form $\alpha^{n+o(n)}$.

3. Betreffend der zahlentheoretischen Struktur von $P_n(a,d)$ beweisen wir zwei Hilfssätze; der erste liefert eine grobe Abschätzung des Beitrages einer beliebigen Primzahl zu $P_n(a,d)$; der zweite gibt für die größeren Primzahlen über feinere Einzelheiten Rechnung.

Hilfssatz 2. Es sei $p^{W_p(n)}$ die höchste Potenz von p, die die Zahl $P_n(a,d)$ teilt. Dann ist

$$p^{W_p(n)} \leqq (n+1)d.$$

Beweis. Es ist $W_p(n) = U_p(n) - V_p(n)$; also, falls $t_{p^r}(n)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (3) im Intervall $1 \leqq k \leqq n$ bezeichnet, für $p \nmid d$

$$W_p(n) = \left\{t_p(n) - \left[\frac{n}{p}\right]\right\} + \left\{t_{p^2}(n) - \left[\frac{n}{p^2}\right]\right\} + \cdots.$$

Bestimmt man r_0 aus der Ungleichung $p^{r_0} \leqq a + nd < p^{r_0+1}$, so ist $\left[\frac{n}{p^r}\right] = t_{p^r}(n) = 0$ für $r > r_0$. Ferner ist, da das Intervall $1 \leqq k \leqq n$ aus $\left[\frac{n}{p^r}\right]$ vollständigen Restsystemen mod p^r und aus einem Bruchstück des $\left[\frac{n}{p^r}\right]+1$-ten besteht, $t_{p^r}(n) \leqq \left[\frac{n}{p^r}\right]+1$; daher ist im Fall $p \nmid d$ $W_p(n) \leqq r_0$. Dasselbe gilt aber auch im Fall $p|d$, da in diesem Fall

$$\begin{aligned} W_p(n) = \left[\frac{n}{p-1}\right] - V_p(n) &\leqq \left\{\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right]\right\} + \left\{\frac{n}{p^2} - \left[\frac{n}{p^2}\right]\right\} + \cdots \\ &\quad + \left\{\frac{n}{p^{r_0}} - \left[\frac{n}{p^{r_0}}\right]\right\} + \frac{n}{p^{r_0+1}} + \frac{n}{p^{r_0+2}} + \cdots \\ &\leqq r_0 + \frac{n}{p^{r_0}}\,\frac{1}{p-1} < r_0 + \frac{n}{a+nd}\,\frac{p}{p-1} \leqq r_0 + \frac{2}{d} \leqq r_0 + 1. \end{aligned}$$

Also ist jedenfalls

$$p^{W_p(n)} \leqq p^{r_0} \leqq a + nd \leqq (n+1)d.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt, daß für $p > \sqrt{(n+1)d}$ die Zahl $P_n(a,d)$ nicht durch p^2 teilbar sein kann; also ist sie entweder zu p teilerfremd, oder nur durch die erste Potenz von p teilbar. Der folgende Hilfssatz entscheidet für $n \geqq d$, wann die erste und wann die zweite Möglichkeit eintritt.

Hilfssatz 3. Es sei $n \geqq d$, $p > \sqrt{(n+1)d}$, $pb \equiv a$, $b < d$. Gehört p einem Intervall

$$(6)\qquad \frac{a+nd}{b+kd} < p \leqq \frac{n}{k}$$

an, so ist $P_n(a, d)$ nicht durch p teilbar; gehört aber p einem Intervall

$$\frac{n}{k+1} < p < \frac{a+(n+1)d}{b+kd} \tag{7}$$

an, so ist $P_n(a, d)$ durch p teilbar (durch p^2 aber nicht).

Vorbemerkungen. Ausnahmsweise darf $k = 0$ sein; in diesem Fall soll statt (6) $p > \frac{a+nd}{b}$ gelesen werden. — Das Intervall (6) braucht nicht zu existieren, d. h. es kann $\frac{a+nd}{b+kd} > \frac{n}{k}$ sein. Das Intervall (7) existiert jedenfalls wegen

$$\frac{n}{k+1} = \frac{nd}{d+kd} < \frac{a+nd}{b+kd} < \frac{a+(n+1)d}{b+kd}. \tag{8}$$

Falls beide Intervalle existieren, dann überdecken sie sich wegen (8) teilweise; im gemeinsamen Teil

$$\frac{a+nd}{b+kd} < p < \frac{a+(n+1)d}{b+kd} \tag{9}$$

liegt aber keine Primzahl (ja überhaupt keine ganze Zahl) p mit $pb \equiv a$; denn aus (9) würde

$$a + nd < p(b + kd) < a + (n+1)d$$

folgen, entgegen $p(b + kd) \equiv pb \equiv a$.

Beweis des Hilfssatzes 3. Wegen $p^2 > (n+1)d > n$ ist $\left[\frac{n}{p^2}\right] = \left[\frac{n}{p^3}\right] = \ldots = 0$ und $t_{p^2}(n) = t_{p^3}(n) = \ldots = 0$; daher ist, da, wegen $p > \sqrt{nd} \geqq d$, $(p, d) = 1$ ist, $W_p(n) = t_p(n) - \left[\frac{n}{p}\right]$.

Im Falle (6) ist $k \leqq \frac{n}{p}$, also $k \leqq \left[\frac{n}{p}\right]$; ferner, da aus $a + xd \equiv 0 \pmod{p}$, d. h. $a + xd = py$

$$pb \equiv a \equiv py,$$

daher, wegen $(p, d) = 1$, $y \equiv b$ folgt, und da, wegen $p(b + kd) > a + nd$, $y < b + kd$ sein soll, so ist $t_p(n) \leqq k$; also $W_p(n) = 0$.

Dagegen ist im Fall (7) $\frac{n}{p} < k + 1$, also $\left[\frac{n}{p}\right] \leqq k$; ferner ist, wegen $p(b + kd) < a + (n+1)d$ und $p(b + kd) \equiv a$, $p(b + kd) \leqq a + nd$ und, wegen $pb \geqq p > d > a$ und $pb \equiv a$, $pb \geqq a + d$; daher sind die Zahlen

$$pb,\ p(b+d),\ \ldots,\ p(b+kd)$$

von der Form $a + xd$ mit $1 \leqq x \leqq n$ und dabei durch p teilbar; also ist $t_p(n) \geqq k + 1$, daher (wegen $W_p(n) \leqq 1$) $W_p(n) = 1$.

4. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_h$ die zu d teilerfremden Primzahlen $< d$; die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_h$ sollen durch die Bedingungen $p_l q_l \equiv a$, $q_l < d$

(für $l = 1, 2, \ldots, h$) bestimmt werden. Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\Pi_n(a, d) = \frac{P_n(a, d)}{P_{\left[\frac{n}{p_1}\right]}(q_1, d)\, P_{\left[\frac{n}{p_2}\right]}(q_2, d) \ldots P_{\left[\frac{n}{p_h}\right]}(q_h, d)}$$

Aus Hilfssatz 1 ergibt sich für die Größenordnung von $\Pi_n(a, d)$ unmittelbar

Hilfssatz 4. Es ist

$$\Pi_n(a, d) = \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)},$$

wobei

$$\sigma = \sigma(d) = \sum_{\substack{p \neq d \\ p < d}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_h}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \Pi_n(a, d) &= \alpha^{n - \left[\frac{n}{p_1}\right] - \left[\frac{n}{p_2}\right] - \ldots - \left[\frac{n}{p_h}\right] + o(n)} \\ &= \alpha^{n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \ldots - \frac{n}{p_h} + o(n)} \\ &= \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß $\Pi_n(a, d)$ im Falle $\sigma < 1$ mit n über alle Grenzen wächst. Unsere Methoden können nur auf diesen Fall angewandt werden. Die untenstehende Tabelle zeigt, daß diese Bedingung für alle Zahlen bis 6, für alle geraden Zahlen bis 30 und für alle durch 6 teilbaren Zahlen bis $138 = 6 \cdot 23$ erfüllt ist.

d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$
2	0,000 000	15	0,610 689	36	0,732 364	90	0,759 175
3	0,500 000	16	0,844 023	42	0,640 924	96	0,959 175
4	0,333 333	18	0,569 513	48	0,828 313	102	0,920 561
5	0,833 333	20	0,755 478	50	0,961 647	108	0,998 439
6	0,200 000	21	0,979 287	54	0,847 181	114	0,963 832
8	0,676 190	22	0,864 569	60	0,664 130	120	0,816 463
9	0,842,857	24	0,665 623	66	0,789 615	126	0,873 606
10	0,476 190	26	0,922 033	72	0,909 534	132	0,941 062
12	0,433 766	28	0,856 099	78	0,846 309	138	0,995 792
14	0,701 166	30	0,500 105	84	0,805 081	210	0,772 844

5. Die Bedeutung des Ausdrucks $\Pi_n(a, d)$ für die Primzahlen der arithmetischen Progression $a + kd$ liegt in seiner durch folgenden Hilfssatz ausgedrückten Eigenschaft.

Hilfssatz 5. Es sei $n > d^2$; dann ist $\Pi_n(a, d)$ durch keine Primzahl $p > \sqrt{(n+1)d}$ teilbar, für die nicht $p \equiv a$ gilt.

Vorbemerkung. Der Ausdruck $\Pi_n(a, d)$ braucht keine ganze Zahl zu sein. Wir sagen, daß ein Bruch durch eine ganze Zahl m teilbar

ist, falls sein Zähler nach Reduktion des Bruches auf kürzeste Form durch m teilbar ausfällt. Wir sagen ferner, daß ein Bruch genau durch m^r teilbar ist, falls derselbe durch m^r teilbar ist, durch m^{r+1} aber nicht. Sind die ganzen Zahlen A und B genau durch m^r bzw. durch m^s teilbar, so ist der Bruch $\frac{A}{B}$ im Falle $r > s$ genau durch m^{r-s}, im Falle $r \leqq s$ aber nicht durch m teilbar. Bestimmt man zu jeder Primzahl p den Exponent r_p so, daß der Bruch $\frac{A}{B}$ genau durch p^{r_p} teilbar ist, so ist $\frac{A}{B} \leqq \prod_p p^{r_p}$; in der Tat ist $\prod_p p^{r_p}$ gleich dem Zähler des in reduzierte Form gebrachten Bruches $\frac{A}{B}$.

Beweis des Hilfssatzes 5. Es sei $p > \sqrt{(n+1)d}$, $p \neq a$, $n > d^2$; dann ist $p > d$, also $(p, d) = 1$. Daher ist $pb \equiv a$ für b mit $b < d$ lösbar und es ist $b \neq 1$, $(b, d) = 1$; also ist b durch ein p_l $(l = 1, 2, \ldots, h)$ teilbar. Es sei $b = p_l c$; natürlich ist $c < d$ und, wegen $p_l q_l \equiv a \equiv pb = p p_l c$, $p_l c \equiv q_l$. Wir bestimmen die Zahl k aus der Ungleichung

$$\frac{n}{(k+1)\,p_l} < p \leqq \frac{n}{k\,p_l}.$$

Dann ist $p > \frac{1}{k+1}\left[\frac{n}{p_l}\right]$. Im Falle

$$p < \frac{q_l + \left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right) d}{c + k\,d}$$

folgt aus Hilfssatz 3 (der wegen $d \leqq \frac{n}{d} < \frac{n}{p_l}$, also $\left[\frac{n}{p_l}\right] \geqq d$, und $p > \sqrt{\left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right)d}$ anwendbar ist), daß $P_{\left[\frac{n}{p_l}\right]}(q_l, d)$ durch p teilbar ist; da $P_n(a, d)$ nach Hilfssatz 2 nicht durch p^2 teilbar sein kann, so ist $\Pi_n(a, d)$ nicht durch p teilbar. Im Falle

$$p \geqq \frac{q_l + \left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right) d}{c + k\,d} > \frac{q_l + \frac{n}{p_l} d}{c + k\,d} = \frac{p_l q_l + n\,d}{c\,p_l + k\,p_l d}$$

ist aber wegen $p_l q_l \geqq a$, $c\,p_l = b$

$$\frac{a + n\,d}{b + k\,p_l d} < p < \frac{n}{k\,p_l},$$

so daß nach Hilfssatz 3 schon $P_n(a, d)$ nicht durch p teilbar ist.

II. Sätze über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen.

6. Aus Hilfssatz 1 und 3 folgt leicht eine obere Abschätzung für das Produkt der Primzahlen von der Form $a + kd$ unter einer gegebenen

Grenze; diese Abschätzung wird uns auch im folgenden gute Dienste leisten. Diese Abschätzung wird durch den folgenden Satz ausgesprochen.

Satz 1. *Es ist für* $\xi \to \infty$

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq (\alpha(d))^{\frac{\xi}{d-1} + o(\xi)}.$$

Beweis. Es sei $a + nd \leqq \xi < a + (n+1)d$; da $P_n(a, d)$ nach Hilfssatz 3 durch die Primzahlen $p \equiv a$, $n < p < a + (n+1)d$ teilbar ist und da die Primzahlen $p \equiv a$, $\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi$ wegen $n \leqq \frac{\xi - a}{d} < \frac{\xi}{d}$ und $\xi < a + (n+1)d$ unter jenen Primzahlen vorkommen, so ist nach Hilfssatz 1 für $n \to \infty$ bzw. $\xi \to \infty$

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq P_n(a, d) = \alpha^{n + o(n)} \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d} + o(\xi)},$$

daher ist für $\varepsilon > 0$, $\xi \geqq \xi_0(\varepsilon)$

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d}(1+\varepsilon)}.$$

Hieraus folgt, falls $\xi \geqq \xi_0(\varepsilon)$ und r aus $\frac{\xi}{d^{r+1}} < \xi_0(\varepsilon) \leqq \frac{\xi}{d^r}$ bestimmt wird,

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d^2} < p \leqq \frac{\xi}{d} \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d^2}(1+\varepsilon)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d^{r+1}} < p \leqq \frac{\xi}{d^r} \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d^{r+1}}(1+\varepsilon)},$$

daher

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi_0(\varepsilon) \\ p \equiv a}} p \cdot \alpha^{\left(\frac{\xi}{d} + \frac{\xi}{d^2} + \cdots + \frac{\xi}{d^{r+1}}\right)(1+\varepsilon)} \leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi_0(\varepsilon) \\ p \equiv a}} p \cdot \alpha^{\frac{\xi}{d-1}(1+\varepsilon)}$$

und das ist für $\xi \geqq \xi_1(\varepsilon)$ kleiner als $\alpha^{\frac{\xi}{d-1}(1+2\varepsilon)}$

Aus Satz 1 folgt für die Anzahl $\pi(\xi;\ a, d)$ der Primzahlen $p \equiv a$, $p \leqq \xi$ die Ungleichung

$$\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right)^{\pi(\xi;\ a,\ d)\ \frac{\xi}{\log^2 \xi}} \leqq \left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right)^{\pi(\xi;\ a,\ d) - \pi\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi};\ a,\ d\right)}$$

$$\leqq \prod_{\substack{\frac{\xi}{\log^2 \xi} \leqq p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d} + o(\xi)}$$

also

$$\pi(\xi;\ a, d) \leqq \frac{\xi}{\log^2 \xi} + \frac{\frac{\xi}{d}\log\alpha + o(\xi)}{\log\xi - 2\log\log\xi} = \frac{\log\alpha}{d}\frac{\xi}{\log\xi} + o\left(\frac{\xi}{\log\xi}\right),$$

also ist, falls $\beta > \frac{\log\alpha}{d}$, für hinreichend große ξ

$$\pi(\xi;\ a, d) \leqq \beta\frac{\xi}{\log\xi}. \tag{10}$$

7. Im Falle $\sigma < 1$ folgt aus Hilfssatz 2, 4 und 5 als Gegenstück zum Satz 1 der folgende

Satz 2. *Ist $\sigma < 1$, so ist für $\xi \to \infty$*

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq (\alpha(d))^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)}.$$

Vorbemerkung. Hieraus folgt der folgende Spezialfall des klassischen Dirichletschen Satzes: Ist $(a, d) = 1$, $\sigma(d) < 1$, so gibt es unendlich viele Primzahlen von der Form $a + kd$. Aus der Tabelle auf S. 478 sieht man also, daß unsere Methode den Dirichletschen Satz unter anderen für alle arithmetischen Progressionen liefert, deren Differenz < 29 ist; nur muß man die Methode im Fall $d = 7$, 11, 13, 25 und 27 auf $2d$, im Fall $d = 17$, 19 und 23 auf $6d$ statt d anwenden.

Beweis des Satzes 2. Aus Hilfssatz 2 und 5 (vgl. auch Vorbemerkung zum letzteren) folgt für $n > d^2$

$$\Pi_n(a, d) \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{(n+1)d}} (n+1)d \prod_{\substack{\sqrt{(n+1)d} \leqq p \leqq a + nd \\ p \equiv a}} p$$

$$\leqq \{(n+1)d\}^{\sqrt{(n+1)d}} \prod_{\substack{p \leqq a + nd \\ p \equiv a}} p = \alpha^{o(n)} \prod_{\substack{p \leqq a + nd \\ p \equiv a}} p$$

für $n \to \infty$; also, nach Hilfssatz 4,

$$\prod_{\substack{p \leqq a + nd \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)}.$$

Wird hier n zu gegebenem ξ aus der Ungleichung $a + nd \leqq \xi < a + (n+1)d$ bestimmt, so folgt hieraus für $\xi \to \infty$

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{(1-\sigma)\left(\frac{\xi - a}{d} - 1\right) + o(\xi)} = \alpha^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)}.$$

Aus Satz 2 folgt

$$\xi^{\pi(\xi;\ a, d)} > \prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)},$$

also

$$\pi(\xi;\ a,\ d) \geqq \frac{1-\sigma}{d} \log \alpha \frac{\xi}{\log \xi} + o(\xi),$$

also folgt, falls $\gamma < \frac{1-\sigma}{d} \log \alpha$, für hinreichend große ξ das folgende Gegenstück zu (10):

$$\pi(\xi;\ a, d) \geqq \gamma \frac{\xi}{\log \xi}.$$

8. Kombiniert man die beiden Sätze 1 und 2, so ergibt sich

Satz 3. *Ist* $\sigma < 1$, $\lambda > \frac{d}{d-1} \frac{1}{1-\sigma}$, *so gibt es für hinreichend große* ξ *wenigstens eine Primzahl* $p \equiv a$ *im Intervall* $\xi < p \leqq \lambda \xi$.

Beweis. Nach Satz 1 und 2 ist für hinreichend große ξ

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d-1} + o(\xi)} < \alpha^{\frac{1-\sigma}{d} \lambda \xi + o(\xi)} \leqq \prod_{\substack{p \leqq \lambda \xi \\ p \equiv a}} p.$$

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes ist der folgende

Satz 4. *Ist* $\sigma < \frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(d-1)}$, *so gibt es für hinreichend große* ξ *wenigstens eine Primzahl von der Form* $a + kd$ *im Intervall* $\xi < p \leqq 2\xi$.

Beweis. Dann ist nämlich $\sigma < \frac{1}{2} < 1$ und $\frac{d}{d-1} \frac{1}{1-\sigma} < 2$, so daß $\lambda = 2$ gewählt werden kann.

Als Spezialfälle erwähnen wir $d = 6$ und $d = 12$; im ersten Fall ist $\sigma = \frac{1}{5}$, $\frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{2}{5}$, im zweiten Fall aber $\sigma = 0{,}433\,766$ und dies ist kleiner als $\frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{5}{11} = 0{,}454\,545$. Also gibt es für hinreichend große ξ zwischen ξ und 2ξ wenigstens je eine Primzahl von der Form $6k+1$, $6k+5$, $12k+1$, $12k+5$, $12k+7$ und $12k+11$, also auch von der Form $4k+1$ und $4k+3$.

Für den Fall $d = 6$ ergibt übrigens Satz 3 die schärfere Tatsache, daß es für $\lambda > 1{,}5$ und für hinreichend große ξ wenigstens je eine Primzahl von der Form $6k+1$ und $6k+5$ im Intervall $\xi < p < \lambda\xi$ gibt.

9. Satz 4 läßt sich wie folgt verschärfen:

Satz 5. *Ist* $\sigma < \frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{2d^2 - 3d - 1}{2(d-1)(2d+1)}$, *so gibt es für hinreichend große* ξ *zwischen* ξ (exkl.) *und* 2ξ (inkl.) *wenigstens eine Primzahl von der Form* $a + kd$.

Beweis. Betrachten wir den Ausdruck

$$\Phi_n(a, d) = \frac{\Pi_{2n}(a, d)}{P_n(a, d)};$$

wegen Hilfssatz 1 und 4 ist für $n \to \infty$

$$\Phi_n(a,d) = \alpha^{(1-2\sigma)n+o(n)}. \tag{11}$$

Für $n > d^2$ ist $\Phi_n(a,d)$ nach Hilfssatz 5 durch keine Primzahl $p \not\equiv a$ mit $p > \sqrt{(2n+1)d}$ teilbar. Die Primzahlen $p \equiv a$ mit $n < p < a+(n+1)d$ und $p > \sqrt{(2n+1)d} > \sqrt{(n+1)d}$ teilen nach Hilfssatz 3 den Nenner $P_n(a,d)$, also den Ausdruck $\Phi_n(a,d)$ nicht; die Primzahlen $p \equiv a$ mit $\frac{a+2nd}{1+2d} < p \leqq n$, $p > \sqrt{(2n+1)d}$ teilen nach demselben Hilfssatz nicht einmal den Ausdruck $\Pi_{2n}(a,d)$. Also ist nach Hilfssatz 2 und Satz 1 für $n \to \infty$

$$\Phi_n(a,d) \leqq \prod_{p < \sqrt{(2n+1)d}} (2n+1)d \prod_{\substack{\sqrt{(2n+1)d} < p < \frac{a+2nd}{1+2d} \\ p \equiv a}} p \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p$$

$$\leqq \{(2n+1)d\}^{\sqrt{(2n+1)d}} \prod_{\substack{p \leqq \frac{a+2nd}{1+2d} \\ p \equiv a}} p \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p < a+2nd \\ p \equiv a}} p$$

$$\leqq \alpha^{\frac{a+2nd}{1+2d}\frac{1}{d-1}+o(n)} \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p < a+2nd \\ p \equiv a}} p$$

$$= \alpha^{\frac{2d}{(d-1)(2d+1)}n+o(n)} \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p,$$

woraus wegen (11)

$$\prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{\left(1-2\sigma-\frac{2d}{(d-1)(2d+1)}\right)n+o(n)}$$

folgt. Der Koeffizient von n im Exponenten ist nach Voraussetzung positiv; daher ist das Produkt linker Hand für hinreichend große n nicht leer. Also gibt es für hinreichend großes n eine Primzahl $p \equiv a$ im Intervall $a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd$. Diese Primzahl liegt aber, falls man n zu gegebenem, hinreichend großem ξ aus der Ungleichung $a+nd \leqq \xi < a+(n+1)d$ bestimmt, wegen $a+2nd \leqq 2a+2nd \leqq 2\xi$ im Intervall $\xi < p \leqq 2\xi$.

Satz 5 erlaubt eine unmittelbare Behandlung des Falles $d = 2$ und $l = 4$ (ohne Umweg über $d = 12$); in der Tat ist für $d = 2$

$$\frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} > 0 = \sigma,$$

und für $d = 4$ ist

$$\frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{1}{2} - \frac{4}{27} = \frac{19}{54} > \frac{1}{3} = \sigma.$$

Der Fall $d = 10$ ist durch Satz 5 wegen

$$\frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{1}{2} - \frac{10}{189} = \frac{169}{378} < \frac{10}{21} = \sigma$$

noch nicht erledigt.

10. Falls $1 + 2d$ keine Primzahl ist, so läßt sich Satz 5 noch weiter verschärfen. In der Tat ist dann notwendig $d > 3$, also $1 + 2d < d^2$, so daß $1 + 2d$ durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_h$ teilbar ist Für diesen Fall gilt aber der

Satz 6. *Ist, für ein* $l = 1, 2, \ldots, h$, $p_l | 1 + 2d$ *und* $\sigma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p_l(d-1)}$, *so gibt es für hinreichend große* ξ *zwischen* ξ (exkl.) *und* 2ξ (inkl.) *wenigstens eine Primzahl* $p \equiv a$.

Beweis. Es sei $1 + 2d = p_l b$; wegen $3d > 1 + 2d = p_l b \geqq 3b$ ist $b < d$; wegen $a b p_l \equiv a \equiv p_l q_l$ ist $q_l \equiv a b$. Daher ist $\Phi_n(a, d)$ für $n > d^2 > d$, $p > \sqrt{(2n+1)d} > \sqrt{\left(\left[\frac{2n}{p_l}\right] + 1\right)d}$ wegen Hilfssatz 3 durch keine Primzahl $p \equiv a$ mit $\left[\frac{2n}{p_l}\right] < p < \frac{q_l + \left(\left[\frac{2n}{p_l}\right] + 1\right)d}{b}$ teilbar; und hier ist

$$\frac{q_l + \left(\left[\frac{2n}{p_l}\right] + 1\right)d}{b} > \frac{q_l + \frac{2n}{p_l}d}{b} = \frac{p_l q_l + 2nd}{b p_l} \geqq \frac{a + 2nd}{1 + 2d}.$$

Nach den Überlegungen beim Beweis des Satzes 5 ist also $\Phi_n(a, d)$ durch keine Primzahl $p \equiv a$ mit $p > \frac{2n}{p_l}$, $p > \sqrt{(2n+1)d}$ teilbar. Wegen Hilfssatz 2 und Satz 1 ist also für $n \to \infty$

$$\Phi_n(a,d) \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{(2n+1)d}} \{(2n+1)d\} \prod_{\substack{\sqrt{(2n+1)d} < p \leqq \frac{2n}{p_l} \\ p \equiv a}} p \prod_{\substack{a + (n+1)d \leqq p \leqq a + 2nd \\ p \equiv a}} p$$

$$\leqq \alpha^{\frac{2n}{p_l(d-1)} + o(n)} \prod_{\substack{a + (n+1)d \leqq p \leqq a + 2nd \\ p \equiv a}} p.$$

Hieraus und aus (11) folgt wegen $1 - 2\sigma > \frac{2}{p_l(d-1)}$, daß das letzte Produkt nicht leer ist; hieraus folgt aber die Behauptung in gleicher Weise, wie beim Satz 5.

Im Fall $d = 10$ ist $1 + 2d = 21$, also kann man $p_l = 7$ wählen (natürlich ist es zweckmäßig, p_l möglichst groß zu wählen); in diesem Falle ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{p_l(d-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{63} = \frac{61}{126} > \frac{10}{21} = \sigma(10)$. Also gibt es

für hinreichend große ξ im Intervall $\xi < p \leqq 2\xi$ stets wenigstens je eine Primzahl von der Form $10k+1$, $10k+3$, $10k+7$ und $10k+9$.

Analog kann man Satz 5 im Fall verschärfen, falls $1+d$ keine Primzahl ist. Eine weitere Verschärfungsmöglichkeit liegt im Fall $p_l \mid 1+2d$ in der Tatsache, daß nach Hilfssatz 3 die Primzahlen $p \equiv a$ mit $\frac{a+2nd}{b+p_l d} < p \leqq \frac{2n}{p_l}$, $p > \sqrt{(2n+1)d}$ den Ausdruck $\Phi_n(a,d)$ wiederum nicht teilen; durch weitere Voraussetzungen kann man das Intervall, dessen Primzahlen $p \equiv a$ diesen Ausdruck nicht teilen, noch weiter ausdehnen. Man sieht aber unmittelbar ein, daß in dieser Weise nur solche Sätze entstehen können, die nur im Fall $\sigma < \frac{1}{2}$ anwendbar sind, in der Tat konvergiert im Fall $\sigma > \frac{1}{2}$ der Ausdruck $\Phi_n(a,d)$ gegen Null für $n \to \infty$. In einer späteren Publikation beabsichtigen wir eine wesentliche Verschärfung der hier angewandten Methode zu entwickeln, die sich auch in gewissen Fällen, wo $\sigma(d) > \frac{1}{2}$ ist (z. B. für $d = 8$) anwenden läßt.

III. Über die numerische Bestimmung der Schranken.

11. Es ist leicht zu sehen, daß sich alle im Vorangehenden vorgekommenen o-Abschätzungen durch explizite Ungleichungen ersetzen lassen; zu diesem Zweck wendet man statt Hilfssatz 1 die expliziten Ungleichungen (5) an. Also sind die Schranken, von welchen an unsere Sätze gelten, prinzipiell in jedem Fall leicht zu ermitteln.

Insbesondere ergibt der Beweis des Satzes 1 eine explizite obere Schranke von der Form $\alpha^{\frac{\xi}{d-1}+o(\xi)}$ für das Produkt $\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p$. Nur ist aber diese Schranke für numerische Berechnungen nicht sehr geeignet, da sie zu groß ist; daher werden wir die folgende „numerische" Form des Satzes 1 anwenden:

Satz 7. *Es ist für* $\xi \geqq 1$

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq d\,\xi\,(\alpha(d))^{\frac{\xi}{d-1}}. \tag{12}$$

Beweis. Wir betrachten den Ausdruck (4), welcher, wie wir gesehen haben, eine ganze Zahl repräsentiert. Wegen

$$P_n'(a,d) \leqq \prod_{p \mid d} p^{\frac{n-1}{p-1}} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} k d = d^n \Big(\prod_{p \mid d} p^{\frac{1}{p-1}} \Big)^{n-1}$$

und wegen der Tatsache, daß $P_n'(a,d)$ durch alle Primzahlen $p \equiv a$ mit $n < p < a + nd$ teilbar ist, gilt die Ungleichung

$$\prod_{\substack{n < p < a+nd \\ p \equiv a}} p \leqq d^n\, \delta^{n-1}$$

mit

$$\delta = \delta(d) = \frac{1}{d}\,\alpha(d) = \prod_{p|d} p^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ersetzt man hier n der Reihe nach durch $n_1 = \left\{\frac{n}{d}\right\}$, $n_2 = \left\{\frac{n}{d^2}\right\}, \ldots,$ $n_r = \left\{\frac{n}{d^r}\right\} = 1$, wobei $d^{r-1} < n \leqq d^r$ und $\{\eta\}$ die kleinste ganze Zahl $\geqq \eta$ bezeichnet, so erhält man durch Multiplikation der so entstehenden Ungleichungen und Berücksichtigung der Beziehungen

$$a + n_{k+1} d \geqq 1 + n_{k+1} d \geqq 1 + \frac{n}{d^{k+1}} d = 1 + \frac{n}{d^k} > n_k$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, r; \quad n_0 = n)$$

die Ungleichung

$$\prod_{\substack{p < a + n d \\ p \equiv a}} p \leqq d^{n + n_1 + n_2 + \ldots + n_r}\, \delta^{n + n_1 + n_2 + \ldots + n_r - r - 1}.$$

Wegen

$$n + n_1 + n_2 + \ldots + n_r \leqq n + \frac{n + d - 1}{d} + \frac{n + d^2 - 1}{d^2} + \ldots + \frac{n + d^r - 1}{d^r}$$

$$= (n-1)\left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \ldots + \frac{1}{d^r}\right) + (r+1)$$

$$< \frac{(n-1)\,d}{d-1} + r + 1$$

ist also

$$\prod_{\substack{p < a + n d \\ p \equiv a}} p \leqq d^{\frac{(n-1)\,d}{d-1}}\, d^{r+1}\, \delta^{\frac{(n-1)\,d}{d-1}}$$

$$= \alpha^{\frac{(n-1)\,d}{d-1}}\, d^{r-1} d^2 \leqq \alpha^{\frac{(n-1)\,d}{d-1}}\, (n-1)\, d^2.$$

Es sei nun $\xi \geqq a$ und n aus der Ungleichung $a + (n-1)\,d \leqq \xi < a + n\,d$ bestimmt; dann ist um so mehr $(n-1)\,d < \xi$, also

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq d\, \xi\, \alpha^{\frac{\xi}{d-1}},$$

dies gilt aber offenbar auch für $1 \leqq \xi < a$.

Für spezielle numerische Werte von d (insbesondere für $d = 2, 4, 6$) könnte man Satz 7 leicht noch verschärfen, so daß an der linken Seite der Ungleichung (12) auch der Faktor ξ für hinreichend große ξ nicht mehr auftritt; für unsere Zwecke wird jedoch Satz 7 scharf genug sein.

12. Bei Bestimmung der Schranke ξ_0 für ξ, von welcher ab es zwischen ξ und $2\,\xi$ wenigstens eine Primzahl $p \equiv a$ gibt, empfiehlt es sich, auch

in den durch Satz 4 erledigten Fällen das beim Beweise der Sätze 5 und 6 angewandte Verfahren heranzuziehen und das Intervall, welches keine Primzahl $p \equiv a$ enthält, die den Ausdruck $\Phi_n(a, d)$ teilt, möglichst weit auszudehnen.

Die Methode zur Bestimmung der Schranken werden wir für die Fälle $d = 6$ und $d = 4$ darlegen. Es kommt für uns nicht darauf an, die Schranken soweit wie möglich herabzusetzen; eine weitere Verminderung dieser Schranken könnte man einerseits durch vorsichtigere Abschätzung, andererseits durch Anwendung der zu Ende von 11. erwähnten Verschärfungen des Satzes 7 und endlich durch Anwendung einer ebenso scharfen Abschätzung des Beitrages von kleinen Primzahlen (d. h. von Primzahlen $p \leqq \sqrt{6(2n+1)}$ bzw. $p \leqq \sqrt{4(2n+1)}$) zu den Ausdrücken $\Phi_n(a, d)$ erzielen, wie etwa die durch Satz 7 gelieferte Abschätzung.

13. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $d = 6$, d. h. den Fall der Primzahlen von der Form $6k+1$ und $6k+5$. p' soll Primzahlen von der Form $6k+1$, p'' aber Primzahlen von der Form $6k+5$ bezeichnen; es sei zur Abkürzung $P'_n = P_n(1, 6)$, $P''_n = P_n(5, 6)$ und

$$\Phi'_n = \frac{P'_{2n}}{P'_n P''^{\left[\frac{2n}{5}\right]}}, \quad \Phi''_n = \frac{P''_{2n}}{P''_n P'^{\left[\frac{2n}{5}\right]}}$$

gesetzt. (Diese Abkürzungen gelten nur in diesem Abschnitt 13.) Dann ist nach der Ungleichung (5)

$$\left.\begin{matrix}\Phi'_n \\ \Phi''_n\end{matrix}\right\} \geqq 3^{-\frac{1}{2}}(n+1)^{-1}\left(\left[\frac{2n}{5}\right]+1\right)^{-1}\alpha^{2n-n-\left[\frac{2n}{5}\right]}$$

$$\geqq 3^{-\frac{1}{2}}(n+1)^{-1}\left(\frac{2n}{5}+1\right)^{-1}\alpha^{\frac{3}{5}n} \qquad \left(\alpha = 6\cdot 2\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^2 3^{\frac{3}{2}}\right).$$

Es sei $n > 36$; dann ist $\sqrt{6(2n+1)} < \sqrt{6\cdot 3n} < 5\sqrt{n} < \frac{5}{6}n < \frac{12}{13}n$. Ist $n < p' < 6n+7$, so ist nach Hilfssatz 3 p' / P'_n; ist $\frac{12n+1}{13} < p' \leqq n$, so ist nach demselben Hilfssatz $p' \nmid P'_{2n}$; also ist Φ'_n durch die Primzahlen $\frac{12}{13}(n+1) < p' < 6n+7$ jedenfalls nicht teilbar. Analog sieht man, daß Φ''_n durch die Primzahlen $\frac{12}{13}(n+1) < p' < 6n+11$ nicht teilbar ist. Also ist nach Hilfssatz 2 und 5

$$\Phi'_n \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) \prod_{p' \leqq \frac{12}{13}(n+1)} p' \prod_{6n+7 \leqq p' \leqq 12n+1} p'$$

$$\Phi''_n \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) \prod_{p'' \leqq \frac{12}{13}(n+1)} p'' \prod_{6n+11 \leqq p'' \leqq 12n+5} p''.$$

Nun ist aber

$$\prod_{p \leqq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) = (12n+6)^{\pi(\sqrt{12n+6})}$$

und, wegen Satz 7,

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{p' \leqq \frac{12}{13}(n+1)} p' \\ \prod\limits_{p'' \leqq \frac{12}{13}(n+1)} p'' \end{array}\right\} \leqq \tfrac{72}{13}(n+1)\,\alpha^{\frac{12}{65}(n+1)} \leqq 6(n+1)\,\alpha^{\frac{12}{65}(n+1)},$$

so daß

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{6n+7 \leqq p' \leqq 12n+1} p' \\ \prod\limits_{6n+11 \leqq p'' \leqq 12n+5} p'' \end{array}\right\} \geqq \alpha^{\frac{27n-12}{65}} 6^{-1} 3^{-\frac{1}{2}} (n+1)^{-2} \left(\tfrac{2}{5}n+1\right)^{-1} \cdot (12n+6)^{-\pi(\sqrt{12n+6})}$$

$$= 10\,\alpha^{\frac{27n-77}{65}} (n+1)^{-2}(2n+5)^{-1}(12n+6)^{-\pi(\sqrt{12n+6})}.$$

Ist also eines der Produkte $\prod\limits_{6n+7 \leqq p' \leqq 12n+1} p'$ und $\prod\limits_{6n+11 \leqq p'' \leqq 12n+5} p''$ leer, so ist

$$\alpha^{\frac{27n-77}{65}} \leqq \tfrac{1}{10}(n+1)^2(2n+5)(12n+6)^{\pi(\sqrt{12n+6})} < (12n+6)^{3+\pi(\sqrt{12n+6})},$$

also, falls $n \geqq 90$, wegen $\frac{27n-77}{65} \geqq \frac{26n+13}{65} = \frac{2n+1}{5}$,

$$\alpha^{\frac{2n+1}{5}} \leqq (12n+6)^{3+\pi(\sqrt{12n+6})},$$

d. h. wegen $\alpha = 2^3 3^{\frac{3}{2}} > 2^4$

$$2^{8n+4} < (12n+6)^{15+5\pi(\sqrt{12n+6})}. \tag{13}$$

Nun ist aber, für $\mu > 63$, $\pi(\mu) < \frac{\mu}{3} - 3$.[3]) Es ist daher für $\sqrt{12n+6} > 63$, d. h. für $n > 330$, wegen $1 + x \leqq 2^x$

$$(12n+6)^{15+5\pi(\sqrt{12n+6})} < (12n+6)^{\frac{5}{3}\sqrt{12n+6}}$$

$$= (\sqrt[6]{12n+6})^{10\sqrt{12n+6}} < (1+[\sqrt[6]{12n+6}])^{10\sqrt{12n+6}}$$

$$\leqq 2^{10\sqrt{12n+6}\,[\sqrt[6]{12n+6}]} \leqq 2^{10(12n+6)^{\frac{2}{3}}}.$$

Also würde aus (13) folgen

$$\tfrac{2}{3}(12n+6) < 10(12n+6)^{\frac{2}{3}},\ (12n+6)^{\frac{1}{3}} < 15,$$

was für $n > 330$ unrichtig ist. Daher gibt es für $n > 330$ eine Primzahl p' mit $6n+7 \leqq p' \leqq 12n+1$ und eine Primzahl p'' mit $6n+11 \leqq p''$

[3]) Man verifiziert diese Ungleichung für $63 < \mu \leqq 69$, und folgert dann allgemein für $\mu > 63$ aus dem Umstande, daß von sechs konsekutiven Zahlen > 3 höchstens zwei Primzahlen sein können.

$\leqq 12n+5$. Diese Primzahlen liegen im Intervall $\xi < p \leqq 2\xi$, falls n zu ξ aus der Ungleichung $6n+1 \leqq \xi < 6n+7$ bzw. $6n+5 \leqq \xi < 6n+11$ bestimmt wird. Dieses n fällt für $\xi \geqq 2000$ in beiden Fällen > 330 aus; daher erhalten wir den

Satz 8. *Für $\xi \geqq 2000$ gibt es zwischen ξ* (exkl.) *und 2ξ* (inkl.) *je eine Primzahl von der Form $6k+1$ und $6k+5$.*

14. In diesem Abschnitt führen wir die Schrankenbestimmung für den Fall $d=4$, also für den Fall der Primzahlen von der Form $4n+1$ und $4n+3$ durch. p' bzw. p'' sollen Primzahlen von der Form $4k+1$ bzw. $4k+3$ bezeichnen; es sei zur Abkürzung $P'_n = P_n(1,4)$, $P''_n = P_n(3,4)$ und

$$\Phi'_n = \frac{P'_{2n}}{P'_n P''_{\left[\frac{2n}{3}\right]}}, \quad \Phi''_n = \frac{P''_2}{P''_n P'_{\left[\frac{2n}{3}\right]}}.$$

Hier ist $\alpha = 4 \cdot 2 = 8$, also nach der Ungleichung (5)

$$\left.\begin{matrix}\Phi'_n \\ \Phi''_n\end{matrix}\right\} \geqq (n+1)^{-1}\left(\left[\frac{2n}{3}\right]+1\right)^{-1} 8^{2n-n-\left[\frac{2n}{3}\right]}$$

$$\geqq 3(n+1)^{-1}(2n+3)^{-1}\, 8^{\frac{n}{3}} = 3(n+1)^{-1}(2n+3)^{-1}\, 2^n.$$

Es sei $n \geqq 81$; dann ist $2\sqrt{2n+1} < 4\sqrt{n} < \frac{4n}{9} < \frac{8n}{17}$. Aus Hilfssatz 3 folgt, daß für $n < p' < 4n+5$ p' / P'_n, für $\frac{8n+1}{9} < p' \leqq n$ $p' \neq P'_{2n}$, für $\left[\frac{2n}{3}\right] < p' \leqq \frac{8n+1}{9}$ $\left(\text{wegen } \frac{8n+1}{9} < \frac{3+4\left(\left[\frac{2n}{3}\right]+1\right)}{3}\right)$ $p' / P''_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$, für $\frac{n}{2} < p' \leqq \left[\frac{2n}{3}\right]$ $\left(\text{wegen } \left[\frac{2n}{3}\right] \leqq \frac{2n}{3} < \frac{1+4(n+1)}{5}\right)$ p' / P'_n und endlich für $\frac{8n+1}{17} < p' \leqq \frac{n}{2}$ $p' \neq P'_{2n}$. Daher ist Φ'_n für $\frac{8n+1}{17} < p' < 4n+5$ nicht durch p' teilbar; analog sieht man ein, daß Φ''_n für $\frac{8n+3}{17} < p'' < 4n+7$ nicht durch p'' teilbar ist. Daher ist nach Hilfssatz 2 und 5 jedenfalls

$$\Phi'_n \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4(2n+1) \prod_{p' < \frac{8}{17}(n+1)} p' \prod_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p',$$

$$\Phi''_n \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4(2n+1) \prod_{p'' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p'' \prod_{4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3} p''.$$

Hier ist aber

$$\prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4(2n+1) = (8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})}$$

und, wegen Satz 7,

$$\left.\begin{array}{l}\prod\limits_{p' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p' \\ \prod\limits_{p'' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p''\end{array}\right\} \leqq \frac{32}{17}(n+1)\, 2^{\frac{8}{17}(n+1)} < (n+1)\, 2^{\frac{8n+25}{17}},$$

also

$$\left.\begin{array}{l}\prod\limits_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p' \\ \prod\limits_{4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3} p''\end{array}\right\} \geqq 2^{\frac{9n-25}{17}}\, 3\,(n+1)^{-2}(2n+3)^{-1}(8n+4)^{-\pi(\sqrt{8n+4})}.$$

Ist also das eine oder das andere der Produkte $\prod\limits_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p'$ und $\prod\limits_{4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3} p''$ leer, so ist

$$2^{\frac{9n-25}{17}} \leqq \frac{1}{3}(n+1)^2\,(2n+3)\,(8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})}$$

$$= (n+1)^3\left(\frac{2}{3}n+1\right)(8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})} < (n+1)^3\,(8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})}$$

$$< (2n+1)^3\,(8n+4)^{\pi(\sqrt{8n+4})} = 2^{-6}\,(8n+4)^{3+\pi(\sqrt{8n+4})},$$

d. h.

$$2^{\frac{9n+77}{17}} < (8n+4)^{3+\pi(\sqrt{8n+4})}; \tag{14}$$

wegen $n \geqq 4$ gilt also $2^{\frac{9n}{17}} < (9n)^{3+\pi(\sqrt{9n})}$.

Nun ist aber für $\mu > 63$ $\pi(\mu) < \frac{\mu}{3} - 3$, daher ist für $3\sqrt{n} > 63$, $n > 441$, $2^{\frac{9n}{17}} < (9n)^{\sqrt{n}}$.

Nun folgt aus $2^x > 2 + 2x$ (für $x > 3$)

$$2^{\sqrt[6]{n}} \geqq 2^{[\sqrt[6]{n}]} > 2 + 2\,[\sqrt[6]{n}] > 2\sqrt[6]{n},$$

$$2^{\sqrt[6]{n}} > 64n > 9n, \qquad \text{(wenn } n > 729\text{)},$$

d. h.

$$2^{\frac{9n}{17}} < 2^{6n^{\frac{5}{6}}}, \quad \text{also} \quad 9n < 102\,n^{\frac{5}{6}},$$

dies ist aber offenbar unrichtig für alle $n > \left(\frac{102}{9}\right)^6$, also a fortiori für $n > 1460$.

Für $n > 1460$ gibt es also je eine Primzahl p' und p'' mit

$$4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1, \quad 4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3.$$

Falls man n zu gegebenem ξ aus der Ungleichung $4n+1 \leqq \xi < 4n+5$ bzw. $4n+3 \leqq \xi < 4n+7$ bestimmt, so gehören diese p' und p'' dem Intervall $\xi < p \leqq 2\xi$ an; für $\xi \geqq 6000$ gilt dann in beiden Fällen $n > 1460$.

Also haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 9. *Für* $\xi \geqq 6000$ *gibt es im Intervall* $\xi < p \leqq 2\,\xi$ *je eine Primzahl von der Form* $4k+1$ *und* $4k+3$.

15. Mit Hilfe der Primzahltabellen bestimmt man nun leicht die genauen unteren Grenzen von ξ, von welchen ab zwischen ξ (exkl.) und $2\,\xi$ (inkl.) Primzahlen von den betrachteten Formen existieren. Man findet, daß das Intervall $\xi < p \leqq 2\,\xi$ für $\xi \geqq 3{,}5$ eine Primzahl von der Form $6k+1$, für $\xi \geqq 5{,}5$ eine Primzahl von der Form $6k+5$, für $\xi \geqq 6{,}5$ eine Primzahl von der Form $4k+1$ und endlich für $\xi \geqq 3{,}5$ eine Primzahl von der Form $4k+3$ enthält. Aus der letzten Tatsache folgt auf Grund eines bekannten Satzes der elementaren Zahlentheorie, daß $1!$, $2!$ und $6!$ die einzigen Faktoriellen sind, die sich in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegen lassen.

Zum Schluß sei es mir erlaubt, dem Herrn Privatdozenten Dr. L. Kalmár (Szeged), der durch seine wertvolle Hilfe das Erscheinen dieser Arbeit ermöglichte, meinen innigsten Dank auszusprechen.

Zusatz, hinzugefügt am 30. August 1934.

Nach Eingang des Manuskriptes vorliegender Arbeit bei der Redaktion sind die beiden interessanten Arbeiten des Herrn Giovanni Ricci [Sul teorema di Dirichlet relativo alla progressione aritmetica, *Bolletino della Unione Matematica Italiana* **12** (1933), S. 304—309 und Sui teoremi di Dirichlet e di Bertrand-Tchebychef relativi alla progressione aritmetica, *ebenda* **13** (1934), S. 1—11] erschienen, in denen verwandte Resultate wie in dieser Arbeit sehr elegant erreicht worden sind. Auch die Methode des Herrn Ricci weist Ähnlichkeiten mit der in dieser Arbeit benutzten auf, erfordert aber genauere Kenntnisse über die Verteilung der Primzahlen.

(Eingegangen am 11. September 1932.)

Zur Theorie der zweiten Variation.

Von

H. Boerner in München.

Die für die Variationsrechnung der Doppelintegrale von H. A. Schwarz erfundene, von Lichtenstein mit großem Erfolg weitergeführte Methode, im Zusammenhang mit der *zweiten Variation* ein *Eigenwertproblem* zu betrachten, hat Lichtenstein in einigen Abhandlungen auch für die Theorie der einfachen Integrale nutzbar gemacht[1]). Im folgenden soll das einfachste Variationsproblem *in Parameterdarstellung* in dieser Weise behandelt werden. Es gelingt dies ohne jede Schwierigkeit; das Ergebnis ist aber deshalb vielleicht nicht ganz ohne Interesse, weil man eine Bedingung erhält, die für alle vorkommenden Randbedingungen in der gleichen einfachen Weise ausgesprochen werden kann, während die Jacobische Bedingung in der üblichen Form ganz wesentlich komplizierter wird, wenn beide Randpunkte auf Kurven beweglich angenommen werden[2]). Wir werden deshalb von vornherein diese allgemeinste Randbedingung zugrunde legen; die unwesentlichen Vereinfachungen, die sich ergeben, wenn ein Randpunkt oder beide fest vorgegeben sind, liegen dann auf der Hand.

1. Vorbereitungen. Gegeben sind in der xy-Ebene zwei Kurvenstücke C_1 und C_2:

$$x = p_1(\sigma), \quad y = q_1(\sigma); \quad x = p_2(\sigma), \quad y = q_2(\sigma); \tag{1. 1}$$

σ ist beidemal die Bogenlänge, Anfangspunkt und Richtung der Zählung werden später präzisiert. Die in (1. 1) vorkommenden Funktionen sind mit ihren Ableitungen bis zur vierten Ordnung stetig.

Zur Konkurrenz werden Kurvenstücke mit stückweise stetiger Tangente zugelassen, deren Endpunkte je auf einer der Kurven (1. 1) liegen („Vergleichskurven"). Bei der speziellen Vergleichskurve E:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \tag{1. 2}$$

[1]) L. Lichtenstein, Gött. Nachr. 1919, S. 161; Journ. f. Math. 165 (1931), S. 194; vgl. auch H. Boerner, Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 161.

[2]) G. A. Bliss, Math. Annalen 58 (1904), S. 70; um das dort abgeleitete Brennpunktskriterium anwenden zu können, muß es möglich sein, die Extremale über einen ihrer Endpunkte hinaus fortzusetzen. — Neuerdings hat A. E. Currier [Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), S. 689] mit der Methode von M. Morse eine der unsrigen etwas ähnliche Bedingung für das Problem im m dimensionalen Raum abgeleitet.

die wir im folgenden untersuchen wollen, können wir von vornherein voraussetzen, daß die Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzen. In (1. 2) bedeutet s die Bogenlänge auf E. Für die Endpunkte soll

(1. 3) $x(s_1) = p_1(0), \quad y(s_1) = q_1(0); \quad x(s_2) = p_2(0), \quad y(s_2) = q_2(0)$

gelten; dabei ist $s_1 < s_2$, und die Bogenlänge σ auf C_1 und C_2 wird vom Nullpunkt aus so gezählt, daß die positive Richtung von E und diejenige von C_1 bzw. C_2 so aufeinanderfolgen wie die x- und y-Richtung.

Wir werden uns nur mit dem *schwachen Minimum* beschäftigen. Zu dem Zweck führen wir die folgende Definition der „$(\varrho)^2$-Umgebung“[3]) ein: eine Vergleichskurve $\bar{C}$ liegt in der $(\varrho)^2$-Umgebung von E, wenn es, unter $\bar{s}$ die Bogenlänge auf $\bar{C}$ verstanden, eine stetige und differenzierbare eineindeutige Zuordnung $\bar{s} = \bar{s}(s)$ der Punkte von $\bar{C}$ zu denen von E gibt, die der Relation

(1. 4) $$1 - \varrho \leqq \bar{s}'(s) \leqq 1 + \varrho$$[4])

genügt, so daß die auf C_1 bzw. C_2 liegenden Endpunkte sich entsprechen und daß zugeordnete Punkte um höchstens ϱ voneinander entfernt und die Winkel, die die Tangenten in zugeordneten Punkten mit der x-Achse bilden, um höchstens ϱ voneinander verschieden sind. Dabei soll immer $\varrho < \varrho_0$ sein, unter ϱ_0 eine positive Zahl verstanden, von der noch die Rede sein wird.

Man kann jede Vergleichskurve einer Schar

(1. 5) $$x = \varphi(s, \alpha), \quad y = \psi(s, \alpha)$$

von Vergleichskurven eingliedern, die für $\alpha = 0$ die Ausgangskurve E enthält; dabei sollen die Funktionen φ und ψ sowie ihre Ableitungen nach α bis zur dritten Ordnung stetig sein und stückweise stetige Ableitungen nach s besitzen; den Endpunkten, die auf C_1 und C_2 liegen, entsprechen immer die Parameterwerte s_1 bzw. s_2. Im Zusammenhang mit jeder Schar (1. 5) werden wir die Funktion

(1. 6) $$w(s) = \psi_\alpha(s, 0)\, x'(s) - \varphi_\alpha(s, 0)\, y'(s)$$

zu betrachten haben, die im Intervall $\langle s_1 s_2 \rangle$ stetig ist und stückweise stetige Ableitung besitzt. Da nur Kurven in der $(\varrho)^2$-Umgebung von E betrachtet werden, können wir die Zuordnung von Scharen (1. 5) und Funktionen w ein für allemal zu einer umkehrbar eindeutigen machen durch die folgende Hilfskonstruktion.

---

[3]) L. Tonelli, Fondamenti di Calcolo delle Variazioni, Bd. II, Bologna 1923, S. 171.

[4]) Ableitungen werden durch Striche bezeichnet, solche von Funktionen mehrerer Veränderlichen durch Indizes.

Wir bezeichnen mit

$$x = p(\sigma, s), \quad y = q(\sigma, s), \qquad s_1 \leqq s \leqq s_2 \tag{1.7}$$

eine Schar von Kurven, deren jede die Kurve E einmal trifft und zwar im Punkt mit dem Parameterwert s; σ ist die Bogenlänge der einzelnen Kurve, und die Funktionen p und q sowie ihre Ableitungen nach σ bis zur vierten Ordnung sind stetig und besitzen stückweise stetige Ableitungen nach s. Es ist identisch

$$\begin{array}{lll} p(\sigma, s_1) = p_1(\sigma), & p(\sigma, s_2) = p_2(\sigma), & p(0, s) = x(s) \\ q(\sigma, s_1) = q_1(\sigma), & q(\sigma, s_2) = q_2(\sigma), & q(0, s) = y(s) \end{array} \tag{1.8}$$

Die Funktion

$$\varkappa(s) = q_\sigma(0, s)\, x'(s) - p_\sigma(0, s)\, y'(s) \tag{1.9}$$

stellt den Sinus des Winkels dar, den im Punkt $x(s)$, $y(s)$ die positive Richtung von E mit der positiven Richtung der zugehörigen Kurve der Schar (1.7) einschließt; wir richten es so ein, daß der *spitze* Winkel zwischen beiden Kurven nirgends kleiner ist als der kleinere der beiden entsprechenden Winkel an den Stellen s_1 und s_2, die durch die Transversalitätsbedingung festgelegt werden (siehe Abschnitt 2) und die wir von Null verschieden voraussetzen. Dann gibt es eine Zahl $\varkappa_0$, so daß im ganzen Intervall (man berücksichtige die Verabredung über die Richtung der Zählung der Bogenlänge σ) $0 < \varkappa_0 \leqq \varkappa(s) \leqq 1$ ist.

Es sei $\widetilde{C}$ eine Vergleichskurve mit stückweise stetiger Tangente, deren Endpunkte auf C_1 bzw. C_2 liegen und die ganz in einer $(\varrho)^2$-Umgebung von E verläuft, $\varrho < \varrho_0$. Wir wählen die positive Zahl ϱ_0 so klein, daß folgendes gilt:

Die Kurve $\widetilde{C}$ trifft jede der Kurven (1.7) genau einmal und unter einem von Null verschiedenen Winkel, und zwar die zu s gehörige Kurve im Punkt mit dem Parameterwert $\widetilde{\sigma}(s)$. $\widetilde{\sigma}(s)$ ist eine stetige Funktion mit stückweise stetiger Ableitung. Wir erhalten zugleich eine Parameterdarstellung $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$ für die Kurve $\widetilde{C}$ durch die Funktionen

$$\tilde{x}(s) = p(\widetilde{\sigma}(s), s), \quad \tilde{y}(s) = q(\widetilde{\sigma}(s), s). \tag{1.10}$$

Führt man noch die Bezeichnung $\zeta(s) = \frac{1}{\varrho}\,\widetilde{\sigma}(s)$ ein, so gibt es eine positive Zahl M^*, die von der Wahl der Kurve $\widetilde{C}$ nicht abhängt, so daß

$$|\zeta(s)| < M^*, \quad |\zeta'(s)| < M^* \tag{1.11}$$

gilt. Umgekehrt gibt es eine positive Zahl N^*, so daß, wenn $\zeta(s)$ eine beliebige Funktion mit stückweise stetiger Ableitung ist, die den Ungleichheiten $|\zeta| < N^*$ und $|\zeta'| < N^*$ genügt, und wenn man $\widetilde{\sigma}(s) = \varrho\,\zeta(s)$ setzt, $\varrho < \varrho_0$, die durch die Funktionen (1.10) dargestellte Kurve in der

$(\varrho)^2$-Umgebung von E liegt; für die punktweise Zuordnung kann man die durch den Parameter s vermittelte wählen[5]).

Eine Schar (1. 5) erhält man, indem man einfach

$$\varphi(s,\alpha) = p(\alpha\zeta(s), s), \quad \psi(s,\alpha) = q(\alpha\zeta(s), s), \quad |\alpha| \leqq \varrho_0 \tag{1. 12}$$

setzt. Wir werden die Ableitungen dieser Funktionen brauchen. Man erhält

$$\begin{aligned} &\varphi_\alpha(s,\alpha) = \zeta(s)\, p_\sigma(\alpha\zeta, s), && \psi_\alpha(s,\alpha) = \zeta(s)\, q_\sigma(\alpha\zeta, s);\\ &\varphi_{\alpha s} = \zeta'\cdot p_\sigma + \zeta\cdot(\alpha\zeta' p_{\sigma\sigma} + p_{s\sigma}), && \psi_{\alpha s} = \zeta'\cdot q_\sigma + \zeta\cdot(\alpha\zeta' q_{\sigma\sigma} + q_{s\sigma});\\ &\varphi_{\alpha\alpha} = \zeta^2 p_{\sigma\sigma}(\alpha\zeta, s), && \psi_{\alpha\alpha} = \zeta^2 q_{\sigma\sigma}(\alpha\zeta, s);\\ &\varphi_{\alpha\alpha s} = 2\zeta\zeta' p_{\sigma\sigma} + \zeta^2\cdot(\alpha\zeta' p_{\sigma\sigma\sigma} + p_{s\sigma\sigma\sigma}), \text{ usw.} \end{aligned} \tag{1. 13}$$

Für die Funktion (1. 6) bekommt man wegen (1. 9) einfach

$$w(s) = \varkappa(s)\cdot\zeta(s). \tag{1. 14}$$

Man kann also zwei positive Zahlen M und N $(\leqq M)$ bestimmen, so daß folgendes gilt: verläuft eine Vergleichskurve $\bar{C}$ in der $(\varrho)^2$-Umgebung von E und ist $\varrho < \varrho_0$, so genügt die ihr durch das vorige eindeutig zugeordnete Funktion $w(s)$ den Ungleichheiten

$$|w(s)| < M, \quad |w'(s)| < M, \tag{1. 15}$$

und falls $w(s)$ eine willkürliche Funktion ist, für die $|w| < N$, $|w'| < N$ gilt, so liegt die zugehörige Kurve $\bar{C}$ in der $(\varrho)^2$-Umgebung von E, solange man $\varrho < \varrho_0$ nimmt.

2. Die Frage, die uns beschäftigen soll, ist: Gibt es eine Zahl ϱ_0, so daß das Integral

$$J = \int_{s_1}^{s_2} F(x, y, x', y')\, ds \tag{2. 1}$$

über die Kurve E erstreckt einen kleineren Wert besitzt als über irgendeine andere Vergleichskurve $\bar{C}$, die in einer $(\varrho)^2$-Umgebung von E liegt, solange $\varrho < \varrho_0$ ist? Wir nehmen diese Zahl von vornherein so klein an, daß die Entwicklungen des vorigen Abschnitts gelten.

Die Funktion $F(x, y, x', y')$ ist in einem geeigneten Gebiet definiert, besitzt stetige Ableitungen mindestens bis zur dritten Ordnung und ist positiv homogen vom ersten Grad in x', y'.

In der üblichen Weise führen wir in das Integral (2. 1) eine Kurvenschar (1. 5) ein und entwickeln nach Potenzen von α an der Stelle $\alpha = 0$.

---

[5]) Geometrisch handelt es sich um die durch die Funktionen (1. 7) vermittelte Abbildung einer geeigneten Umgebung der Kurve E auf ein Rechteck der $s\sigma$-Ebene, welches das Intervall $\langle s_1 s_2\rangle$ der s-Achse enthält, bei der Punkte und Richtungen im ganzen Gebiet gleichmäßig stetig übertragen werden. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß daher der Begriff der $(\varrho)^2$-Umgebung in der angegebenen Weise erhalten bleibt.

Damit die Glieder erster Ordnung verschwinden, muß die Kurve E eine Extremale sein und muß in den Endpunkten die Transversalitätsbedingung erfüllt sein:

$$p_1'(0)\,F_{x'} + q_1'(0)\,F_{y'} = 0 \quad \text{für } s = s_1$$

und

$$p_2'(0)\,F_{x'} + q_2'(0)\,F_{y'} = 0 \quad \text{für } s = s_2.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann man die „Gesamtvariation" des Integrals J als abgebrochene Taylorreihe nach Potenzen von α so schreiben:

$$J(\alpha) - J(0) = \alpha^2 J_2 + \alpha^3 R_3. \tag{2. 2}$$

Die „zweite Variation" J_2 setzt sich zusammen aus einem Integral über eine quadratische Form in den Funktionen $\varphi_\alpha(s, 0)$, ψ_α (und ihren Ableitungen nach s) und einem Integral über eine Linearform in $\varphi_{\alpha\alpha}$ usw. Das erste Integral wird nach der Weierstraßschen Methode umgeformt[6]), das zweite wird teilweise integriert, wobei, weil E eine Extremale ist, nur die Randglieder übrigbleiben. In den Randgliedern kommen jetzt die φ_α quadratisch und die $\varphi_{\alpha\alpha}$ linear vor; nimmt man für den Moment an, daß die Schar (1. 5) die spezielle Form (1. 12) hat, und benutzt man die Beziehungen (1. 13) und (1. 14) am Rand, d. h. unter Berücksichtigung von (1. 8), so kann man alles durch die Randwerte von w^2 ausdrücken und erhält schließlich für die zweite Variation den Ausdruck

$$2J_2 = \int_{s_1}^{s_2} (p\,w'^2 - k\,w^2)\,ds - h_1\,w^2(s_1) - h_2\,w^2(s_2); \tag{2. 3}$$

hier ist

$$p(s) = F_1, \quad k(s) = -F_2;$$

$$h_1 = \frac{1}{\varkappa^2(s_1)}\left\{L\,p_1'^2(0) + 2M\,p_1'(0)\,q_1'(0) + N\,q_1'^2(0) + F_{x'}\,p_1''(0) + F_{y'}\,q_1''(0)\right\},$$

$$h_2 = -\frac{1}{\varkappa^2(s_2)}\left\{L\,p_2'^2(0) + 2M\,p_2'(0)\,q_2'(0) + N\,q_2'^2(0) + F_{x'}\,p_2''(0) + F_{y'}\,q_2''(0)\right\};$$

die Funktionen F_1, F_2, L, M, N, $F_{x'}$, $F_{y'}$ sind für die Extremale E zu bilden und in h_1 die Werte für $s = s_1$, in h_2 diejenigen für $s = s_2$ zu nehmen.

Wegen (1. 8) sind die Randwerte von $\varkappa(s)$ von der Wahl der Funktionen (1. 7) unabhängig; in (2. 3) kommt also nichts vor, was von dieser Wahl abhängt, und in der Tat gilt dieser Ausdruck für die allgemeinste Schar (1. 5). Um das zu beweisen, hätte man noch einmal das Bestehen der Transversalitätsbeziehung zu benutzen.

3. Zum Eigenwertproblem gelangt man durch die Frage nach dem Minimum der zweiten Variation. Wir führen dazu die folgende Normierung

---

[6]) Vgl. z. B. O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909, S. 224 ff., wo man auch die Bedeutung der Funktionszeichen F_1, F_2, L, M, N nachsehen möge.

ein. Es sei $q(s)$ eine stetige, durchaus negative Funktion. Wir betrachten alle stetigen Funktionen $w(s)$ mit stückweise stetiger Ableitung, für die

$$\int_{s_1}^{s_2}(k-q)\,w^2\,ds + h_1 w^2(s_1) + h_2 w^2(s_2) = 1 \tag{3.1}$$

ist. Unter ihnen suchen wir diejenige, die der zweiten Variation oder, was auf dasselbe hinauskommt, dem um 1 größeren Integral

$$\int_{s_1}^{s_2}(p w'^2 - q w^2)\,ds \tag{3.2}$$

den kleinsten Wert erteilt. (Wir beschränken uns damit einstweilen auf solche Funktionen, für die (3. 1) positiv ist; da (3. 2) immer positiv ist, sind es ohnehin die einzigen, für die die zweite Variation Null oder negativ werden kann, und ob es solche gibt, ist ja die Frage, die uns letzten Endes interessiert.) Dieses isoperimetrische Problem besitzt die Eulersche Differentialgleichung

$$(p w')' + q w + \lambda (k-q) w = 0, \tag{3.3}$$

die für $\lambda = 1$ mit der zu E gehörigen Jacobischen des ursprünglichen Problems identisch ist, mit der Randbedingung

$$p(s_1) w'(s_1) + \lambda h_1 w(s_1) = 0, \qquad p(s_2) w'(s_2) - \lambda h_2 w(s_2) = 0. \tag{3.4}$$

Für ein solches Eigenwertproblem hat Herr Lichtenstein (vgl. das 2. Kapitel der an erster Stelle zitierten Abhandlung) die folgenden Formeln angegeben: es gibt unendlich viele Eigenwerte λ_α und Eigenfunktionen $\varphi_\alpha(s)$, die so normiert sind, daß

$$\int_{s_1}^{s_2}(k-q)\,\varphi_\alpha\varphi_\beta\,ds + h_1\varphi_\alpha(s_1)\varphi_\beta(s_1) + h_2\varphi_\alpha(s_2)\varphi_\beta(s_2) = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\delta_{\alpha\beta}\,^{7})$$

ist. Die „Fourierkoeffizienten" irgendeiner Funktion $w(s)$,

$$x_\alpha = \int_{s_1}^{s_2}(k-q)\,\varphi_\alpha w\,ds + h_1\varphi_\alpha(s_1)w(s_1) + h_2\varphi_\alpha(s_2)w(s_2),$$

genügen den Gleichungen

$$\int_{s_1}^{s_2}(p w'^2 - q w^2)\,ds = \sum_\alpha |\lambda_\alpha| x_\alpha^2\,^{8}) \tag{3.5}$$

---

[7]) $\delta_{\alpha\beta}$ ist das Kroneckersche Symbol.

[8]) Im allgemeinen Falle steht in (3. 5) das Zeichen $>$; damit immer das Gleichheitszeichen steht, muß die Funktion $k-q$ gewisse Bedingungen erfüllen, was sich durch geeignete Wahl von q leicht erreichen läßt.

und

$$\int_{s_1}^{s_2} (k-q)\, w^2 ds + h_1 w^2(s_1) + h_2 w^2(s_2) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} x_\alpha^2. \tag{3.6}$$

Man erhält also für die zweite Variation die Lichtensteinsche Formel

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right) x_\alpha^2. \tag{3.7}$$

Daraus folgt unmittelbar: *es ist* $J_2 > 0, \geqq 0$ *oder* $\leqq 0$, *je nachdem der kleinste positive Eigenwert* $\lambda_1 > 1, = 1$ *oder* < 1 *ist.*

λ_1 ist übrigens das gesuchte Minimum von (3. 2), also $\lambda_1 - 1$ dasjenige der zweiten Variation. Analog ist der Betrag des absolut genommen kleinsten negativen Eigenwertes das Minimum von (3. 2), wenn man in der Nebenbedingung (3. 1) die rechte Seite durch -1 ersetzt; dasjenige der zweiten Variation ist dann um 1 größer. Über diejenigen Funktionen, bei denen die linke Seite von (3. 1) Null ist, läßt sich nur aussagen, daß die zweite Variation, die dann mit (3. 2) identisch ist, immer positiv ist (diese Funktionen sind ja nicht normiert).

4. Der Zusammenhang der soeben aufgestellten Bedingung mit den üblichen Brennpunktsbedingungen ist der folgende. Besteht die Schar (1. 5) aus Extremalen unseres Variationsproblems, so genügt die Funktion (1. 6) der Jacobischen Differentialgleichung, d. h. der Gleichung (3. 3) mit $\lambda = 1$. Handelt es sich speziell um die Extremalen, die durch den Anfangspunkt von E gehen, so ist $w(s_1) = 0$, und die beiderseits nächstliegenden Nullstellen dieser Funktion (wir denken uns im Moment die Extremale E über ihre Endpunkte hinaus beliebig weit fortsetzbar) sind die zu diesem Punkt konjugierten Punkte. Betrachtet man dagegen die Schar der zur Kurve C_1 transversalen Extremalen, so genügt die Funktion w der ersten Gleichung (3. 4) mit $\lambda = 1$, und ihre nächsten Nullstellen heißen die Brennpunkte der Kurve C_1. Analog definiert man die Brennpunkte von C_2.

Betrachten wir einmal gleichzeitig die drei Randprobleme: a) beide Randpunkte fest, b) Anfangspunkt auf C_1 variabel, Endpunkt fest, c) Anfangspunkt auf C_1, Endpunkt auf C_2 variabel. Ihnen entsprechen die Jacobischen Bedingungen: a) der „hintere" konjugierte Punkt des Anfangspunktes darf nicht vor dem Endpunkt liegen; b) der hintere Brennpunkt von C_1 darf nicht vor dem Endpunkt liegen; c) der hintere Brennpunkt von C_1 darf nicht vor dem hinteren Brennpunkt von C_2 liegen. Aus den Sturmschen Separationssätzen folgt, daß jede dieser Bedingungen die vorangehenden in sich schließt. Dem entspricht in der Eigenwertsprache folgendes.

Die drei isoperimetrischen Probleme unterscheiden sich nur durch die Definition der zulässigen normierten Funktionen w: a) $w(s_1) = w_{(s_2)} = 0$

und in (3.1) $h_1 = h_2 = 0$; b) nur $w(s_2) = 0$ und $h_2 = 0$; c) w am Rand beliebig und (3.1) vollständig. Jede im Sinne eines der Probleme zulässige normierte Funktion ist also auch im Sinne der nachfolgenden zulässig und richtig normiert. Die drei Eigenwertprobleme, die dazu gehören, unterscheiden sich durch die Randbedingungen:

a) $\qquad w(s_1) = 0, \qquad w(s_2) = 0;$

b) $\qquad p(s_1)w'(s_1) + \lambda h_1 w(s_1) = 0, \quad w(s_2) = 0;$

c) $\qquad p(s_1)w'(s_1) + \lambda h_1 w(s_1) = 0, \quad p(s_2)w'(s_2) - \lambda h_2 w(s_2) = 0.$

Man beweist nun sofort, daß, in leicht verständlicher Bezeichnungsweise, $\lambda_1 < \lambda_1^b < \lambda_1^a$ ist. In der Tat, bezeichnet man das Integral (3.2) mit $A\{w\}$ und sind φ_1^a, φ_1^b, φ_1^c die zu λ_1^a, λ_1^b, λ_1^c gehörigen Eigenfunktionen, so ist nach (3.5) $A\{\varphi_1^a\} = \lambda_1^a$, $A\{\varphi_1^b\} = \lambda_1^b$, $A\{\varphi_1^c\} = \lambda_1^c$. Wegen der Minimumseigenschaft von λ_1^b und weil φ_1^a auch für das Problem b) zulässig und richtig normiert ist, folgt $A\{\varphi_1^a\} > \lambda_1^b$, d. h. $\lambda^a > \lambda_1^b$; ebenso beweist man die zweite Ungleichheit.

In der Brennpunktsformulierung unterscheidet sich die Bedingung c) von den beiden andern dadurch, daß man den hinteren Brennpunkt der Kurve C_2 bestimmen und also die Extremale E unter allen Umständen über den Endpunkt hinaus fortsetzen muß; die Eigenwertprobleme dagegen sind alle drei von der gleichen Art.

5. *Die Bedingung* $\lambda_1 \geqq 1$ *ist notwendig,* $\lambda_1 > 1$ *hinreichend für ein schwaches Minimum.*

Um das zu beweisen, betrachten wir die Gesamtvariation (2.2) und berechnen zu dem Zweck das Restglied R_3, das ist die dritte Ableitung der Funktion $J(\alpha)$ gebildet an der Stelle $\vartheta\alpha$, $0 < \vartheta < 1$, noch dividiert durch 3!. In R_3 steht unter dem Integralzeichen eine Form dritten Grades in den Funktionen φ_α, ψ_α (und ihren Ableitungen nach s), eine Bilinearform in den φ_α und den $\varphi_{\alpha\alpha}$ und eine Linearform in den $\varphi_{\alpha\alpha\alpha}$. Wir denken uns eine bestimmte Vergleichskurve betrachtet, nehmen also diese Funktionen in der speziellen Form (1.12), (1.13) an und setzen $\alpha = \varrho$, $\varrho < \varrho_0$. Dann steht unter dem Integralzeichen eine Form dritten Grades in ζ und ζ', deren Koeffizienten wegen $\varrho < \varrho_0$ und wegen (1.11) beschränkt sind. Man ersetze noch nach (1.14) $\zeta(s)$ durch $w(s)$ und beachte (1.15); dann lassen sich zwei positive Zahlen c_1 und c_2 angeben, so daß

$$|R_3| \leqq c_1 \int_{s_1}^{s_2} w'^2\, ds + c_2 \int_{s_1}^{s_2} w^2\, ds \tag{5.1}$$

gilt.

Es sei $\lambda_1 < 1$. Dann wählen wir $w = \varphi_1$ und setzen $\tilde{\sigma}(s) = \varrho\zeta(s) = \varrho\varkappa w$, $\varrho < \varrho_0$, und betrachten die durch (1.10) gegebene Kurve $\tilde{C}$. Man

hat dann

$$J_2 = \frac{1}{2}|\lambda_1|\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) = -c_3 < 0,$$

und es gibt eine Zahl c_4, so daß $|R| < c_4$. Für die Gesamtvariation erhält man

$$J(\varrho) - J(0) = \varrho^2(J_2 + \varrho R_3) \leqq \varrho^2(-c_3 + \varrho c_4),$$

und das ist negativ, falls man ϱ so klein gewählt hat, daß außer $\varrho < \varrho_0$ noch

$$\varrho < \frac{c_3}{c_4}$$

ist. Es gibt also eine Kurve $\widetilde{C}$, die dem Integral (2.1) einen kleineren Wert erteilt als die Kurve E. *Ein Minimum liegt nicht vor.*

Ist hingegen $\lambda_1 > 1$, so kann man wegen (3.7) und (3.5) für die zweite Variation die für alle Vergleichskurven gültige Abschätzung

$$J_2 \geqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\sum_{\alpha}|\lambda_\alpha| x_\alpha^2 = c_5 \int_{s_1}^{s_2} (p w'^2 - q w^2)\, ds, \qquad c_5 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) > 0$$

angeben. Bezeichnet man also mit p_0 eine positive untere Schranke für p und mit q_0 eine negative obere Schranke für q, so findet man wegen (5.1) für die Gesamtvariation die Abschätzung

$$J(\varrho) - J(0) \geqq \varrho^2 \left\{ \int_{s_1}^{s_2} (c_5 p_0 - \varrho c_1) w'^2\, ds + \int_{s_1}^{s_2} (c_5 |q_0| - \varrho c_2) w^2\, ds \right\}.$$

Man muß also nur noch dafür Sorge tragen, daß die beiden Zahlen $c_5 p_0 - \varrho_0 c_1$ und $c_5|q_0| - \varrho_0 c_2$ positiv ausfallen. Hat man ϱ_0 so klein gewählt, daß dies der Fall ist, dann ist für alle Vergleichskurven

$$J(\varrho) - J(0) \geqq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $w = 0$, d. h. $\zeta = 0$, d. h. $\delta = 0$, d. h. $\widetilde{C} = E$: *es liegt wirklich ein schwaches Minimum vor.*

Ist $\lambda_1 = 1$, so kann man wie Lichtenstein zur Beantwortung der Frage, ob ein Minimum vorliegt, die höheren Variationen heranziehen[9]).

[9]) Vgl. die eingangs zitierte Abhandlung.

(Eingegangen am 11. Dezember 1933.)

Über die Hausdorffschen Limitierungsverfahren, die schwächer sind als das Abelsche.

Von

Otto Henriksson in Sundsvall.

Die vorliegende Arbeit ist aus dem Versuche entstanden, die Ergebnisse der Arbeit der Herren Silverman und Tamarkin, On the generalization of Abel's Theorem for certain definitions of summability [1]), zu vervollständigen. Unter den Arbeiten, die in naher Beziehung zu der meinen stehen, soll noch die des Herrn K. Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren II [2]), erwähnt werden, wo das Problem des vorliegenden Aufsatzes für den Fall, daß das Hausdorffsche Verfahren mit dem Eulerschen identisch ist, behandelt wird.

Die Hauptresultate der Arbeit sind in den Sätzen der Paragraphen 5 und 6 enthalten.

§ 1.

Hausdorffsche Transformation.

Aus einer Folge (s_n) wird mit Hilfe einer Matrix

$$T = (a_{kn})$$

die neue Folge

$$s'_k = a_{k0}s_0 + a_{k1}s_1 + \ldots + a_{kn}s_n + \ldots \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

gebildet.

Die Folge

$$s'_0, s'_1, s'_2, s'_3, \ldots s'_k, \ldots$$

nennen wir die T-Transformation der Folge (s_n) und bezeichnen ihr n-tes Glied auch mit $T(s_n)$.

Ist die Folge (s'_k) konvergent mit dem Grenzwert s, so wird die gegebene Folge T limitierbar zum Werte s genannt. In Zeichen

$$T\text{-}\lim s_n = s \quad \text{oder} \quad T(s_n) \to s.$$

Hat die Matrix T die spezielle Form

$$T = (a_{kn}) = \varrho \cdot \mu \cdot \varrho,$$

---

[1]) Silverman and Tamarkin, Math. Zeitschrift 29 (1929), S. 1—11.

[2]) K. Knopp, Math. Zeitschrift 18 (1923), S. 125—156.

bei der ϱ die Matrix

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

und μ die Diagonalenmatrix

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

bedeutet, so wollen wir $T = \varrho\,\mu\,\varrho$ eine Hausdorffsche Matrix mit der Diagonale $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \ldots$ oder kürzer $H_{(\mu_n)}$ nennen.

Wir bemerken, daß

$$\varrho(s^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} s^k = (1-s)^n \tag{1}$$

und $\varrho \cdot \varrho(s^n) = \varrho((1-s)^n) = s^n$ ist. Also ist $\varrho = \varrho^{-1}$.

Symbolisch werde gesetzt:

$$\varrho(s_n) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} s_k = (1-s)^{(n)}. \tag{2}$$

Wir behaupten:

Der Zusammenhang der Größen (s_n) und (S_n), wo $S_n = H_{(\mu_n)}(s_n)$, kann, wenn $g(z) = \sum g_n z^n$ und $G(z) = \sum G_n z^n$ gesetzt ist, und wenn $\mu_n = g_n : G_n$ ist[3]*, durch die Gleichung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n (-z)^n \cdot \frac{g^{(n)}(z)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n (-z)^n \frac{G^{(n)}(z)}{n!} \tag{3}$$

angegeben werden, wo die Gleichung in dem Sinne gilt, daß die formellen Entwicklungen nach Potenzen von z der beiden Seiten von (3) *identisch sind.*

Beweis. Wenn $s_n = s^n$ angenommen wird, erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n (-z)^n \frac{g^{(n)}(z)}{n!} = g((1-s)z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (1-s)^n \cdot z^n,$$

woraus sich ergibt, daß allgemein

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n (-z)^n \frac{g^{(n)}(z)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (1-s)^{(n)} \cdot z^n. \tag{4}$$

[3]) Es muß vorausgesetzt werden, daß $G_n \neq 0$ ist. $n = 0, 1, 2 \ldots$

Die Gleichung (3) besagt also, daß

$$g_n (1 - s)^{(n)} = G_n (1 - S)^{(n)} \quad \text{oder} \quad g_n \varrho (s_n) = G_n \cdot \varrho (S_n),$$

was mit $S_n = \varrho \mu \varrho (s_n)$ oder $S_n = H_{(\mu_n)} (s_n)$ gleichbedeutend ist. — Ein wichtiger Spezialfall von (3) ist:

$$(3\,a) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} s_n (-z)^n \cdot \frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n (-z) \frac{f^{(n)}(z)}{n!},$$

wo $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} z^n \qquad \text{und} \qquad S_n = H_{(\mu_n)} (s_n).$$

Wir bemerken noch, daß in dem Falle, wo die Potenzreihen für $g(z)$ und $G(z)$ und die Reihen der beiden Seiten von (3) für kleines z konvergieren, die den beiden Seiten von (3) entsprechenden analytischen Funktionen identisch sind.

§ 2.

Das Abelsche Verfahren. Verallgemeinerung.

Wir betrachten die Potenzreihe

$$(5) \qquad \varphi (x) = (1 - x) \sum s_n x^n.$$

Ist deren Radius > 0 und ist die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion $\varphi (x)$ für $0 \leqq x < 1$ analytisch fortsetzbar, und ist der für reelle x genommene Grenzwert

$$\lim_{x \to 1-0} \varphi (x) = s$$

vorhanden, so werden wir sagen, die Folge (s_n) sei $\bar{A}$-limitierbar zum Werte s, in Zeichen: $\bar{A}\text{-lim } s_n = s$. Die Überstreichung soll daran erinnern, daß es sich hier um eine Modifikation des gewöhnlichen Abelschen Verfahrens handelt, bei dem man fordert, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe (5) $\geqq 1$ sei.

Wir setzen $x = \frac{-z}{1-z}$ und erhalten:

$$(1 - x) \sum s_n x^n = \sum s_n (-z)^n \cdot \frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum s_n (-z)^n \frac{h^{(n)}(z)}{n!},$$

wo $h(z) = \frac{1}{1-z}$ gesetzt ist. Wir bemerken, daß für $x = 0$ $z = 0$ ist, und daß für x gegen 1 z gegen $-\infty$ geht.

Folgende Verallgemeinerung des Abelschen Verfahrens ist nun naheliegend:

Definition. *Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

1. *für kleine Werte von z konvergiert und*
2. *eine Funktion repräsentiert, die für jeden negativen Wert von z analytisch ist, und*
3. *wenn*

$$\operatorname*{limes}_{z=-\infty} \sum_{=0}^{\infty} S_n (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = S$$

wollen wir sagen, die Folge (S_n) sei $f(z)$-limitierbar zum Werte S; in Zeichen: $f(z)$-limes $S_n = S$.

Wir fragen nun zunächst:

Wann ist ein $f(z)$-Verfahren konvergenzerhaltend, d. h. wann hat es die Eigenschaft, daß, wenn die Folge (S_n) konvergent ist, auch $f(z)$-lim S_n existiert?

Die Antwort ist:

Satz 1. *Damit die Transformation*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!}, \quad z \to -\infty$$

ein konvergenzerhaltendes $f(z)$-Verfahren sei, ist notwendig und hinreichend, daß

A.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right|$$

für jedes negative z konvergent und beschränkt ist und daß

B. $f(z)$ *in* $z = 0$ *regulär ist.*

Beweis. Wir wählen die konvergente Folge $(S_n) = (r^n e^{in\alpha})$, wo $0 < r < 1$ und α reell ist. Nach 1. der Definition muß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\alpha} (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

für kleine Werte von z konvergent sein.

Der Wert der Reihe ist

$$f(z(1 - re^{i\alpha})),$$

was nach 1. und 2. der Definition für negative z und $z = 0$ eine reguläre Funktion von z sein muß, d. h. $f(z)$ muß in der Halbebene $R(z) < 0$ und in $z = 0$ regulär sein. Die Bedingung B ist also notwendig. Weiter folgt, daß die Reihenentwicklung für $f(-a + x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{f^{(n)}(-a)}{n!}$$

für $|x| \leqq a$, wo a eine beliebige positive Zahl ist, absolut konvergent sein muß. Speziell muß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right|$$

für jedes negative z konvergent sein. Nun können wir folgenden Satz[4]) anwenden:

Satz 2. *Damit die Transformation der Folge* (s_n)

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

bei der $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$ *für* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *konvergent ist, konvergenzerhaltend sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

a) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sigma_n \leqq K$ *ist für* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) $\lim_{n \to \infty} a_{nk}$ *existiert für* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ *existiert.*

Aus der Bedingung a) wird in unserem Falle geschlossen, daß für negatives z

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leqq K$$

sein muß, d. h. daß die Bedingung A notwendig ist.

Die Bedingung c) wird in unserem Falle von selbst erfüllt, denn es gilt, wenn die Forderungen A und B erfüllt sind, für jedes negative z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = f(0).$$

Die Forderung b) lautet:

b′) $\lim_{z \to -\infty} \frac{(-z)^n f^{(n)}(z)}{n!}$ existiert für $n = 0, 1, 2, \ldots$

Wir wollen später[5]) zeigen, daß b′) aus A folgt.

Die Bedingungen A und B des Satzes 1 sind also als notwendig erwiesen. Sie sind auch *hinreichend*. Denn aus der den Bedingungen

[4]) I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Crelles Journal 152.

[5]) Schluß von § 3.

a), b) und c) entsprechenden Bedingung A folgt nach dem Satze 2, daß für jede konvergente Folge (S_n)

$$\operatorname*{limes}_{z \to -\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \cdot S_n \text{ existiert.}$$

Wenn wir noch gezeigt haben, daß für jede konvergente Folge (S_n) die Forderungen 1 und 2 der obigen Definition erfüllt sind, was wir in einem folgenden Paragraphen, § 4, tun wollen, werden die Bedingungen A und B des Satzes 1 als hinreichend erwiesen sein.

§ 3.

Andere Form der Bedingung A.

Die Bedingung A *ist damit gleichbedeutend, daß* $f(z)$ *als Differenz zweier auf der negativen reellen Achse absolut monotoner Funktionen*[6]*, die für* $z \to -0$ *beschränkt bleiben, geschrieben werden kann, oder, anders ausgedrückt, daß* $f(z)$ *die Form hat*

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{zt} d\{\psi_1(t) - \psi_2(t)\},$$

wo $\psi_1(t)$ *und* $\psi_2(t)$ *nicht abnehmende und beschränkte Funktionen sind.*

Beweis. Wir betrachten die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+a)^n}{n!} |f^{(n)}(-a)| = F_a(z); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+a)^n}{n!} (|f^{(n)}(-a)| - f^{(n)}(-a)) = G_a(z),$$

wo a reell und positiv ist. Nach A sind die Reihen konvergent, wenn $|z+a| \leqq a$ ist. Die Funktionen $F_a(z)$ und $G_a(z)$ sind regulär, wenn $|z+a| < a$, und absolut monoton im Intervall $0 > z \geqq -a$, und es gilt

$$(\alpha) \qquad f(z) = F_a(z) - G_a(z).$$

Aus der Bedingung A folgt weiter, daß

$$(\beta) \qquad |F_a(z)| \leqq K \qquad \text{und} \qquad |G_a(z)| \leqq 2K,$$

wenn $|z+a| \leqq a$ ist, wo a positiv ist.

Wir betrachten nun die Folge $F_\nu(z)$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ Aus dieser Folge können wir eine Teilfolge $F_{\nu_i}(z)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, derart auswählen, daß sie z. B. in dem Kreis $|z+1| = \frac{1}{2}$ gegen eine Grenzfunktion $F(z)$ konvergiert. Wegen (β) folgt dann aus dem Satze von Vitali[7], daß die Folge $F_{\nu_i}(z)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, in jedem in $R(z) < 0$ gelegenen beschränkten Gebiet konvergent ist, und daß die Grenzfunktion $F(z)$ in der Halbebene $R(z) < 0$ regulär sein muß. Da die Folge der n-ten Ableitungen

---

[6]) S. Bernstein, Sur les fonctions absolument monotones. Acta Math. 52 (1928).

[7]) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 1, 3. Aufl., S. 170.

$F_{\nu_i}^{(n)}(z)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, gegen $F^{(n)}(z)$ konvergiert, muß auch $F^{(n)}(z) \geqq 0$ sein, wenn z negativ ist, d. h. $F(z)$ ist auf der negativen Achse absolut monoton. Auch die Folge $G_{\nu_i}(z)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, muß gegen eine auf der negativen Achse absolut monotone Funktion $G(z)$ konvergieren, und nach (α) gilt $f(z) = F(z) - G(z)$. Aus (β) ist leicht zu folgern, daß $F(z)$ und $G(z)$ beschränkt bleiben, wenn z auf der negativen Achse gegen 0 geht.

Nach S. Bernstein kann jede auf der negativen Achse absolut monotone Funktion $F(z)$ in der Form

$$F(z) = \int_0^\infty e^{zt}\, d\psi(t)$$

geschrieben werden, wo $\psi(t)$ eine nicht abnehmende Funktion ist. Soll nun die Funktion für $z \to -0$ beschränkt sein, muß $\int_0^\infty d\psi(t)$ endlich sein, d. h. $\psi(t)$ muß beschränkt sein. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Folgerung. *Wenn $f(z)$ die Bedingung* A *erfüllt, muß der Grenzwert* $\lim_{z \to -\infty} (-z)^n f^{(n)}(z)$ *für* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *vorhanden sein.*

Denn $(-z)^n f^{(n)}(z) = \int_0^\infty e^{zt}(-zt)^n\, d\psi(t)$ geht, wenn $z \to -\infty$ strebt, gegen 0 für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und gegen $\psi(+0) - \psi(0)$ für $n = 0$.

§ 4.

Satz 3. *Die Funktion* $\sum_{n=0}^{\infty} S_n (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$, *wo die Folge* (S_n) *konvergent ist und* $f(z)$ *die Bedingungen* A *und* B *des Satzes* 1 *erfüllt, ist in jedem Punkt regulär, dessen Abstand von der negativen Achse kleiner als* $\frac{1}{2}r$ *ist, wo* r *der Konvergenzradius von* $f(z)$ *für* $z = 0$ *ist.*

Beweis. Es ist, wenn $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} z^n$ gesetzt wird, nach (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - S)^n \cdot \frac{1}{\mu_n} z^n. \tag{6}$$

Der Hadamardsche Multiplikationssatz[8]) sagt nun, daß die Funktion (6) keine anderen singulären Stellen haben kann als diejenigen von der Form $a \cdot b$, wo a und b die singulären Stellen der Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - S)^{(n)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n (-z)^n \cdot \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \tag{7}$$

[8]) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2, S. 300.

und $\sum \frac{1}{\mu_n} z^n = f(z)$ sind. Die Funktion (7) ist, wenn die Folge (S_n) konvergent ist, für $R(z) < \frac{1}{2}$ regulär, und $f(z)$ ist, wenn die Bedingungen A und B des Satzes 1 erfüllt sind, in dem Gebiet, in dem $R(z) < 0$ und $|z| < r$ ist, regulär. Aus dem Hadamardschen Multiplikationssatz ist jetzt die Richtigkeit des Satzes 3 leicht zu ersehen.

§ 5.

Durch die Zusammenstellung der Definition des $\bar{A}$-Verfahrens, der Gleichung (3a) von § 1 und des Satzes 1 ergibt sich folgender

Satz 5: *Damit für jede Folge (s_n), die durch die Hausdorffsche Transformation $H_{(\mu_n)}$ in eine konvergente Folge (S_n) übergeführt wird, der Grenzwert $\bar{A}$-limes s_n existiere, ist notwendig und hinreichend, daß $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} z^n$ den Bedingungen A und B des Satzes 1 genügt*[9]).

Wir können sagen, daß der Satz 5 die Bedingungen dafür gibt, daß das $\bar{A}$-Verfahren stärker als das Hausdorffsche Verfahren $H_{(\mu_n)}$ ist.

Man sagt, daß die Folge (S_n) durch das gewöhnliche Abelsche Verfahren oder A-Verfahren zum Werte s limitierbar sei, wenn $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ für $|x| < 1$ konvergent ist und gegen einen endlichen Grenzwert strebt, wenn x, reell angenommen, gegen 1 wächst. Es gilt der

Satz 5a. *Damit das gewöhnliche Abelsche Verfahren stärker als das Hausdorffsche Verfahren $H_{(\mu_n)}$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

---

[9]) Hier ist vorausgesetzt, daß $\mu_n \neq 0$ ist. Der Satz gilt jedoch auch für $\mu_0 = 0$, wenn man $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} z^n$ setzt.

Ist $\mu_k = 0$, $k \neq 0$, kann das Abelsche Verfahren nicht stärker als das Hausdorffsche sein, wie das Beispiel $s_n = \binom{n}{k}(-1)^k$, $n \geqq k$, und $s_n = 0$, $n < k$, zeigt. Denn es ist $(1-s)^{(n)} = \sum_{\nu=k}^{n} \binom{n}{\nu}\binom{\nu}{k}(-1)^{\nu+k} = \binom{n}{k}(1-1)^{n-k} = 0$, wenn $n \neq k$, und $= 1$, wenn $n = k$. Daher ist, wenn $\mu_k = 0$ ist, $(1-S)^{(n)} = \mu_n (1-s)^{(n)} = 0$ und also auch $S_n = 0$ für $n = 0, 1, 2 \ldots$

Andererseits ist $(1-x)\sum s_n x^n = (1-x)\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k}x^n = \frac{(-x)^k}{(1-x)^k}$, was nicht endlich bleibt, wenn $x \to 1$.

A. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} z^n$ *die Bedingung* A *des Satzes* 1 *erfüllt, und daß*

B. $f(z)$ *in der ganzen längs der reellen Achse von* $z = 1$ *bis* $z = +\infty$ *aufgeschnittenen z-Ebene regulär ist*[9]).

Beweis. Die Funktion

$$(6\,a) \qquad (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

$$= \sum_{=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (1-S)^{(n)} z^n; \qquad x = \frac{-z}{1-z}$$

muß für jede Folge (s_n), die durch die Transformation $H_{(\mu_n)}$ in eine konvergente Folge (S_n) übergeführt wird, für $|x| < 1$, d. h. für $R(z) < \frac{1}{2}$ regulär sein. Speziell muß, wenn $S_n = S^n$ angenommen wird, die Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} S^n (-z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = f(z(1-S))$ für $R(z) < \frac{1}{2}$ regulär sein, wie auch S in dem Kreis $|S| < 1$ gewählt wird. Daraus folgt, daß die Bedingung B des Satzes 5a notwendig ist. Wenn umgekehrt die Bedingung B erfüllt ist, muß die Funktion (6a) für jede konvergente Folge (S_n) für $R(z) < \frac{1}{2}$ d. h. für $|x| < 1$ regulär sein. Dies folgt wie in § 4 aus dem Hadamardschen Multiplikationssatz, angewandt auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (1-S)^{(n)} \cdot \frac{1}{\mu_n} z^n$.

§ 6.

Das Hausdorffsche Verfahren und das $f(z)$-Verfahren, speziell das Borelsche Verfahren.

Durch die Zusammenstellung der Definition des $f(z)$-Verfahrens, der Gleichung (3) von § 1 und des Satzes 1 ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes 5:

Satz 6. *Damit das* $g(z)$*-Verfahren, wo* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ *gesetzt ist, stärker als das Hausdorffsche Verfahren* $H_{(\mu_n)}$ *sei, ist notwendig und hinreichend, daß* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} g_n z^n$ *die Bedingungen* A *und* B *dez Satzes 1 erfüllt.*

Wir erinnern hier an die Definition des Borelschen oder B-Verfahrens: Ist eine Folge (s_n) so beschaffen, daß die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$ beständig

konvergiert und daß die Funktion $F(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$ für $x \to +\infty$ einem Grenzwerte s zustrebt, so soll die Folge (s_n) als B-limitierbar zum Werte s bezeichnet werden.

Wir sehen also, daß die Folge (s_n) B-limitierbar ist, wenn die Folge (s_n) 1. e^z-limitierbar ist und wenn 2. die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$ beständig konvergent ist.

Daher ergibt sich aus Satz 6 noch der

Satz 6a. *Damit das gewöhnliche Borelsche Verfahren stärker als das Hausdorffsche Verfahren $H_{(\mu_n)}$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{\mu_n} z^n$ *die Bedingung* A *des Satzes* 1 *erfüllt, und daß* $f(z)$ *eine ganze Funktion ist.*

(Eingegangen am 25. Dezember 1933.

Eine Überkonvexität.

Von

Anton E. Mayer in Wien.

Einen Körper im euklidischen Raum nennt man bekanntlich dann konvex, wenn er mit je zwei Punkten a, b auch die Strecke $[a, b]$ enthält. Diese jedenfalls seit den Arbeiten Minkowskis klassische Definition entfernt sich sehr weit von den Vorstellungen, die man gemeiniglich mit dem Worte „konvex" verbindet. Wollte man nämlich verdeutlichen, was der gewöhnliche Sprachgebrauch mit „konvex" meint, so wäre etwa zu sagen: Der Rand der Figur hat keine einspringenden Teile, welche Erklärung als Stützeigenschaft im kleinen [siehe unten Satz (K 5) und (K 6)] präzisiert werden könnte.

Damit sind wir, selbstverständlich ohne einem Primat der Umgangssprache das Wort reden zu wollen, zu einer infinitesimalgeometrischen Definition der Konvexität gelangt. Bei der Beschäftigung mit dieser und verwandten Definitionen steht natürlich immer die Frage im Vordergrund, ob man von der lokalen Konvexität auf die Konvexität im großen schließen kann. Diesbezügliche Sätze, die von H. Tietze herrühren, sind im Abschnitt 1 ohne Beweis zusammengestellt, daneben auch einige andere, sehr bekannte Theoreme über konvexe Mengen. Zu all diesen Sätzen ermitteln wir in der vorliegenden Arbeit Analoga in einem nunmehr zu erläuternden Sinn.

Der Definitionsbereich der klassischen Konvexitätsdefinition wurde schon mehrmals auf uneuklidische Geometrien ausgedehnt. Als derjenige Begriff, von dem solche Verallgemeinerungen ihren Ausgang nehmen können, bietet sich die „Strecke zwischen zwei Punkten" dar. In der Tat haben einige Abhandlungen gerade an dieser Stelle eingesetzt, wobei naturgemäß darauf Wert gelegt worden ist, daß allgemeinere Konvexitätsdefinitionen mit der klassischen im Euklidischen äquivalent sind[1]).

Um eine derartige Verallgemeinerung handelt es sich bei uns aber nicht, obwohl auch unsere Untersuchung an den Begriff der Zwischenstrecke anknüpft. Vielmehr betrifft die Richtung, in der ich hier die

[1]) Bezüglich der Konvexität in projektiven Räumen siehe E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. reine angew. Math. **143** (1913), S. 128—175; **144** (1914), S. 1—40; **146** (1916), S. 1—52, besonders Abschnitt VII. Weitere Hinweise bei T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper (Ergebn. Math. und Grenzgebiete **3**, Heft 1) Berlin 1934, S. 4. Hinzuzufügen wäre: O. Veblen und J. W. Young, Projective Geometry 2, Boston 1917, S. 388, Aufgabe 3.

Konvexitätstheorie zu erweitern unternehme, nicht den Raum, sondern die betrachteten Mengen. Im folgenden wird nämlich die gewohnte Definition des Konvexen dadurch abgeändert, daß an die Stelle der Zwischenstrecken Kurvenbögen treten. Ich ging dabei von einem Umstand aus, dessen ich bei der Untersuchung einer besonderen Klasse konvexer Figuren gewahr wurde, daß man in den grundlegenden Sätzen über konvexe Gebilde die dort vorkommenden *Geraden und Strecken durch Bögen untereinander gleicher Kreise ersetzen* kann. Zur Verdeutlichung dieser Übertragungsregel sei beispielsweise an den wohlbekannten Satz erinnert: Enthält eine ebene offene Menge alle Strecken zwischen ihren Punkten, so gibt es durch jeden Begrenzungspunkt eine Stützgerade, und umgekehrt. Dieser Satz bleibt gültig, wenn statt der Strecken Bögen von Kreisen, statt der Stützgeraden Kreise genommen werden, die die Menge umschließen, falls alle Kreise die gleiche Krümmung haben. Von dem solcherart gewonnenen Satz ist der ursprüngliche ein Grenzfall und zwar für verschwindende Krümmung. Man könnte nun den verallgemeinerten Satz unmittelbar zu beweisen versuchen und gewänne so zugleich den ursprünglichen Satz durch Nullwerdenlassen der Krümmung.

Ich habe hingegen einen anderen Weg eingeschlagen, der den folgenden bemerkenswerten Umstand verwertet. Wenn man, um es kurz zu sagen, die Geraden, die in den Sätzen über konvexe Mengen vorkommen, zu Kreisen verbiegt, dann liefert dieses Verfahren, sofern es überhaupt richtige Sätze ergibt, solche von allgemeinerer Geltung, denn die ursprünglichen Sätze sind ja Grenzfälle von ihnen. Aber diese *allgemeineren* Sätze handeln, wie sich zeigt, von *speziellen* konvexen Mengen, für die ich daher die Benennung „*überkonvex*“ vorschlage. Mithin war es möglich, die Beweise der Sätze von den überkonvexen Mengen dadurch abzukürzen, daß ich mich auf bereits bekannte, im Abschnitt 1 wiedergegebene Sätze berief, die im gewöhnlichen Sinn konvexe Mengen betreffen.

Beim Durchführen der Übertragung der Sätze von konvexen Gebilden auf überkonvexe (Abschnitte 2 und 4) ergab sich, daß die Kreise gleicher Krümmung ihrerseits durch Kurven ersetzt werden können, die aus einer konvexen Kurve mit Mittelpunkt durch alle Parallelverschiebungen hervorgehen, kurz: durch gleichgroße „Kreise“ einer Minkowskischen Geometrie. Daher wird in der Folge eine *Minkowskische Maßbestimmung* verwendet werden.

Es erwies sich als zweckmäßig, einige Hilfssätze über den Umkreis eines Dreiecks in der Minkowskischen Geometrie einzuschalten (Abschnitt 3). Hier spielt eine sonst kaum beachtete kontinuierliche Transformationsgruppe eine Rolle, die Gruppe zentrischer Ähnlichkeiten mit positivem Ähnlichkeitsverhältnis.

Abschnitt 5 bringt Beispiele.

Im Abschnitt 6 wird die Überkonvexität als gleichwertig mit einer Krümmungsschranke für den Rand konvexer Mengen erkannt. Hierbei, wie in den übrigen Teilen der Arbeit, wird Differentiierbarkeit in keiner Weise vorausgesetzt, denn eine derartige Forderung läge nicht im Wesen der Sache.

Während in den Abschnitten 1 bis 6 die Untersuchung bloß in der Ebene geführt wird, handelt der letzte Abschnitt von der Überkonvexität im n-dimensionalen euklidischen Raum[1a]).

1. Konvexe Mengen.

Wir beginnen mit den Sätzen:

(K 1). *Die abgeschlossene Hülle*[2]) *einer konvexen Menge ist konvex. Der offene Kern einer konvexen Menge ist konvex*[3]). Versetzen wir uns nun in die euklidische *Ebene*! Hier trifft bekanntlich folgendes zu:

(K 2). *Ist a ein Punkt der Begrenzung A_g einer konvexen Menge A, so hat A in a* (mindestens) *eine Stützgerade*[4]); d. h. es gibt eine Gerade G durch den Punkt a, so daß $A - G$ zusammenhängend ist.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein, wohl aber:

(K 3). *Ist A eine abgeschlossene Menge mit inneren Punkten*[4]) *oder eine offene Menge, dann ist A konvex, wenn durch jeden Begrenzungspunkt* (mindestens) *eine Stützgerade geht.*

Die Menge A heiße im Punkte $a \varepsilon A$ lokal konvex, wenn eine Umgebung $U(a)$ des Punktes a existiert, deren Durchschnitt $AU(a)$ mit der Menge A konvex ist. Entsprechend nennen wir eine Menge lokal konvex, wenn sie in jedem ihrer Punkte lokal konvex ist. Nun besteht der folgende Satz.

(K 4). *Jede abgeschlossene, zusammenhängende und lokal konvexe Menge ist konvex*[5]).

Mithin ist unter recht allgemeinen Bedingungen das Vorhandensein der Zwischenstrecken im großen dem im kleinen äquivalent. Einigermaßen

---

1a) Die vorliegende Arbeit habe ich auszugsweise in der Math. Gesellschaft in Wien am 15. Dezember 1933 vorgetragen.

2) Dieser und die folgenden grundlegenden Begriffe werden so verwendet wie bei F. Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl., Berlin und Leipzig 1927 und H. Hahn, Reelle Funktionen 1, Leipzig 1932. Insbesondere ist unter Gebiet eine zusammenhängende offene Menge zu verstehen.

3) E. Steinitz[1]), **143**, S. 150; **146**, S. 3.

4) Vgl. T. Bonnesen und W. Fenchel[1]), S. 6.

5) H. Tietze, Über Konvexheit im kleinen und im großen und über gewisse, den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 697—707.

dual hierzu sind auch die für konvexe Mengen gemäß (K 2) und (K 3) ziemlich kennzeichnenden Stützgeraden mit der entsprechenden Eigenschaft im kleinen gleichwertig. Es gilt nämlich:

(K 5). *Wenn A ein Gebiet oder die abgeschlossene Hülle eines Gebietes ist und zu jedem Begrenzungspunkt $a \varepsilon A_g$ eine Umgebung $U(a)$ existiert, so daß $A\,U(a)$ in a eine Stützgerade besitzt, dann ist A konvex*[6]). Statt der letzten Bedingung sagt man auch, an A gebe es in a eine Stützstrecke.

Mit der Bezeichnung $U(a; \varrho)$ für die Menge der Punkte, die von a eine euklidische Entfernung $< \varrho$ haben, formulieren wir schließlich:

(K 6). *Läßt sich für eine abgeschlossene zusammenhängende Menge A, die innere Punkte enthält, eine Zahl $\varrho > 0$ derart angeben, daß durch jeden Randpunkt $a \varepsilon A_g \subseteq A$ eine Stützgerade an $A\,U(a; \varrho)$ geht, so ist A konvex*[7]). Hier handelt es sich also um Stützstrecken gleicher Länge.

2. Überkonvexe Mengen.

Wir führen jetzt als Eichkurve einer Minkowskischen Maßbestimmung eine konvexe geschlossene Mittelpunktskurve E ein, deren euklidischer Mittelpunkt zugleich ihr Minkowskischer Mittelpunkt ist[8]). Von der Kurve E sei weiter vorausgesetzt, daß sie *weder Ecken besitzt noch Teilbögen, die Strecken sind.* (Für die Abbildungen wurde E als gewöhnlicher Kreis angenommen). Jede durch Parallelverschiebung aus E hervorgehende Kurve heiße Einheitskurve. Jeder Bogen einer Einheitskurve, der wenigstens von einem Durchmesser derselben nicht in mehrere Bögen zerteilt wird, sei ein Einheitsbogen. Als letzten Begriff definieren wir

---

[6]) H. Tietze, Über konvexe Figuren, Journ. reine angew. Math. **158** (1927), S. 168—172; derselbe, Bemerkungen über konvexe und nicht-konvexe Figuren, ebenda **160** (1929), S. 67—69; L. Bieberbach, Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1932, S. 20. Vgl. auch B. Kaufmann, Über Konvexitäts- und Konkavitätsstellen auf Jordankurven, Journ. reine angew. Math. **164** (1931), S. 112—127; derselbe, Über Stützstreckenverteilung und Zerlegung konvexer Figuren in konvexe Teilfiguren ohne geradlinige Begrenzungsteile, ebenda **166** (1932), S. 151—166.

[7]) H. Tietze, Eine charakteristische Eigenschaft der abgeschlossenen konvexen Punktmengen, Math. Annalen **99** (1928), S. 394—398; K. Reinhardt, Über einen Satz von Herrn H. Tietze, Jahresber. deutsch. Math.-Vereinig. **38** (1929), S. 191—192; B. Kaufmann[6]).

Im Text ist, wenn man will, von stützenden Halbkreisen mit festem Radius die Rede. Stützende Rechtecke gleicher Länge und beliebiger Breite verwendet dagegen W. Süss, Eine Kennzeichnung von Eibereichen, Tôhoku Math. Journ. **32** (1930), S. 362—364.

[8]) Mithin liegen *wechselseitige* Strahldistanzen vor (in der Bezeichnungsweise von H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig und Berlin 1896—1910).

überkonvex. *So heiße die Menge A dann, wenn zu je zwei Punkten $a \varepsilon A$ und $b \varepsilon A$ ein Einheitsbogen existiert, dessen Endpunkte a, b sind, und wenn A jeden solchen Einheitsbogen enthält.*

Der triviale Fall, daß A nur aus einem Punkt besteht oder gar leer ist, soll stets außer Betracht bleiben.

Nunmehr beweisen wir einen Hilfssatz, der auch den Namen „überkonvex" rechtfertigt.

(H 1). *Die überkonvexen Mengen sind konvex.*

Sind a und b Punkte der überkonvexen Menge A, ferner B ein in a und b endender Einheitsbogen, endlich c^* ein von a, b verschiedener Punkt der Strecke $[a, b]$, so ermitteln wir die (einzige) zur Geraden ab parallele Stützgerade an B, die B in c treffen möge (Fig. 1). Durch Spiegelung von a, b und B an dem Mittelpunkt der Strecke $[c, c^*]$ entstehen die Punkte a^* bzw. b^* sowie der sie beide verbindende Bogen B^*, der im Punkte c^* von $[a, b]$ gestützt wird. Der zwischen a und c gelegene Teilbogen von B schneidet den Teilbogen b^*c^* des Bogens B^*. Denn beide Teilbögen verlaufen im Parallelstreifen zwischen der Geraden ab und a^*b^* und verbinden kreuzweise die Endpunkte der Randstrecken $[a, c^*]$, $[b^*, c]$ dieses Streifens. Ein Schnittpunkt der Teilbögen ac und b^*c^* sei d. Ganz entsprechend sieht man, daß auch die Teilbögen cb und c^*a^* einen Punkt e gemein haben. Der Bogen B^* ist als Spiegelbild von B ebenfalls ein Einheitsbogen. Sein Teilbogen dc^*e gehört daher als Einheitsbogen zwischen den Punkten $d \varepsilon A$ und $e \varepsilon A$ zur überkonvexen Menge A, insbesondere ist $c^* \varepsilon A$, w. z. b. w.

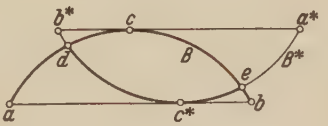


Fig. 1.
Überkonvexes ist konvex.

Zu den Sätzen aus Abschnitt 1 sollen nun der Reihe nach die entsprechenden für überkonvexe Mengen abgeleitet werden. Analoge Sätze erhalten dabei die gleiche Ziffer.

(Ü 1). *Die abgeschlossene Hülle der überkonvexen Menge A ist überkonvex, ebenso der offene Kern von A.*

Wir begründen hier nur die erste Aussage; die zweite wird sich anläßlich des Satzes (Ü 3) ergeben.

Zunächst werde gezeigt, daß je zwei Häufungspunkte a, b der Menge A durch einen Einheitsbogen verbindbar sind. In A gibt es eine Folge $\{a_n, b_n\}$ von Punktepaaren, die gegen das Punktepaar a, b konvergiert $(n = 1, 2, \ldots)$. Ist o der Mittelpunkt der Eichkurve E und der Vektor $\overline{op_n} = \frac{1}{2}\overline{a_n b_n}$, so fällt der Punkt p_n auf die konvexe Hülle $[E]$ von E. Denn dies ist eine notwendige Bedingung dafür, daß A überkonvex ist, daß also a_n und b_n durch einen Einheitsbogen verknüpft werden können.

Die Folge $\{p_n\}$ konvergiert offenbar gegen den Punkt p, für den $\overline{op} = \frac{1}{2}\overline{ab}$ ist. Weil $[E]$ abgeschlossen ist, haben wir $p \varepsilon [E]$, und das wiederum ist hinreichend für das Bestehen eines a mit b verbindenden Einheitsbogens B.

Es bleibt noch zu beweisen, daß alle Punkte aus B Häufungspunkte von A sind. Da A zufolge (H 1) konvex ist, kann man, wie kaum im einzelnen ausgeführt werden muß, in A jedes Punktepaar a_n, b_n nunmehr derart gewählt denken, daß $a_n \varepsilon U\left(a; \frac{1}{n}\right)$, $b_n \varepsilon U\left(b; \frac{1}{n}\right)$, ferner $a_n b_n$ parallel ab und $\overline{a_n b_n} < \overline{ab}$ ist. Nach den Regularitätsannahmen, die über E gemacht wurden, existiert genau eine Sehne $a_n^* b_n^*$ des Bogens B, für die $\overline{a_n^* b_n^*} = \overline{a_n b_n}$. Verschiebt man den zwischen a_n^* und b_n^* gelegenen Teilbogen B_n^* des Einheitsbogens B um den Vektor $\overline{a_n^* a_n}$, so entsteht ein Einheitsbogen B_n zwischen a_n und b_n, für den wegen der Überkonvexität von A gilt: $B_n \subset A$. Jeder Punkt des Teilbogens B_n^* geht demnach aus einem Punkt der Menge A, nämlich aus einem Punkt von B_n durch die entgegengesetzte Verschiebung, also $\overline{a_n a_n^*}$ hervor. Die Länge dieses Vektors geht gegen Null, wenn n die natürliche Zahlenreihe durchläuft. Zugleich konvergiert B_n^* gegen B. Denn die Länge der zu ab parallelen Sehnen von B ist als Funktion ihrer Entfernung von der Geraden ab stetig, abnehmend und in keinem Intervall konstant; die umgekehrte Funktion ist daher auch stetig. Aus $B_n^* \to B$ folgt mit $\overline{a_n a_n^*} \to 0$ auch $B_n \to B$, womit der erste Teil von (Ü 1) bewiesen ist.

Dieser Satz ist durchaus nicht so selbstverständlich, wie es den Anschein haben mag. Er gilt nämlich keineswegs, wenn man für den Augenblick von der Eichkurve keine Regularität voraussetzt, sondern E eine beliebige geschlossene konvexe Mittelpunktskurve sein läßt [während (H 1) auch dann richtig ist]. Besteht z. B. die Menge A aus den Punkten im Innern eines Quadrates, dessen Rand E sei, so ist A überkonvex. Trotzdem ist die abgeschlossene Hülle von A, d. h. $A + E$, nicht überkonvex. Denn verschiebt man E in der Richtung einer Quadratseite etwa um die halbe Seitenlänge nach E', so ist der zu $A + E$ *fremde* Bogen von E' ein Einheitsbogen zwischen zwei Ecken des Quadrates $A + E$.

Wir kommen zum Satz:

(Ü 2). *Ist a ein Punkt der Begrenzung A_g der überkonvexen Menge A, so gibt es eine durch a gehende Einheitskurve, die A umschließt*, eine Stützkurve, wie man sagen könnte.

Nach (H 1) und (K 2) gibt es an A in a eine Stützgerade G. Durch a geht eine einzige Einheitskurve I, die von G gestützt, sowie durch G nicht von A getrennt wird. Wir behaupten, ein wenig über (Ü 2) hinausgehend, daß $A \subset [I]$ ist, wobei die eckige Klammer fortan, wie schon einmal, die Operation „konvexe Hülle" anzeigen soll. (Auch die konvexe

Hülle mehrerer Punkte deuten wir durch Einschließen in eine eckige Klammer an, womit die gleich zu Beginn eingeführte Bezeichnung von Strecken übereinstimmt.)

Angenommen, I umschließe A nicht, d. h. es gäbe außerhalb $[I]$ einen Punkt $b \varepsilon A$. Dann befinden sich b und I zur selben Seite von G (Fig. 2) oder b liegt auf G selbst. Jedenfalls ist $\overline{ab}$ länger als die auf der Strecke $[a, b]$ gelegene Sehne von I. Andererseits ersieht man aus dem bisherigen Beweis von (Ü 1), daß $\overline{ab}$ nicht länger ist als der zu ab parallele Durchmesser $\overline{a_1 b_1}$ von I. Daher gibt es im Innern des Parallelstreifens zwischen den Geraden ab und $a_1 b_1$ eine (und nur eine) Sehne $a^* b^*$ von I, für die $\overline{a^* b^*} = \overline{ab}$ oder, äußerstenfalls, ist $a_1 b_1$ selbst diese Sehne. Unterwirft man den Teilbogen $a^* a b^*$ von I der Schiebung $\overline{a^* a}$, dann entsteht ein a mit b verbindender Einheitsbogen B. Alle Punkte von B sind gemäß (Ü 1) Häufungspunkte von A, insbesondere auch der aus a durch die Schiebung $a^* \overline{a}$ erzeugte Punkt h, d. i. das Spiegelbild von a^* bezüglich a. Da a^* nach den über E gemachten Annahmen nicht auf G liegt, wohl aber auf derselben Seite von G wie A, so wird die Menge A von ihrem Häufungspunkt h durch G getrennt: ein Widerspruch zur Stützeigenschaft dieser Geraden.

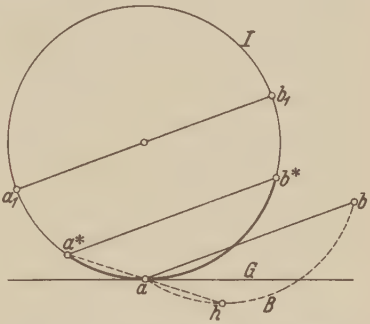


Fig. 2. Überkonvexe Mengen besitzen Stützkurven.

3. Aus der Minkowskischen Geometrie.

Bevor wir in der Übertragung der Sätze aus Abschnitt 1 auf überkonvexe Mengen fortfahren, stellen wir, um nicht später zu Unterbrechungen genötigt zu sein, einige Betrachtungen zusammen, die das Verhalten der Eichkurve E in der *Gruppe der zentrischen Ähnlichkeiten* betreffen. Es ist zweckmäßig, noch die *Untergruppe der zentrischen Ähnlichkeiten mit positivem Streckungsverhältnis* hervorzuheben. Diese Untergruppe und um so mehr die Gruppe der zentrischen Ähnlichkeiten umfaßt auch alle Parallelverschiebungen. Die zentrischen Ähnlichkeiten mit positivem Ähnlichkeitsverhältnis (oder kurz: die positiven Ähnlichkeiten) dürfen nicht mit den gleichsinnigen Ähnlichkeiten verwechselt werden. Wohl können gleichsinnig ähnliche Felder durch Bewegung stets in positiv ähnliche Lage gebracht werden, doch sind zentrisch ähnliche Felder immer gleichsinnig, aber nicht immer positiv ähnlich.

Für zwei zentrisch ähnliche oder parallel verschobene Mengen A, B schreiben wir: $A \sim B$, beziehungsweise, wenn das Ähnlichkeitsverhältnis positiv ist und dies gekennzeichnet werden soll: $A \overset{+}{\sim} B$.

(H 2). *Jedem nicht ausgearteten Dreieck abc kann genau eine Kurve $K \sim E$ umschrieben werden.* Dies besagt wegen der zentrischen Symmetrie von E offenbar dasselbe wie: Es gibt ein einziges der Kurve E eingeschriebenes Dreieck $a^*b^*c^* \overset{+}{\sim} abc$.

Zum Beweise der letzteren Aussage[9]) treffen wir zwei Vorbereitungen.

Erstens suchen wir zur Stützgeraden bc des Dreiecks $[a, b, c]$ die *gegensinnig* parallele Stützgerade[10]) an E, deren Stützpunkt a_1 sei. Durch a_1 ziehen wir die Parallelen zu ab und ac, die E in b_1 bzw. c_0 schneiden mögen (Fig. 3). Schließlich bauen wir an a_1b_1 und a_1c_0 die Dreiecke

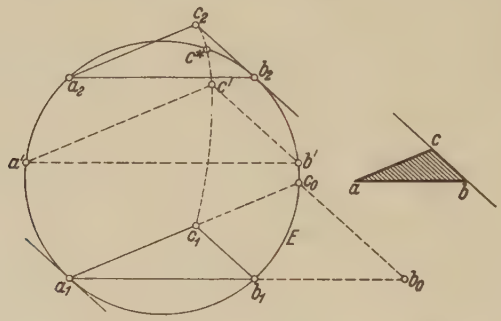


Fig. 3. Zur Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks (in der Minkowskischen Geometrie).

$a_1b_1c_1 \overset{+}{\sim} abc$ und $a_1b_0c_0 \overset{+}{\sim} abc$ an. Eines von diesen Dreiecken ist Teil des Dreiecks $[a_1, b_1, c_0]$, und zwar seien die Bezeichnungen so gewählt, daß $[a_1, b_1, c_1] \subset [a_1, b_1, c_0]$ ist. Folglich ist c_1 ein Punkt der konvexen Hülle $[E]$ der Eichkurve.

Zweitens legen wir die zu bc *gleichsinnig* parallele Stützgerade an E und ziehen durch ihren Stützpunkt b_2 die Sehne a_2b_2 parallel ab. Wird endlich c_2 auf der Stützgeraden so gewählt, daß $a_2b_2c_2 \overset{+}{\sim} abc$ ist, so fällt c_2 außerhalb E.

---

[9]) Sie ist nicht durch die Symmetrie von E bedingt, im Gegensatz zu (H 2). Für gleichseitige Dreiecke findet man sie bei K. Zindler, Über konvexe Gebilde, II. Teil, Monatsh. Math. Phys. **31** (1921), S. 25—57, bes. S. 53.

[10]) Die Stützgerade G_1 der Menge A_1 und die parallele Stützgerade G_2 an A_2 heißen gleichsinnig parallel, wenn eine Schiebung existiert, welche diejenige von G_1 begrenzte Halbebene, die zu A_1 fremd ist, in die von G_2 begrenzte und zu A_2 fremde Halbebene überführt; sie heißen gegensinnig parallel, wenn es keine derartige Schiebung gibt.

Nunmehr konstruieren wir über jeder zu ab parallelen Sehne von E, die zwischen a_1b_1 und a_2b_2 liegt, das Dreieck $\pm\sim abc$. Die Spitzen dieser Dreiecke erzeugen jedenfalls ein stetiges Streckenbild, das die Punkte c_1 und c_2 verbindet und infolgedessen mit E einen Punkt c^* gemein hat[11]). Hiermit ist die Existenz des angekündigten, der Eichkurve eingeschriebenen Dreiecks $a^*b^*c^* \pm\sim abc$ nachgewiesen. Ein zweites Dreieck dieser Art kann nicht bestehen. Dies ergibt sich unmittelbar, wenn man die Voraussetzung, daß E streckenfrei ist, mit der folgenden, leicht überprüfbaren Bemerkung zusammenhält: *Liegen zwei Dreiecke* $a^*b^*c^* \pm\sim a^{**}b^{**}c^{**}$ *vor, so ist wenigstens einer der sechs Eckpunkte nicht Ecke der konvexen Hülle beider Dreiecke.*

Der Hilfssatz (H 2) besagt auch, daß zwei *verschiedene Kurven* $K\sim E$ *und* $K'\sim E$ *sich höchstens in zwei Punkten schneiden.* Denn, wenn sie drei gemeinsame Punkte hätten, lägen diese zufolge der Regularität von E nicht in einer Geraden. Nach (H 2) wäre aber dann $K = K'$.

Die vorhin angegebene erste Vorbereitung des Beweises sollte nur ein Dreieck $\pm\sim abc$ sicherstellen, von dem zwei Ecken auf E fallen, die dritte auf $[E]$. Wenn ein solches Dreieck $a'b'c'$ (in Fig. 3 gestrichelt) von vornherein bekannt ist, so kann es im Beweis an die Stelle von $a_1b_1c_1$ treten. Es ist klar, daß c' und b_2 zur selben Seite der Geraden $a'b'$ liegen und mit ihnen auch das gesuchte Dreieck $[a^*, b^*, c^*]$. Daher fällt dieses Dreieck *kleiner* als $[a', b', c']$ aus, wenn wir nunmehr annehmen, daß der Bogen $a'b_2b'$ ein Einheitsbogen B ist und c' ein innerer Punkt von $[B]$. Oder mit anderen Worten:

(H 3). *Geht die Kurve* $K\sim E$ *durch die Endpunkte eines Einheitsbogens und durch einen inneren Punkt seiner konvexen Hülle, so ist* K *größer als* E, größer im Sinne der Minkowskischen oder der Euklidischen Geometrie; denn bei zentrisch ähnlichen Figuren macht das keinen Unterschied.

Wir leiten noch folgenden Hilfssatz ab:

(H 4). *Besitzt* $K\sim E$ *einen Durchmesser, der den Teilbogen* acb *der Kurve* K *nicht in mehrere Bögen zerlegt, so ist jede von* K *verschiedene Kurve* $K'\sim E$, *die durch* c *geht sowie die Punkte* a, b *umschließt, größer als* K.

Bezeichnet c^* den Punkt, der diametral zu c auf K liegt, so ist zunächst klar, daß die Punktepaare a, b und c, c^* einander auf K trennen. Die beiden Teile, in die c^* den Bogen ac^*b zerlegt, seien B_1 und B_2.

[11]) Für E als Kreis (oder Ellipse) ist der Ort der Dreieckspitzen eine zu E konzentrische Ellipse. Dies ergibt sich ohne weiteres aus einer naheliegenden räumlichen Deutung der Figur, und zwar als Grundriß des Schnittes zweier schiefer Zylinder mit der gemeinsamen Basis E.

Angenommen, c^* wäre ein äußerer Punkt von K'. Dann liegt wegen $a \varepsilon [K']$, $b \varepsilon [K']$ sowohl auf B_1 als auch auf B_2 ein Begrenzungspunkt von $[K']$ d. h. ein Punkt von K'. Diese auf B_1 und B_2 befindlichen Punkte von K' sind verschieden, weil $B_1 B_2 = c^*$ ist. Da zu $K K'$ jedenfalls noch ein dritter Punkt, nämlich c, gehört, ist $K = K'$, gegen die Voraussetzung. Also muß $c^* \varepsilon [K']$ sein.

Wäre nun der Durchmesser $[c, c^*]$ von K auch ein Durchmesser von K', so würde wieder $K = K'$. Infolgedessen ist die Strecke $[c, c^*]$ Teil einer Sehne von K' oder echter Teil eines Durchmessers von K'. In beiden Fällen ist K' größer als K, wie behauptet wurde.

4. Weiteres von den überkonvexen Mengen.

Jetzt sind wir in der Lage, zu (Ü 2) die folgende Umkehrung sehr kurz zu beweisen.

(Ü 3). *Wenn die von der gesamten Ebene verschiedene Menge A abgeschlossen ist und innere Punkte enthält oder offen ist, so ist A überkonvex, falls durch jeden Punkt $a \varepsilon A_g$ eine Einheitskurve geht, die A umschließt*[12]).

Die Einschränkung, A sei nicht die volle Ebene, die wir hier und im folgenden anbringen, abweichend von der Fassung der Sätze (K 3) bis (K 6), kann nicht ohne weiteres entbehrt werden. Denn während die volle Ebene konvex ist, ist sie gewiß nicht überkonvex. Zwei hinreichend weit auseinanderliegende Punkte können ja nicht durch einen Einheitsbogen verknüpft werden.

Da jedoch A als echter Teil der Ebene vorausgesetzt ist, fällt die Begrenzung A_g nicht leer aus. Folglich liegt A in einer Einheitskurve. Somit sind je zwei Punkte a, b der Menge A durch einen Einheitsbogen verbindbar. Es muß nur noch gezeigt werden, daß für jeden Einheitsbogen B, der in a und b endet, $B \subset A$ gilt. Nach (K 3) ist A konvex, mithin jeder Punkt von A ein Häufungspunkt innerer Punkte Im Hinblick auf den ersten Teil von (Ü 1) genügt es daher, den Nachweis dafür, daß $B \subset A$ ist, unter der Bedingung zu erbringen, a und b seien *innere* Punkte.

Angenommen, es gäbe einen Punkt $c \varepsilon B A_g$. Dann ist die Einheitskurve $I \supset B$ die einzige durch c hindurchgehende Einheitskurve, welche a und b umfaßt. Denn jede von I verschiedene Kurve $K \sim E$, die, a und b umschließend, durch den Punkt c geht, ist zufolge (H 4) größer als I,

[12]) Die entgegengesetzte Stützungsbedingung findet sich bei G. Durand, Sur une généralisation des surfaces convexes, J. de Math. (9) **10** (1931), S. 335—414. Dort werden nämlich (nicht notwendig konvexe) Mengen mit folgender Eigenschaft untersucht: Durch jeden Begrenzungspunkt läuft eine Einheitskugel, deren Inneres zur Menge *fremd* ist.

also keine Einheitskurve. Daher ist nach Voraussetzung $A \subseteqq [I]$. Die Punkte a und b sind aber Randpunkte von $[I]$, infolgedessen sicherlich nicht innere Punkte von A: ein Widerspruch.

Wir können somit sagen, daß der Einheitsbogen B zwischen den inneren Punkten a, b keinen Punkt der Begrenzung A_g enthält, folglich zur Gänze aus inneren Punkten von A besteht. Damit ist $B \subset A$ bewiesen; darüber hinaus ist mit Rücksicht auf (Ü 2) auch der noch ausständige zweite Teil von (Ü 1) erledigt.

In völliger Analogie zur lokalen Konvexität (S. 513) sprechen wir jetzt von lokal überkonvexen Mengen. Für diese besteht der Satz:

(Ü 4). *Überdeckt die abgeschlossene Menge A nicht die ganze Ebene, ist ferner A zusammenhängend und lokal überkonvex, so ist A überkonvex.*

Wir beweisen dies zugleich mit den beiden folgenden Sätzen:

(Ü 5). *Wenn A ein echtes Teilgebiet der Ebene oder die von der Gesamtebene verschiedene abgeschlossene Hülle eines Gebietes ist und zu jedem Punkt $a \varepsilon A_g$ eine Umgebung $U(a)$ existiert, derart, daß durch a eine Einheitskurve hindurchgeht, die $AU(a)$ umschließt, so ist A überkonvex.*

(Ü 6). *Kann zu einer die Ebene nicht ganz erfüllenden abgeschlossenen und zusammenhängenden Menge A mit inneren Punkten eine Zahl ϱ so bestimmt werden, daß durch jeden Punkt $a \varepsilon A_g$ eine $AU(a; \varrho)$ umschließende Einheitskurve läuft, dann ist A überkonvex.*

Weil E streckenfrei ist, besitzt A auch im Falle (Ü 4) innere Punkte, nämlich zufolge (H 1). In jedem der drei zu beweisenden Sätze ist A nach dem entsprechenden Satz aus Abschnitt 1 konvex. Folglich ist jeder Punkt von A ein Häufungspunkt innerer Punkte. Daher ist es mit Berufung auf (Ü 1) erlaubt, bloß für je zwei *innere* Punkte a, b der Menge A einen verbindenden Einheitsbogen B nachzuweisen und darzulegen, daß für jeden solchen Bogen $B \subset A$ gilt. Wir setzen ferner A als *abgeschlossen* voraus; denn die Aussage von (Ü 5) über offene Mengen ergibt sich mit Rücksicht auf (Ü 1) und die Konvexität von A offenbar leicht aus dem Teil des Satzes (Ü 5), der abgeschlossene Mengen betrifft.

Die Menge A besitzt als abgeschlossener echter Teil der Ebene, der innere Punkte enthält, auch einen nicht auf der Geraden ab befindlichen Begrenzungspunkt c_1. Wir fassen jetzt das System $\mathfrak{B}$ der Bögen ins Auge, die zu je einem Teilbogen von E zentrisch ähnlich sind und a, b zu Endpunkten haben. Wie wir beim Beweise von (H 2) vermerkt haben, sind je zwei Bögen aus $\mathfrak{B}$ nur die Endpunkte a, b gemeinsam. Nach (H 2) gibt es in $\mathfrak{B}$ einen Bogen C_1, der durch den Begrenzungspunkt c_1 geht.

Wir nehmen hier vorweg, daß ein Bogen $H \varepsilon \mathfrak{B}$, $H \subset A\,[C_1]$ existiert, der einen Punkt $h^* \varepsilon A_g$ trägt. Wenn nun kein Einheitsbogen Element von $\mathfrak{B}$ wäre (falls nämlich $\overline{ab}$ größer als der parallele Durchmesser von

E), so wäre H Teilbogen einer Kurve $K \sim E$, die sicherlich größer als E ist. Dasselbe träte ein, wenn ein Einheitsbogen $B \varepsilon \mathfrak{B}$ nicht in A enthalten wäre. Denn setzt man in diesem Fall $B = C_1$, so muß H durch einen inneren Punkt von $[B]$ gehen, worauf (H 3) angewendet werden kann.

Daraus, daß $H \subset K \sim E$ und K *größer* als E ist (Fig. 4), ergibt sich ein Widerspruch. Zu $h^* \varepsilon H A_g$ sollte nämlich eine Umgebung $U(h^*)$ bestehen, solcherart, daß eine durch h^* hindurchgehende Einheitskurve den Durchschnitt $A\,U(h^*)$ umschließt. In (Ü 5) und (Ü 6) wurde das ja unmittelbar vorausgesetzt; was (Ü 4) anlangt, so folgt dies sofort mittels (Ü 2). Greifen wir jetzt innerhalb $U(h^*)$ auf H die Punkte k, l zu beiden Seiten von h^* heraus, so gilt infolge $H \subset A$ auch $k \varepsilon A\,U(h^*)$ und $l \varepsilon A\,U(h^*)$. Es gibt aber [vgl. (H 4)] keine durch h^* verlaufende Einheitskurve, die k und l umfaßt: der angekündigte Widerspruch.

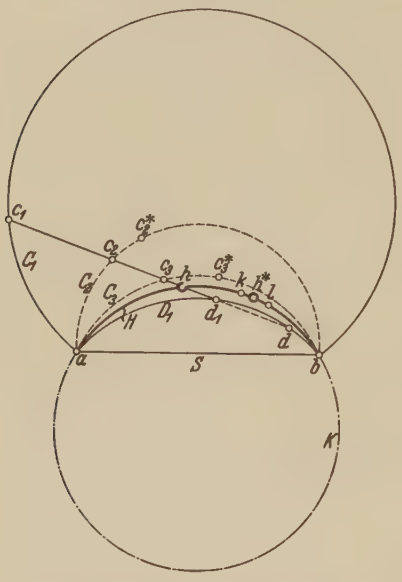


Fig. 4. Ein Grenzprozeß in einem Kreisbüschel (der Minkowskischen Geometrie).

Hiermit wäre der Beweis der Sätze (Ü 4) bis (Ü 6) vollendet, wenn nicht noch die Existenz eines Bogens $H \varepsilon \mathfrak{B}$, $H \subset A\,[C_1]$ nachzuweisen wäre, der einen Begrenzungspunkt $h^* \varepsilon A_g$ enthält. Wir tragen dies nun nach.

Die Menge A ist, wie gesagt, entweder zufolge (K 4) oder nach (K 5) oder (K 6) konvex. Aus (K 1) folgt daher, daß die Strecke $S = [a, b]$ zwischen den inneren Punkten a, b von A aus inneren Punkten besteht. Es gibt dann auch eine Umgebung $U(S; \varrho)$ der Strecke S, so daß $U(S; \varrho) \subset A$. Man überzeugt sich leicht, daß auf Grund der Regularität von E ein Bogen $D_1 \varepsilon \mathfrak{B}$ angegeben werden kann, der in $[C_1]\,U(S; \varrho)$ verläuft. Sei $d \varepsilon D_1$ ein von a, b verschiedener Punkt, der jedenfalls ein *innerer Punkt* von A ist. Andererseits haben wir, wie erinnerlich, einen Bogen $C_1 \varepsilon \mathfrak{B}$, der einen *Begrenzungspunkt* c_1 der Menge A enthält.

Derjenige Schnittpunkt des Bogens D_1 mit der Strecke $[c_1, d]$, der c_1 zunächst liegt, möge mit d_1 bezeichnet werden (eventuell ist $d_1 = d$). Wir ordnen jetzt den Punkten der Strecke $[c_1, d_1]$ die durch sie hindurchgehenden Bögen aus $\mathfrak{B}$ zu Diese Zuordnung erweist sich mit Benutzung von (H 2) als eindeutig. Dem einen Endpunkt der Strecke $[c_1, d_1]$ ist also ein Bogen zugeordnet (nämlich C_1), auf dem sich ein Begrenzungs-

punkt aus A befindet; dem andern Endpunkt entspricht ein Bogen (nämlich D_1), der aus inneren Punkten von A besteht. Diese Eigenschaft der Strecke $[c_1, d_1]$ kann mittels des *Prinzips der Intervallhalbierung* auf immer kleinere ineinandergeschachtelte Teilstrecken übertragen werden.

Das angedeutete Verfahren erzeugt auf $[c_1, d_1]$ eine monoton abnehmende Folge $\{[c_n, d_n]\}$ von Strecken, die sich auf einen Punkt h zusammenzieht $(n = 1, 2 \ldots)$. Dabei geht durch den näher an c_1 gelegenen Endpunkt c_n jeder Strecke ein Bogen $C_n \varepsilon \mathfrak{B}$, der wenigstens einen Begrenzungspunkt trägt. Wir wählen auf jedem Bogen der Folge $\{C_n\}$ genau einen Punkt $c_n^* \varepsilon A_g$ aus. Die Folge $\{c_n^*\}$ (die äußerstenfalls aus dem unendlich vielfach gezählten Punkt c_1 besteht) ist auf $[C_1]$ beschränkt, hat daher wenigstens einen Häufungspunkt h^*, der selbst ein Begrenzungspunkt ist, weil A_g abgeschlossen ist. Der Häufungspunkt h^* gehört zur oberen Näherungsgrenze der Folge $\{C_n\}$. Diese Grenze ist ersichtlicherweise der durch h hindurchgehende Bogen $H \varepsilon \mathfrak{B}$.

Zwischen H und D_1 darf sich kein Begrenzungspunkt von A befinden. Sonst gäbe es ja zwischen h und d_1 einen Punkt der Strecke $[c_1, d_1]$, durch den ein Bogen aus $\mathfrak{B}$ mit einem Begrenzungspunkt geht, was der Konstruktion von h widerspräche. Vermöge der Abgeschlossenheit von A ist somit $H \subset A$, wodurch alles bewiesen ist.

Hier ist vielleicht noch eine Bemerkung über den Begriff der *Umgebung* am Platz. Die Umgebung $U(a)$ des Punktes a, welche im Satz (Ü 5) auftritt, ist in weiten Grenzen beliebig. Sie muß bloß eine offene Menge sein, die a enthält. Das gleiche gilt von den Umgebungen, die implizit in (Ü 4) vorkommen. Hingegen ist in (Ü 6) die Umgebung genau festgelegt: $U(a; \varrho)$ bedeutet wie im Abschnitt 1 die Menge der Punkte, deren euklidische Entfernung von a kleiner als ϱ ist $(\varrho > 0)$. Man kann, um konsequent bei der Minkowskischen Geometrie zu bleiben, auch *Minkowskische Umgebungen* einführen und unter $U_m(a; \varrho)$ die offene Menge verstehen, die von der Kurve $K \sim E$ begrenzt wird, deren Mittelpunkt a ist, während jeder Durchmesser von K die ϱ-fache Länge des parallelen Durchmessers von E besitzt. Ist nun $\mathfrak{a}$ das Maximum, $\mathfrak{b}$ das Minimum der euklidisch gemessenen Radien von E, so gilt:

$$U_m\left(a; \frac{\varrho}{\mathfrak{a}}\right) \subseteq U(a; \varrho) \subseteq U_m\left(a; \frac{\varrho}{\mathfrak{b}}\right). \tag{1}$$

Geht, wie (Ü 6) verlangt, durch den Punkt a eine Einheitskurve I, derart, daß $A\,U(a; \varrho) \subseteq [I]$, so ist zufolge (1) auch $A\,U_m\left(a; \frac{\varrho}{\mathfrak{a}}\right) \subseteq [I]$. Umgekehrt folgt aus $A\,U_m\left(a; \frac{\varrho}{\mathfrak{b}}\right) \subseteq [I]$ die Beziehung $A\,U(a; \varrho) \subseteq [I]$. Es ist somit statthaft, in (Ü 6) die euklidischen Umgebungen gegen Minkowskische zu vertauschen.

5. Beispiele.

Die allereinfachsten Beispiele überkonvexer Mengen sind die konvexe Hülle $[E]$ der Eichkurve E, sowie das Gebiet $[E] - E$ der Punkte innerhalb E. Ein wenig allgemeiner gilt:

(H 5). *Ist die Kurve $K \sim E$ nicht größer als E, so sind $[K]$ und $[K] - K$ überkonvex.*

Der Beweis liegt auf der Hand. Durch jeden Begrenzungspunkt a der Mengen $[K]$ und $[K] - K$ geht eine Einheitskurve, die beide Mengen umschließt, nämlich die eine der beiden Einheitskurven, die zu K zentrisch ähnlich sind mit a als Zentrum. Nun folgt (H 5) aus (Ü 3), weil auch die übrigen Bedingungen dieses Satzes erfüllt sind. Man könnte (H 5) auch ohne Benutzung von (Ü 3) und zwar unmittelbar im Anschluß an (H 2) beweisen, freilich nicht so kurz.

Nicht triviale Beispiele überkonvexer Mengen, sogar recht bemerkenswerte, stellen die *Gleichdicke* (Bereiche konstanter Breite) dar[13]).

Hier sei noch auf eine nicht konvexe und daher auch *nicht überkonvexe* Menge aufmerksam gemacht, die lehrt, daß in den Sätzen (Ü 4), (Ü 5) und (Ü 6) jedenfalls ein Teil der Voraussetzungen keineswegs gestrichen werden darf.

Wir verwenden für dieses Beispiel den euklidischen Einheitskreis als Eichkurve und schreiben ihm ein regelmäßiges Sechseck ein. Die Punkte, die nicht innerhalb des Sechsecks und nicht außerhalb seines Umkreises liegen, erfüllen sechs Kreissegmente, die wir uns als starre Scheiben vorstellen, die mit Gelenken aneinandergeschlossen sind. Die so erzeugte Gelenkkette falten wir zu der in der Fig. 5 wiedergegebenen Lage zusammen. Dann bilden die Scheiben eine Menge A, die in all ihren Punkten lokal überkonvex ist, ausgenommen die Eckpunkte der Kreisabschnitte[14]). Folglich ist A nicht schlechtweg lokal überkonvex und die Hauptbedingung von (Ü 4) somit nicht erfüllt. Auch (Ü 5) ist nicht anwendbar. Zwar gibt es ausnahmslos zu jedem Punkt $a \varepsilon A_g$ eine Umgebung $U(a; \varrho)$, derart, daß $A\,U(a; \varrho)$ von

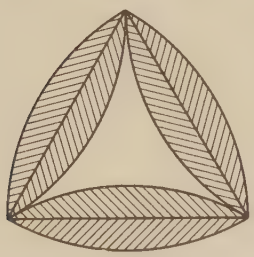


Fig. 5. Eine nicht überkonvexe Menge.

[13]) Siehe A. E. Mayer, Der Inhalt der Gleichdicke. Abschätzungen für ebene Gleichdicke, Math. Annalen **110** (1934), S. 97–127, bes. S. 107.

[14]) Die Eckpunkte sind lokale Zerlegungspunkte. Zu diesem Begriff vgl. G. T. Whyburn, Local separating points of continua, Monatsh. Math. Phys. **36** (1929), S. 305–314. — Man sieht unschwer, daß *jede Menge in ihren lokalen Zerlegungspunkten nicht lokal überkonvex* ist (während sie sogar in jedem lokalen Zerlegungspunkt lokal *konvex* sein kann, wie die Punkte einer Geraden zeigen).

einem Einheitskreis durch a eingeschlossen wird; doch ist A, wiewohl abgeschlossen, nicht die abgeschlossene Hülle eines Gebietes. Der offene Kern von A ist ja unzusammenhängend. Ferner entzieht sich A auch dem Satz (Ü 6), weil man für die soeben erwähnte Umgebung $U(a; \varrho)$ die Zahl $\varrho > 0$ nicht gleichmäßig auf A_ϱ wählen kann. Vielmehr muß ϱ beliebig klein werden, wenn a auf dem inneren Rand der Figur gegen einen der drei Eckpunkte läuft.

Daß die übrigen Vorbedingungen in den Sätzen (Ü 4) bis (Ü 6) und in den anderen Sätzen durchaus nicht überflüssig sind, könnte man auch durch passende Beispiele belegen[15]).

6. Eine Krümmungsschranke.

Wir wollen noch unter den konvexen Mengen mittels der *Krümmung ihrer Begrenzung* diejenigen kennzeichnen, die überkonvex sind. Dabei werden einige der bisherigen Sätze Anwendung finden. Vorerst definieren wir gewisse Krümmungen in einer unserem Gegenstand angepaßten Weise, nämlich im Sinne der unmittelbaren Infinitesimalgeometrie, die nicht auf Koordinaten und deren Differentialen beruht[16]).

Es liege eine Menge A vor. Durch jedes Tripel $\{a, b, c\}$ paarweise verschiedener Punkte aus A, die zunächst nicht in einer Geraden liegen sollen, geht zufolge (H 2) eine einzige Kurve $K \sim E$ hindurch. Wir bestimmen die *Minkowskische Krümmung* von K, etwa als das Verhältnis der Länge eines Durchmessers von E zur Länge des parallelen Durchmessers von K, und bezeichnen diese dem Tripel $\{a, b, c\}$ zugeordnete Zahl mit $\varkappa(a, b, c)$. Liegen die Punkte a, b, c in einer Geraden, so setzen wir $\varkappa(a, b, c) = 0$. Für das Funktional $\varkappa(a, b, c) \geqq 0$, die Krümmung des Punktetripels $\{a, b, c\}$ ermitteln wir einen iterierten Limes, der immer existiert und nicht negativ ist.

Zuerst suchen wir das Infimum der Krümmungen aller Punktetripel der Menge A, die in der Umgebung $U\left(p; \frac{1}{n}\right)$ eines beliebigen Punktes $p \varepsilon A$ liegen. Durchläuft n die natürliche Zahlenreihe, so erzeugen die Umgebungen $U\left(p; \frac{1}{n}\right)$ eine monoton abnehmende Folge. Die zugehörigen Infima bilden daher eine nicht abnehmende Folge, die somit stets einen Limes hat, welcher die untere Krümmung $\underline{\varkappa}(A; p)$ von A im

[15]) Ebenfalls nach dem Muster der Gegenbeispiele zu *konvexen* Mengen, die H. Tietze [5]), [6]), [7]) beigebracht hat.

[16]) Vgl. zu den beiden folgenden Absätzen K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik. Vierte Untersuchung. Zur Metrik der Kurven, Math. Annalen **103** (1930), S. 466–501; bes. S. 480.

Punkte p heißt. Von dieser unteren Krümmung bestimmen wir hierauf das Infimum, wenn p auf A variiert. Insgesamt wurde also

$$\underset{p \in A}{\text{Infimum}} \ \underset{n \to \infty}{\text{Limes}} \ \underset{\{a,b,c\} \subset A\, U\left(p; \frac{1}{n}\right)}{\text{Infimum}} \ \varkappa(a,b,c) = \underline{\varkappa}(A) \geqq 0$$

konstruiert. Wir nennen $\underline{\varkappa}(A)$ die untere Krümmung der Menge A.

Die untere Krümmung von A im Punkte p (mithin auch die untere Krümmung von A) fällt genau so aus, wenn man anstatt der euklidischen Umgebungen $U\left(p; \frac{1}{n}\right)$, die in die Definition eingehen, *Minkowskische Umgebungen* $U_m\left(p; \frac{1}{n}\right)$ setzt ($n = 1, 2, \ldots$). Man kann nämlich aus beiden Folgen von Umgebungen ineinandergeschachtelte Teilfolgen auswählen [vgl. Gleichung (1) in Abschnitt 4], so daß also

$$U\left(p; \tfrac{1}{n_1}\right) \supseteq U_m\left(p; \tfrac{1}{n_2}\right) \supseteq U\left(p; \tfrac{1}{n_3}\right) \supseteq U_m\left(p; \tfrac{1}{n_4}\right) \supseteq \ldots.$$

Dann ist

$$(2) \qquad \underset{\{a,b,c\} \subset A\, U\left(p; \frac{1}{n_1}\right)}{\text{Infimum}} \varkappa(a,b,c) \leqq \underset{\{a,b,c\} \subset A\, U_m\left(p; \frac{1}{n_2}\right)}{\text{Infimum}} \varkappa(a,b,c) \leqq \ldots.$$

Die in (2) an ungerader Stelle stehenden Glieder haben als Teilfolge der monotonen Folge $\underset{\{a,b,c\} \subset A\, U\left(p; \frac{1}{n}\right)}{\text{Infimum}} \varkappa(a,b,c)$ denselben Limes wie diese, nämlich $\underline{\varkappa}(A; p)$. Deshalb ist $\underline{\varkappa}(A; p)$ auch der Limes der in (2) an gerader Stelle befindlichen Glieder, somit auch für die umfassendere monotone Folge $\underset{\{a,b,c\} \subset A\, U_m\left(p; \frac{1}{n}\right)}{\text{Infimum}} \varkappa(a,b,c)$, wie behauptet wurde.

Unsere Krümmungsdefinitionen ermöglichen nachstehende

Kennzeichnung der überkonvexen Mengen. *Damit die Menge A überkonvex sei, ist notwendig, daß für je drei Punkte a, b, c der Begrenzung A_g die Krümmung $\varkappa(a,b,c) \geqq 1$ sei, woraus für die untere Krümmung der Begrenzung folgt: $\underline{\varkappa}(A_g) \geqq 1$. Letzteres* (und um so mehr die erste Bedingung) *ist auch hinreichend, wenn A konvex und abgeschlossen ist.*

Zum Beweis der ersten Aussage muß A als *überkonvex vorausgesetzt* werden. Dann liegen drei beliebige Begrenzungspunkte a, b, c nicht in einer Geraden. Wäre nämlich dies der Fall, so könnte durch denjenigen der drei Begrenzungspunkte, der zwischen den beiden anderen liegt, keine A umschließende Einheitskurve hindurchgehen, was (Ü 2) zuwiderliefe. Also befinden sich a, b, c zufolge (H 2) auf einer Kurve $K \sim E$. Die Punkte seien so bezeichnet, daß das Paar a, b auf K von c, c^* getrennt wird, wobei c und c^* Endpunkte eines Durchmessers von K sein mögen. Durch c geht, wiederum gemäß (Ü 2), eine Einheitskurve I, die a und b

umschließt. Genau so wie beim Nachweis des Hilfssatzes (H 4) leitet man nun ab, daß I nicht kleiner als K, mithin $\varkappa(a,b,c) \geqq 1$ ist.

Wir haben noch darzutun, daß für jede abgeschlossene konvexe und Begrenzungspunkte enthaltende Menge A die Bedingung $\underset{\sim}{\varkappa}(A_g) \geqq 1$ *zur Überkonvexität hinreicht.* Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

Erstens setzen wir $\underset{\sim}{\varkappa}(A_g) > 1$ voraus. Dann gibt es zufolge der Definition von $\underset{\sim}{\varkappa}(A_g)$ zu dem beliebigen Punkt $p \varepsilon A_g$ eine Minkowskische Umgebung $U_m(p;\varrho)$, so daß für jedes Tripel $\{a,b,c\} \subset A_g U_m(p;\varrho)$ gilt: $\varkappa(a,b,c) > 1$. Selbstredend kann immer $0 < \varrho < 1$ angenommen werden. Nun stellen wir die *Zwischenbehauptung* auf, $A\,U_m(p;\varrho)$ sei überkonvex.

Weil $\varrho < 1$, ist nach (H 5) vor allem einmal $U_m(p;\varrho)$ überkonvex. Daher endet in je zwei Punkten a^*, b^* aus $A\,U_m(p;\varrho)$ ein Einheitsbogen und jeder solche Bogen B^* sowie seine konvexe Hülle $[B^*]$ sind sicherlich Teil von $U_m(p;\varrho)$. Wäre B^* entgegen der Zwischenbehauptung nicht auch im Durchschnitt $A\,U_m(p;\varrho)$ enthalten, so gäbe es wegen der Abgeschlossenheit von A offenbar auf dem Bogen B^* solche zwei Punkte a, b aus A_g, daß der durch sie begrenzte Teilbogen $B \subseteq B^*$ aus *äußeren* Punkten der Menge A besteht, wenn man von a und b selbst absieht. (Gegebenenfalls ist $a = a^*$, $b = b^*$.) Bezeichne jetzt $C \subseteq A_g$ denjenigen Randteil von A, der durch die Gerade ab nicht von B getrennt wird, so daß $C \subset [B] \subset [B^*] \subset U_m(p;\varrho)$ ist! Nunmehr ergibt jeder von a und b verschiedene Punkt $c \varepsilon C$ einen Widerspruch. Denn wegen $\{a,b,c\} \subset A_g U_m(p;\varrho)$ ist gemäß der Voraussetzung einerseits $\varkappa(a,b,c) > 1$. Andererseits liegt c entweder auf der Strecke $[a,b]$, was $\varkappa(a,b,c) = 0$ liefert; oder c ist ein innerer Punkt der konvexen Hülle $[B]$ des Einheitsbogens B, somit $\varkappa(a,b,c) < 1$, übereinstimmend mit (H 3).

Damit ist die Zwischenbehauptung erwiesen. Aus ihr folgt die Überkonvexität von A mittels (Ü 4). Dieser Satz kann hier angewendet werden, weil A als konvexe Menge auch zusammenhängend ist. Daß ferner die Menge A in all ihren Punkten lokal überkonvex ist, haben wir für die Begrenzungspunkte bereits gezeigt. Für die inneren Punkte folgt dies in trivialer Weise aus (H 5).

Ist zweitens $\underset{\sim}{\varkappa}(A_g) = 1$, so wird wieder in Hinblick auf (Ü 4) die Überkonvexität von A sichergestellt sein, wenn wir nachgewiesen haben werden: Der Durchschnitt von A mit der Minkowskischen Umgebung $U_m(p;\varrho)$ eines jeden Punktes $p \varepsilon A$ ist überkonvex, falls diese Umgebung hinreichend eng ist ($\varrho < 1$).

Seien a, b Punkte aus $A\,U_m(p;\varrho)$. Dann gibt es nach (H 5) einen Einheitsbogen $B \subset U_m(p;\varrho)$, dessen Endpunkte a und b sind. Wir müssen bloß beweisen, daß das Innere der konvexen Hülle $[B]$ zu A gehört, weil hieraus, da A abgeschlossen ist, folgt: $B \subset A\,U_m(p;\varrho)$.

Ist nun c ein innerer Punkt von $[B]$, so verläuft, wie aus dem Beweis zu (H 3) hervorgeht, durch c ein Bogen C mit den Endpunkten a und b, der zu einem Einheitsbogen zentrisch ähnlich ist. Nach (H 3) selbst ist die Minkowskische Krümmung von C, also $\varkappa(a, b, c) < 1$. Wir führen jetzt eine zentrisch ähnliche *Verkleinerung* Γ ein, deren Ähnlichkeitsverhältnis $\gamma = \varkappa(a, b, c) < 1$ ist. Wendet man Γ auf A und C an, so entsteht die Menge A^* bzw. der Einheitsbogen C^*. Für den Rand A_g^* von A^* ist offensichtlich $\underline{\varkappa}(A_g^*) = \frac{1}{\gamma}\underline{\varkappa}(A_g) = \frac{1}{\gamma} > 1$. Folglich ist, das wurde vorher bewiesen, A^* überkonvex. Mithin ist $C^* \subset A^*$, woraus durch Anwendung der inversen zentrischen Ähnlichkeit Γ^{-1} folgt: $C \subset A$, also auch $c \varepsilon C \subset A$, w. z. b. w.

In dem nunmehr vollständig bewiesenen Kennzeichnungssatz tritt die Krümmungsschranke Eins auf. Jetzt verdient noch der Fall eine kurze Erwähnung, daß für den Rand A_g einer abgeschlossenen konvexen Menge A gilt: $0 < \underline{\varkappa}(A_g) < 1$. Dann kann ein ähnlicher Kunstgriff angewendet werden wie knapp zuvor: Wir führen A durch genügend starke zentrische Verkleinerung in eine Menge A^* über, so daß $\underline{\varkappa}(A_g^*) = 1$, somit A^* überkonvex wird. Oder — das hat denselben Erfolg — es wird A unverändert belassen, hingegen die Eichkurve E zentrisch ähnlich *vergrößert*, was als Umnormierung zu bezeichnen ist. Die Kennzeichnug überkonvexer Mengen kann somit folgendermaßen ergänzt werden:

Ist A ein abgeschlossener konvexer echter Teil der Ebene und $\underline{\varkappa}(A_g) > 0$, so ist A von vornherein oder nach geeigneter Umnormierung überkonvex.

Greifen wir nun beispielsweise auf (Ü 2) zurück. Dann folgt, daß durch die Begrenzungspunkte von A untereinander kongruente Kurven $\sim E$ gehen, deren jede A umschließt [17]). Insbesondere ist A beschränkt.

Daher gehören die unbeschränkten konvexen Mengen jedenfalls zu derjenigen Klasse konvexer Mengen, für welche die *untere Krümmung der Begrenzung verschwindet.* In dieser Klasse sind andererseits auch beschränkte Mengen. So hat z. B. die (von einer Laméschen Kurve begrenzte) Menge aller Punkte (x, y), für die $x^4 + y^4 \leqq 1$ ist, die untere Randkrümmung Null, wenn irgendein euklidischer Kreis als Eichkurve zugrunde liegt.

[17]) In der euklidischen Geometrie und für stetig gekrümmte konvexe Kurven bewies das W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 116; für beliebige konvexe Kurven mittels einer anderen als der von uns verwendeten Krümmungsschranke: H. Bohr und B. Jessen. Über Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei der Addition konvexer Kurven (dänisch), Danske Vid. Selsk. Skr. (8) **12** (1929), S. 326—405 [zitiert nach T. Bonnesen und W. Fenchel [1]), S. 144]; S. Mukhopadhyaya, Circles incident on an oval of undefined curvature, Tôhoku Math. Journ. **34** (1931), S. 115—129.

7. Überkonvexe Mengen im n-dimensionalen Raum.

Wir haben bis hierher nur Teilmengen der euklidischen Ebene betrachtet. Zu den Beweisen wurden die Sätze von den konvexen Mengen herangezogen, die im Abschnitt 1 wiedergegeben sind. Diese Sätze gelten auch im euklidischen R_n (mit der einzigen Änderung, daß statt „Stützgerade" jedesmal „stützende Hyperebene" zu schreiben ist). Das legt die Frage nahe, ob in der Theorie der Überkonvexität ebenfalls die Bindung an eine bestimmte Dimensionszahl abgestreift werden kann.

Der Beantwortung dieser Frage muß notwendigerweise eine Minkowskische Maßbestimmung im euklidischen R_n vorangehen ($n > 2$).

Als Eichgebilde verwenden wir eine konvexe geschlossene Hyperfläche $\boldsymbol{E}$, die einen euklidischen Mittelpunkt o hat. Diese Eichhyperfläche soll ferner regulär sein: Jeder Punkt von $\boldsymbol{E}$ besitze nur eine Stützhyperebene, jede Stützhyperebene habe nur einen Stützpunkt. Jede aus $\boldsymbol{E}$ durch Parallelverschiebung erzeugte Hyperfläche nennen wir Einheitshyperfläche. Als Einheitskurven einer beliebigen Ebene π erklären wir alle jene Kurven in π, die aus der Kurve E, durch Parallelverschiebung hervorgehen, wobei E den Schnitt von $\boldsymbol{E}$ mit der durch o gehenden Parallelebene zu π bedeutet. Jeder Bogen einer Einheitskurve, der mindestens von einem ihrer Durchmesser nicht in Bögen geteilt wird, heiße wie bisher Einheitsbogen. Jetzt können die überkonvexen Mengen im R_n wortwörtlich so wie im Abschnitt 2 definiert werden.

Man sieht nun, daß der wichtige Hilfssatz (H 1) sowie die erste Hälfte von (Ü 1) unverändert im R_n zu Recht bestehen, weil der Beweis für (H 1) von selbst auch im R_n gilt und der Beweis der ersten Aussage von (Ü 1) ohne nennenswerte Schwierigkeit auf den R_n übertragen werden kann.

Der Satz (Ü 2) erhält im R_n folgenden Wortlaut: *Ist a ein Punkt der Begrenzung A_g der überkonvexen Menge A, so gibt es eine durch a gehende Einheitshyperfläche, die A umschließt.*

Zum Beweise berufen wir uns zunächst auf die Verallgemeinerungen von (H 1) und (K 2). Nach diesen Sätzen gibt es an A in a eine Stützhyperebene G. Durch a geht eine einzige Einheitshyperfläche $\boldsymbol{I}$, die von G gestützt und durch G nicht von A getrennt wird. Wäre nun nicht $A \subseteq [\boldsymbol{I}]$, so gäbe es außerhalb $[\boldsymbol{I}]$ einen Punkt $b \varepsilon A$. Wir schneiden jetzt die ganze Anordnung mit der Ebene, die a, b und der Mittelpunkt von $\boldsymbol{I}$ aufspannen. Auf diese Schnittfigur kann dann derselbe Schluß angewendet werden, der den Beweis des Satzes (Ü 2) in der Ebene ergeben hat.

Die Hilfssätze aus Abschnitt 3 gelten selbstredend in jeder in den R_n eingebetteten Ebene.

Was nun die Sätze des Abschnittes 4 betrifft, so ist die allein geeignete Abänderung für den R_n diese: Die jeweils in Rede stehende Menge ist als echter Teil des R_n anzunehmen; ferner sind die einschließenden Einheitskurven wie bei (Ü 2) durch einschließende Einheitshyperflächen zu ersetzen.

Im R_n stößt jedoch die Nachbildung der in der Ebene gültigen Beweise auf ein Hindernis. Ich will dies bloß an dem Beweis zu (Ü 3) erläutern, da die Dinge beim simultanen Beweis der Sätze (Ü 4) bis (Ü 6) ganz ähnlich liegen.

Den Kern des Beweises von (Ü 3) bildet die folgende Überlegung. Ein Einheitsbogen B mit den Endpunkten a, b sei gegeben. Befindet sich auf B ein Begrenzungspunkt c, der von a und b verschieden ist, so verläuft durch c voraussetzungsgemäß eine Einheitskurve, die a und b umschließt. Die einzige derartige Kurve I ist jene, die B als Teilbogen enthält.

Das haben wir früher aus (H 4) gefolgert und dieser Hilfssatz ist natürlicherweise auch im R_n richtig. Für den Beweis der Verallgemeinerung von (Ü 3) benötigen wir aber mehr. Ginge

(*) *durch c nur eine a und b umschließende Einheitshyperfläche $\boldsymbol{I}$,*

so könnte diese Hyperfläche bloß die sein, welche die Ebene abc in der Einheitskurve I schneidet. Hiermit ließe sich der Beweis für die Verallgemeinerung von (Ü 3) genau so wie im Abschnitt 4 vollenden. Ebenso stünde es um die n-dimensionalen Analoga der Sätze (Ü 4), (Ü 5), (Ü 6) und des zweiten Teiles von (Ü 1).

Sind wir aber zur Aussage (*) berechtigt? Davon wollen wir uns jetzt ein Bild machen.

Wird die besondere Annahme getroffen, daß die Eichhyperfläche eine euklidische *Hypersphäre* vom Radius 1 sei, so gilt (*). Dann schneidet nämlich die Ebene abc jede a und b umschließende Einheitshypersphäre $\boldsymbol{I}$, die durch c geht, nach einem Kreis, der c enthält sowie a und b umschließt. Dieser Schnittkreis hat einen Radius $\leqq 1$. Zufolge (H 4) gibt es einen einzigen Kreis mit einem Radius $\leqq 1$, der durch c verlaufend a und b umschließt: den Einheitskreis I durch die Punkte a, b, c. Als Einheitskreis muß I ein Großkreis der Einheitshypersphäre $\boldsymbol{I}$ sein und bestimmt diese somit eindeutig.

Hingegen trifft die Hilfsvoraussetzung (*) im allgemeinen nicht zu, wenn $\boldsymbol{E}$ als beliebige konvexe geschlossene reguläre Hyperfläche mit

Mittelpunkt angesetzt wird. Hierfür kann man sich unschwer Beispiele zurechtlegen.

Um die Ergebnisse zusammenzufassen, die wir im R_n erzielt haben, unterscheiden wir zwei Klassen von Sätzen:

I. (K 1), (K 4), (H 1) bis (H 4), $(\dot{\text{U}}\ 1)_{1.\ \text{Teil}}$; die n-dimensionalen Analoga zu: (K 2), (K 3), (K 5), (K 6), (Ü 2).

II. $(\dot{\text{U}}\ 1)_{2.\ \text{Teil}}$; die n-dimensionalen Analoga zu: (H 5), (Ü 3) bis (Ü 6).

Die Sätze beider Klassen haben im R_n mit euklidischer Maßbestimmung Gültigkeit. In jedem mit einer regulären Minkowskischen Maßbestimmung versehenen R_n bestehen jedenfalls die Sätze der Klasse I *zu Recht.* Ob Gleiches auch für die Sätze der Klasse II zutrifft, ist eine offene Frage.

(Eingegangen am 6. Januar 1934.)

Reguläre Randpunkte beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem.

Von

G. Tautz in Breslau.

Das verallgemeinerte Dirichletsche Problem, das von O. D. Kellog und N. Wiener[1]) an der Laplaceschen Gleichung erstmalig eingehend studiert wurde, ist bei allgemeineren elliptischen Differentialgleichungen bisher für die folgenden Typen behandelt worden.

M. Brelot[1]) befaßt sich mit der Gleichung

$$\Delta u = c u + f$$

in beliebig vielen Variablen. Dabei wird von den Funktionen c und f nur die bloße Stetigkeit gefordert, was zur Folge hat, daß der Operator Δu ohne explizite Benutzung von zweiten Ableitungen definiert werden muß. Er gelangt unter anderem zu dem Ergebnis, daß die regulären Punkte für die Gleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta u = c u$ genau übereinstimmen. *Regulär* heißt jeder Randpunkt, in welchem für eine beliebige stetige Randfunktion die zugehörige Lösung den vorgeschriebenen Randwert als Grenzwert besitzt.

Zu demselben Resultat gelangt W. Püschel[1]) bei der selbstadjungierten Gleichung

$$\sum_{i,k}^{1,3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + c u = f,$$

wo jetzt c und f mindestens Hölder-stetig sind.

Zu erwähnen wäre schließlich noch eine Arbeit von J. Capoulade[1]), welcher eine Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems bei der Gleichung

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0$$

---

[1]) N. Wiener, Journ. Math. Phys. of techn., Massach. **3** (1924), S. 24 und S. 127. O. D. Kellogg, Proc. Nat. Ac. **12** (1926), S. 397; Foundat. of Pot. th., Berlin 1929, S. 315—338. M. Brelot, Ist. Lombard. Rend. Sér. II **63** (1930). S. 117; **65** (1932), S. 119 und 433. W. Püschel, Math. Zeitschr. **34** (1932), S. 535. Die Arbeiten anderer Autoren, wie vor allem von Bouligand, Vasilesco, Capoulade, soweit sie zu demselben Problemkreis zu rechnen sind, beschäftigen sich mehr mit den Eigenschaften der Kapazität von Punktmengen (Kapazität Null), und mit ihrer Anwendung bei singulären Vorkommnissen.

benutzt. Jedoch wird hier nicht die Frage der regulären Punkte behandelt, sondern nur das Verhalten der Lösung bei Singularitäten der Koeffizienten untersucht.

Die folgenden Ausführungen befassen sich mit dem eben erwähnten Gleichungstyp. Hier handelt es sich anders als bei Brelot und Püschel um eine nicht selbstadjungierte Gleichung. Dies erschwert insofern die Durchführung der Wienerschen Theorie, als die Analogie zu gewissen Greenschen Sätzen der speziellen Potentialtheorie gestört ist. Auch in anderer Hinsicht weist der zweidimensionale Fall, der bisher weniger Beachtung fand, gewisse Besonderheiten auf.

Das Hauptresultat ist der Satz, daß alle Punkte, die bezüglich der Laplaceschen Gleichung regulär sind, auch in unserem Falle regulär sind. Im Gegensatz zu den Resultaten bei Brelot und Püschel ist es nicht gelungen, auch die Umkehrung des Satzes zu beweisen, und es ist nicht so unwahrscheinlich, daß die Umkehrung gar nicht gilt.

In den beiden ersten Paragraphen wird gezeigt, daß sich gewisse normierte Potentiale[2]) als Potentiale der einfachen Belegung darstellen lassen. Unter einem „*normierten Potential*" wird eine Lösung der Differentialgleichung verstanden, welche auf einer endlichen Kontur Σ_0 verschwindet, und auf einer anderen innerhalb Σ_0 liegenden Kontur Σ die Randwerte 1 besitzt. Anders als in den bisherigen Arbeiten bleibt hier der unendlich ferne Punkt bei der Ableitung des Wienerschen Kriteriums vollkommen aus dem Spiele.

Es folgt nun in Anlehnung an die Arbeit von Püschel eine kurze Darstellung der Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems. In § 4 wird dann das Wienersche Kriterium und in § 5 der bereits angekündigte Hauptsatz bewiesen.

§ 6 bringt einige Bemerkungen über das Problem bei der allgemeinen linearen elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in n Variablen. Die Theorie läßt sich nämlich auch in diesem Falle vollkommen durchführen, vorausgesetzt, daß sich gewisse Hilfssätze (vgl. § 1) über die Hölder-stetigkeit der ersten und zweiten Ableitungen des Potentials der einfachen Belegung beweisen lassen, die für den vorliegenden Fall vom Verfasser bewiesen worden sind. Eine kurze Skizze der Beweise ist am Schluß als Anhang beigefügt.

§ 1.

Einige Sätze über das Potential der einfachen Belegung.

In der elliptischen Differentialgleichung

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{1}$$

[2]) Die Bezeichnung ist von W. Püschel übernommen [l. c. [1])], hat aber hier einen etwas anderen Sinn.

bedeuten a, b, c, stetige Funktionen, die in einem gewissen Bereiche[3]) einer Hölderschen Bedingung mit festem Exponenten genügen.

Unter einem „*normierten Potential*" verstehen wir eine Lösung von (1), deren Regularitätsgebiet[4]) beschränkt ist und von endlich vielen geschlossenen analytischen Kurven, die ganz im Endlichen liegen, begrenzt wird. Ist Σ_0 diejenige Randkurve, welche alle anderen in ihrem Inneren Ω_0 enthält, so soll u auf Σ_0 verschwinden, während es auf den anderen Randkurven die Randwerte 1 besitzt. Die Gesamtheit der Randpunkte mit Ausnahme von Σ_0 bezeichnen wir mit Σ. Σ besteht aus endlich vielen analytischen Kurven im Inneren von Ω_0, deren Inneres wir mit Ω bezeichnen.

Unser Ziel ist es nun, die normierten Potentiale als *Potentiale von einfachen Belegungen* darzustellen. Wir geben zunächst einige Hilfssätze über das Potential der einfachen Belegung an, welche den im Encyklopädieartikel[5]) von Lichtenstein angeführten Sätzen aus der speziellen Potentialtheorie zum Teil völlig analog sind.

Hilfssatz 1. *$G(P, Q)$ sei die Greensche Funktion für Ω_0, welche bezüglich P der Gleichung $L(G(P, Q)) = 0$ genügt. Wir drücken dies im folgenden kurz so aus*

$$L_P(G) = 0.$$

Für jede beschränkte integrable Funktion φ der Bogenlänge t auf der Kurve Σ ist dann

$$W(s) = \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_s}(P_s, Q_t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine Hölder-stetige Funktion der Bogenlänge s mit festem Exponenten. Ist $\varphi(t)$ selbst Hölder-stetig, mit festem Exponenten, so besitzt $W(s)$ eine erste Ableitung mit derselben Eigenschaft.

Hilfssatz 2. *Wir betrachten jetzt das Potential der einfachen Belegung*

$$v(P) = \int_{\Sigma} G(P, Q_t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Es sei zunächst

a) *$\varphi(t)$ Hölder-stetig mit festem Exponenten. Dann besitzen die ersten Ableitungen von v Grenzwerte auf Σ, durch welche sich die Ableitungen in*

---

[3]) Bereich bedeutet abgeschlossenes, Gebiet offenes zweidimensionales Kontinuum.

[4]) Das ist ein Gebiet, in welchem die zweiten Ableitungen existieren und stetig sind.

[5]) Enc. II_3, Heft 3, S. 205, 4 und S. 201/202, Nr. 3 und 5 (Hilfssatz 2). Es sind dies übrigens die in der Einleitung erwähnten Sätze, an deren Gültigkeit die Durchführung der Theorie im n-dimensionalen Falle hängt. Soweit ich informiert bin, sind sie in der bisherigen Literatur noch nicht bewiesen worden. Der Beweis ist, wie bereits erwähnt, im Anhang skizziert.

den Bereichen $\Sigma_0 + \Omega_0 - \Omega$ *bzw.* $\Omega + \Sigma$ *zu Hölder-stetigen Funktionen mit festem Exponenten ergänzen lassen.*

b) *Besitzt* $\varphi(t)$ *eine Hölder-stetige Ableitung mit festem Exponenten, so gilt das unter* a) *Gesagte auch von den zweiten Ableitungen von* v.

Nun beweisen wir den folgenden Eindeutigkeitssatz:

Hilfssatz 3. *Es sei*

$$c < 0 \quad in \quad \Omega_0 - \Omega. \tag{2}$$

w *sei eine Lösung der Gleichung* $L(w) = 0$ *mit den Randwerten Null auf* Σ_0, *während auf* Σ *die Normalableitung* $\frac{\partial w}{\partial n}$ *verschwindet. Die zweiten Ableitungen von* w *mögen auf* Σ *Grenzwerte besitzen, die eine stetige Funktion der Bogenlänge sind. Behauptet wird*

$$w(P) \equiv 0. \tag{3}$$

Beweis. Ist die Behauptung unrichtig, so können wir annehmen, daß w eine positive obere Grenze m besitzt, welche z. B. in dem Punkte p auf Σ von w erreicht werde. Im Inneren ist w bekanntlich kleiner als m. Wir bilden eine Umgebung von p in der Weise konform ab, daß das zugehörige Stück von Σ eine Gerade wird. Dabei gehen die Normalableitungen wieder in solche über und verschwinden also gleichfalls. Wir behalten die alten Bezeichnungen bei. Ähnlich wie es Koebe[6]) bei den klassischen Potentialfunktionen macht, setzen wir w in einem Kreise K um p als Zentrum fort derart, daß w in Punkten, die an Σ gespiegelt sind, gleiche Werte besitzt. In gleicher Weise bestimmen wir auch den Koeffizienten c. Die Funktionen a und b dagegen setzen wir in der Weise fort, daß sie in der anderen Hälfte von K Hölder-stetig sind und daß w dort wiederum der Gleichung $L(w) = 0$ genügt. Man kann etwa a und b in den Spiegelpunkten als geeignete Linearkombinationen ihrer Werte in den Originalpunkten annehmen. Z. B. setze man, falls Σ parallel zur y-Achse verläuft, $a(\bar{x}, \bar{y}) = -a(x, y)$, $b(\bar{x}, \bar{y}) = b(x, y)$, wenn $(\bar{x}, \bar{y})$ der Spiegelpunkt von (x, y) ist.

Die Funktion w besitzt nun in K folgende Eigenschaften. Sie ist daselbst stetig und besitzt auch stetige erste Ableitungen, während die zweiten Ableitungen beim Überschreiten von Σ eventuell einen Sprung erleiden, sonst aber in jeder abgeschlossenen Hälfte stetig und mithin beschränkt sind. Schließlich genügt w in K der Differentialgleichung $L(w) = 0$.

Wir betrachten nun die Funktion

$$W(P) = w_0 + \frac{1}{2\pi} \int_K \Gamma(P, Q)\,(a\,w_x + b\,w_y + c\,w)\,d\omega_Q,$$

[6]) Vgl. Crelle 138, S. 212.

wo w_c eine in K reguläre Potentialfunktion und $W = w_0 = w$ auf dem Rande von K ist. $\Gamma(P, Q)$ ist die *Greensche Funktion der Laplaceschen Gleichung* für K. Offenbar sind die ersten Ableitungen von W stetig in K und die zweiten Ableitungen in jeder abgeschlossenen Hälfte von K. Sieht man von den Punkten von Σ ab, so gilt in K

$$\Delta W = -(a w_x + b w_y + c w),$$
$$\Delta w = -(a w_x + b w_y + c w),$$
$$\Delta (W - w) = 0.$$

Wegen der Stetigkeitseigenschaften ihrer Ableitungen ist $W - w$ eine Potentialfunktion. Da sie auf dem Rande verschwindet, so gilt

$$w \equiv W.$$

Nun folgt aus der Tatsache, daß $w(P) = m$ ein Extremwert ist und aus der Stetigkeit der ersten Ableitungen

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Wählt man K hinreichend klein, so kann man wegen $c < 0$ und $w(p) = m > 0$ erreichen, daß in K auch

$$a w_x + b w_y + c w \leqq 0,$$

und somit

$$w = W \leqq w_0$$

ist. Da in den nicht zu Σ gehörigen Punkten der Peripherie von K $w < m$ ist, so ist innerhalb K auch die Potentialfunktion w_0 kleiner als m. Also ist schließlich

$$w(p) \leqq w_0(p) < m$$

im Widerspruch zur Annahme $w(p) = m$. w kann also keine positiven und ebensowenig auch negative Werte annehmen, womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 2.

Darstellung des normierten Potentials als Potential der einfachen Belegung.

Wir sind jetzt in der Lage, den zu Anfang von § 1 angedeuteten Satz über die Darstellung des normierten Potentials zu beweisen.

Satz 1. *Sei $c < 0$ in $\Omega_0 - \Omega$. $u(P)$ sei das normierte Potential mit den Randwerten 0 auf Σ_0 und 1 auf Σ. Dann gibt es eine und nur eine stetige Funktion $\varphi(t)$, welche identisch in P die Gleichung*

$$u(P) = \int_{\Sigma} G(P, Q_t)\, \varphi(t)\, dt \qquad P \text{ in } \Omega_0 - \Omega$$

befriedigt.

Beweis. $\varphi(t)$ muß offenbar eine Lösung der Integralgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial n_s} = -\pi\varphi(s) + \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_s}(P_s, Q_t)\,\varphi(t)\,dt \tag{4}$$

(n_s innere Normale von $\Omega_0 - \Omega$)

sein. Nehmen wir an, die *homogene* Gleichung (4) hätte eine stetige Lösung $\overline{\varphi}(t)$. Wir bilden mit dieser das Potential der einfachen Belegung

$$\bar{v}(P) = \int_{\Sigma} G(P, Q_t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt$$

$\bar{v}(P)$ verschwindet offenbar auf Σ_0, während auf Σ wegen (4) seine Normalableitung gleich Null ist. Da nun $\overline{\varphi}(t)$ eine stetige Funktion ist, so folgt aus dem ersten Hilfssatz, daß $\int_{\Sigma} G(P_s, Q_t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt$ und wegen (4) zugleich auch $\overline{\varphi}(t)$ Hölder-stetig ist; dann aber hat auf Grund desselben Satzes $\int_{\Sigma} G(P_s, Q_t)\,\overline{\varphi}(t)\,dt$ und damit wiederum auch $\overline{\varphi}(t)$ eine Hölder-stetige erste Ableitung. Wir können also den zweiten Hilfssatz anwenden, nach welchem schließlich die zweiten Ableitungen von $\bar{v}(P)$ sich in $\Omega_0 - \Omega$ zu stetigen Funktionen ergänzen lassen. $\bar{v}(P)$ erfüllt also die Voraussetzungen des dritten Hilfssatzes, und es ist mithin

$$\bar{v}(P) \equiv 0$$

in $\Omega_0 - \Omega$. Dasselbe folgt dann sofort für die Gebiete Ω aus der Stetigkeit von $\bar{v}(P)$ in Ω_0, wenn man bedenkt, daß $\bar{v}(P)$ keine positiven Maxima und negative Minima im Inneren von Ω besitzen kann. Daraus ergibt sich aber sofort

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial n_s} - \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial n_s}\right) = \pi\overline{\varphi}(s) = 0,$$

was der Annahme widerspricht, daß $\overline{\varphi}(s)$ eine *nichttriviale* Lösung der *homogenen* Integralgleichung (4) sein sollte.

Also hat die *inhomogene* Gleichung *eine* und *nur eine* stetige Lösung $\varphi(s)$. Wir werden nun gleich nachher zeigen, daß sich die zweiten Ableitungen unseres normierten Potentials in $\Omega_0 - \Omega$ zu Hölder-stetigen Funktionen ergänzen lassen. Die Funktion $\frac{\partial u}{\partial n}$ hat also eine Hölder-stetige Ableitung nach s; sie kann auch nach Hilfssatz 3 nicht identisch verschwinden, weil dies sonst auch von $u(P)$ gelten müßte. Wir können nun ganz ähnlich wie soeben bei der Lösung der homogenen Gleichung schließen, daß die Belegung $\varphi(s)$ eine Hölder-stetige Ableitung haben muß. Nach Hilfssatz 2 lassen sich also auch die zweiten Ableitungen von

$$v(P) = \int_{\Sigma} G(P, Q_t)\,\varphi(t)\,dt$$

ebenso wie die von u in $\Omega_0 - \Omega$ zu stetigen Funktionen ergänzen. Dann aber ist $u(P) - v(P)$ eine Funktion, welche den Bedingungen von Hilfssatz 3 genügt, welche also identisch verschwinden muß. Es ist also

$$u(P) = v(P) = \int_{\Sigma} G(P, Q_t)\, \varphi(t)\, dt,$$

was in Satz 1 behauptet wurde.

Nun ist bloß noch der Beweis nachzutragen, daß $u(P)$ in $\Omega_0 - \Omega$ Hölder-stetige zweite Ableitungen besitzt. Man kann zunächst leicht beweisen, daß die ersten Ableitungen von u in $\Sigma_0 + \Omega_0 - \Omega$ stetig sind, wenn man bedenkt, daß u auf den analytischen Kurven Σ_0 und Σ analytische Randwerte besitzt. Bedeutet nun $\Gamma(P, Q)$ die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$ für $\Omega_0 - \Omega$, so kann man die Funktion

$$\overline{u}(P) = u_0(P) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_0 - \Omega} \Gamma(P, Q)\, (a\, u_x + b\, u_y + c\, u)\, d\omega_Q$$

bilden, wobei $\Delta u = 0$ ist, und u_0 auf Σ und Σ_0 dieselben Werte wie u besitzt. Daraus folgt

$$\Delta(\overline{u} - u) = 0, \quad \overline{u}(P) \equiv u(P).$$

Aus bekannten Sätzen über das logarithmische Potential folgt aber dann, daß die ersten Ableitungen von $u(P)$ in $\Omega_0 - \Omega$ sogar Hölder-stetig sind, und hieraus wiederum, daß auch die zweiten Ableitungen in $\Omega_0 - \Omega$ Hölder-stetig sind. Der erste Summand aber ist eine Potentialfunktion mit analytischen Randwerten auf den analytischen Kurven Σ, besitzt also auf Σ noch beliebig hohe Ableitungen. Damit ist der Beweis erbracht.

§ 3.

Das verallgemeinerte Dirichletsche Problem.

Wir setzen jetzt voraus, *daß* $\frac{\partial a}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial b}{\partial y}$ *existieren* und *Hölder-stetig* sind, so daß eine *adjungierte Gleichung* existiert. Es sei T ein *beliebiges Gebiet* im Definitionsbereich der a, b, c; S sei seine *Berandung*.

Das *verallgemeinerte Dirichletsche Problem*[7]) bei der Differentialgleichung (1) ist unter der Voraussetzung

$$c \leqq 0 \tag{2'}$$

genau wie bei der Laplaceschen Gleichung lösbar, sei es nach dem Verfahren von O. Perron[8]) oder von O. D. Kellogg (vgl. l. c. [1])). Unter der genannten Voraussetzung kann bekanntlich keine Lösung in irgendeinem

[7]) Bezüglich der Bedeutung dieses Terminus vergleiche die Ausführungen von W. Püschel, l. c. [1]).

[8]) Vgl. O. Perron, Math. Zeitschr. 18 (1923), S. 42—54.

Punkte ihres Regularitätsbereiches ein positives oder verschwindendes Maximum — auch kein uneigentliches — besitzen. Bei geringer Modifikation lassen sich die Ausführungen von W. Püschel (l. c. [1]), vgl. § 1) ohne weiteres übertragen. Auch der § 2 von Püschel läßt sich übertragen. Statt der dort benutzten *symmetrischen Grundlösung* kann man mit einer *Greenschen Funktion* für ein hinreichend großes Gebiet arbeiten, wenn man beachtet, daß sie als Funktion der zweiten Stelle der adjungierten Gleichung genügt, was man leicht aus der Greenschen Formel folgert. Insbesondere gilt also die wichtige Kelloggsche Formel

$$u(P) = F(P) + \lim_{n \to \infty} \int_T G(P, Q)\, L(F_n)\, d\omega_Q, \tag{5}$$

in welcher $u(P)$ die Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems[9]) für das Gebiet T und die Randfunktion f bedeutet. $F(P)$ ist eine in $T + S$ stetige Funktion, welche die geforderten Randwerte auf S besitzt und welche durch Polynome F_n gleichmäßig approximiert wird. $G(P, Q)$ ist die verallgemeinerte Greensche Funktion für T, die als Funktion der ersten Stelle der gegebenen Differentialgleichung genügt. Insbesondere folgt aus der Darstellung (5) ähnlich wie in der Potentialtheorie der Satz 3, § 2 von Püschel, dessen Schlußsatz wir anführen.

Satz 2 (Erstes Kriterium). *Nimmt die Greensche Funktion in dem Randpunkte p*[10]) *den Wert Null stetig an, so nimmt $u(P)$ den Wert $f(p)$ in p stetig an.*

Wir haben also in dem Verhalten der Greenschen Funktion ein hinreichendes und natürlich auch notwendiges Kriterium für die *Regularität* (vgl. S. 1) eines Randpunktes.

Nun verallgemeinern wir den Begriff des normierten Potentials. Zu diesem Zweck müssen wir statt (2′) die schärfere Bedingung (2) wieder einführen, die wir vorläufig auch festhalten. Die Kontur Σ_0 bleibt nach wie vor analytisch. Für Ω aber nehmen wir nun eine beliebige abgeschlossene (im Gegensatz zu früher) Punktmenge, die ganz in Ω_0 liegt. Ω approximieren wir durch offene Punktmengen Ω_n, welche Ω enthalten und deren Rand jeweils aus endlich vielen analytischen Kurven Σ_n besteht (vgl. Kellogg, Foundations S. 319). Die zugehörigen normierten Potentiale konvergieren dann bekanntlich gegen die Kelloggsche Folgelösung mit den Randwerten 0 auf Σ_0 und 1 auf Σ. Wir nennen sie

---

[9]) Und zwar die sogenannte „*Folgelösung*", wie es Kellogg nennt, die als Grenzwert einer gewissen Funktionenfolge definiert ist, wie es etwa im ersten Paragraphen von Püschel geschildert wird.

[10]) Randpunkte werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

das *normierte Potential der Punktmenge* Ω[11]). Dies erfüllt die folgende von *Kellogg* in der *Potentialtheorie* bewiesene *Ungleichung:*

Es sei Ω eine *beschränkte, abgeschlossene* Punktmenge und v das zu Ω gehörige normierte Potential (für irgendein Σ_0). Ω liegt also ganz im Inneren von Ω_0. $\overline{\Omega}$ sei dasjenige der Gebiete, in welche $\Omega_0 - \Omega$ zerfällt, welches zum unendlichen Außengebiet von Ω gehört. $G(P, Q)$ sei die Greensche Funktion von $\overline{\Omega}$. Nun sei Q ein innerer Punkt von $\overline{\Omega}$ und σ die Peripherie eines Kreises K um Q, der auch noch ganz in $\overline{\Omega}$ liegt. Sei M das Maximum von $G(P, Q)$, m das Maximum von $v(P)$ auf σ $(0 \leqq m < 1)$. Dann gilt in $\overline{\Omega} - K$

$$G(P, Q) \leqq \frac{M}{1 - m}(1 - v(P)). \tag{6}$$

Den Beweis kann man genau so führen, wie es Vasilesco[12]) tut.

Aus der Ungleichung (6) ergibt sich nun sofort wie bei Püschel der folgende Satz (Satz 3 von Püschel, S. 547), welcher uns ein zweites notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Regularität eines Randpunktes liefert.

Satz 3 (Zweites Kriterium). *Für die Regularität eines Randpunktes p von T ist es notwendig und hinreichend, daß für einen genügend kleinen Wert α das normierte Potential v_α (für irgendein Σ_0) den richtigen Randwert annimmt, d. h. daß $v_\alpha(P) \to 1$ für $P \to p$.*

v_α bezeichnet das normierte Potential der Komplementärmenge E_α von T in bezug auf einen Kreis K_α mit dem Radius α um p. Falls α hinreichend klein ist, so gehört T dem unendlichen Außengebiet von E_α an, welches sicher von der Kontur Σ_0 geschnitten wird. p ist also dann ein Randpunkt des Definitionsbereiches von v_α, so daß die Ungleichung (6) anwendbar ist.

Dieses Kriterium vermittelt uns den Übergang zu einem dritten Kriterium, das wir jetzt ableiten wollen, nämlich dem *Wienerschen Reihenkriterium.*

§ 4.

Das Wienersche Kriterium.

α und E_α mögen dieselbe Bedeutung wie in Satz 3 haben. α sei also hinreichend klein und außerdem

$$\alpha < \frac{1}{2}.$$

---

[11]) Dies geht natürlich nur an, wenn man dabei Σ_0 festhält, was aber bei der nun folgenden Betrachtung eines bestimmten Randpunktes der Fall ist.

[12]) Journal Liouville 9 (1930), S. 94.

Nun sei $\lambda < 1$. Ähnlich wie bei E_α bezeichnen wir mit E_n die Komplementärmenge von T in bezug auf den Kreis K_{λ^n}. Weiter setzen wir $E_n - E_{n+1} = e_n$. v_n bezeichne das normierte Potential von e_n; dabei sei die Kontur Σ_0 für alle v_n dieselbe und enthalte den Einheitskreis um p in ihrem Inneren. Nötigenfalls muß man die Definition von a, b, c etwas erweitern.

Nach Definition ist nun v_n der Grenzwert von Potentialen $v_n^{(k)}$ in bezug auf Punktmengen $\Omega_n^{(k)}$, welche die Mengen e_n von außen approximieren und deren Begrenzungen $\Sigma_n^{(k)}$ aus endlich vielen analytischen Kurven bestehen. Nach Satz 1 ist

$$v_n^{(k)} = \int_{\Sigma_n^{(k)}} G(P, Q_t)\, \varphi_n^{(k)}(t)\, dt, \tag{7}$$

wo G die Greensche Funktion für Ω_0 ist. Wir nennen das Integral $\int_{\Sigma_n^{(k)}} \varphi_n^{(k)}(t)\, dt = \gamma_n^{(k)}$ die „*Kapazität*" von $\Omega_n^{(k)}$. Im Gegensatz zur speziellen Potentialtheorie und dem von Püschel behandelten Falle gelingt es nicht, zu zeigen, daß

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_n^{(k)}$$

existiert[13]). Wir bezeichnen nun mit γ_n irgendeinen Häufungswert der Folge $\gamma_n^{(k)}$; der Einheitlichkeit halber wollen wir für alle n immer den unteren Häufungswert annehmen. Dann behaupten wir folgendes:

Satz 4 (Drittes Kriterium). *Der Punkt p ist regulär oder nicht, je nachdem die aus positiven Gliedern*[13]) *bestehende Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \gamma_n \tag{8}$$

[14])

divergiert oder konvergiert.

---

[13]) In der speziellen Potentialtheorie ist nämlich

$$\varphi_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial v_n^{(k)}}{\partial n} \quad \text{und daher} \quad \gamma_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial v_n^{(k)}}{\partial n}\, dt,$$

wo Σ eine beliebige Kontur ist (und nicht notwendig gleich $\Sigma_n^{(k)}$ zu sein braucht). Daraus beweist man leicht die Existenz des limes.

Wir bemerken noch, daß die $\gamma_n^{(k)}$ und γ_n natürlich positiv sind, denn in unserem Falle ist $\varphi = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial v_a}{\partial n} - \frac{\partial v_i}{\partial n}\right)$, wo sich a auf $\Omega_0 - \Omega$ und i auf Ω bezieht; n ist die innere Normale von Ω. Nun ist offenbar $\frac{\partial v_a}{\partial n} \geq 0$ und wegen $v \leq 1$ in Ω auch $-\frac{\partial v_i}{\partial n} \geq 0$.

[14]) In der Abhandlung von Wiener, in welcher das Kriterium zum erstenmal bewiesen worden ist [The Dirichlet Problem, l. c. [1]), S. 127—146], hat die Reihe im zweidimensionalen Falle die Form $\sum_n 2^n \gamma_n$, was mit dem dortigen Beweisverfahren

Beweis[14]). Wir setzen zunächst voraus, daß die Reihe (8) divergiert, und zeigen, daß dann ein Potential im Sinne von Satz 3 im Punkte p den Grenzwert 1 besitzt. Nehmen wir an, daß etwa

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2i\gamma_{2i} \tag{9}$$

divergiert. Der Fall, daß nur $\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)\gamma_{2i+1}$ divergiert, läßt sich ganz analog erledigen. Wir wählen die positive ganze Zahl m so groß, daß

$$\lambda^{2m} < \alpha \tag{10}$$

ist und setzen

$$\sum_{i=m}^{m'} e_{2i} = e_{m,m'}, \qquad \sum_{i=m}^{m'} v_{2i} = v_{m,m'}, \qquad m' > m;$$

die Wahl von m' behalten wir uns noch vor. Wir zeigen zunächst, daß es für die Divergenz der Reihe (8) gleichgültig ist, welchen Häufungspunkt der $\gamma_n^{(k)}$ man als γ_n bezeichnet. Wegen (2) ist

$$G(P,Q) \geqq 0.$$

Da nun (vgl. Fußnote [13])) die $\varphi_n^{(k)}$ nicht negativ sind, so gilt bei beliebigem, festem P die Ungleichung

$$\gamma_n^{(k)} \operatorname{Min} G(P,Q) \leqq v_n^{(k)}(P) \leqq \gamma_n^{(k)} \operatorname{Max} G(P,Q), \quad (Q \text{ auf } \Sigma_n^{(k)}). \tag{11}$$

Bezeichnen wir mit $\underline{\gamma_n}$, $\underline{G}$ bzw. $\overline{\gamma_n}$, $\overline{G}$ den unteren bzw. oberen limes der $\gamma_n^{(k)}$, Min G, Max G, so folgt aus der Ungleichung (11) und aus der Konvergenz ihrer mittleren Glieder $v_n^{(k)}$

$$\underline{\gamma_n} \geqq \overline{\gamma_n}\,\frac{\underline{G}}{\overline{G}}$$

bei beliebigem P! Daß $\overline{\gamma_n}$ endlich sein muß, ergibt sich aus (11), wenn man berücksichtigt, daß wegen des Maximumprinzips die Greensche Funktion nur auf dem Rande Σ_0 verschwinden kann.

Nun wählen wir den Punkt P irgendwie zwischen den Kreisen mit den Radien 1 bzw. $\frac{1}{2}$ um p, so daß er einen von Null verschiedenen kleinsten Abstand von Σ_0 und $\Sigma_m^{(k)}$ besitzt, falls k hinreichend groß ist. Dasselbe gilt dann erst recht von allen $\Sigma_n^{(k)}$ mit $n > m$. Daraus erhellt — wiederum wegen des Maximumprinzips —, daß $\underline{G}$ und $\overline{G}$ zwischen

---

zusammenhängt. Dort wird nämlich die *explicite Darstellung der klassischen Greenschen Funktion für den Kreis* benutzt. Auch sind die normierten Potentiale anders definiert. Der Beweis ließe sich nicht in dieser Form auf unseren Fall übertragen. Das hier benutzte Verfahren ist wenigstens in der Grundidee dem Beweise von O. D. Kellogg (Foundat. S. 332ff.) beim dreidimensionalen Falle nachgebildet. Der zweidimensionale Fall ist meines Wissens bisher nur von Wiener behandelt worden.

festen endlichen positiven Schranken liegen und zwar unabhängig von k und $n(>m)$, d. h. es ist

$$\underline{\gamma_n} \geqq \overline{\gamma_n} \cdot \Theta, \qquad 0 < \Theta \leqq 1$$

und mit $\Sigma n \overline{\gamma_n}$ divergiert zugleich $\Sigma n \underline{\gamma_n}$; umgekehrt folgt aus der Konvergenz von $\Sigma n \underline{\gamma_n}$ auch diejenige von $\Sigma n \overline{\gamma_n}$, w. z. b. w.

Da wir limes $v(P)$ für $P \to p$ untersuchen wollen, können wir voraussetzen, daß P innerhalb des Kreises K um p mit dem Radius $\frac{1}{2}$ liege. Setzen wir

$$G(P,Q) = \lg \frac{1}{\overline{PQ}} + w,$$

so gilt, weil Σ_0 außerhalb des Einheitskreises liegt, mithin $G(P,Q)$ im Kreise $K_{1/2}$ über einer positiven Schranke verbleibt,

$$\lim_{\overline{PQ} \to 0} \frac{w}{\lg \frac{1}{\overline{PQ}}} = 0$$

gleichmäßig, falls auch Q in $K_{1/2}$ liegt.

Genau wie bei Püschel folgert man nun, daß es bei vorgegebenem ε einen Kreis K_{α_ε} gibt, so daß

$$\frac{1-\varepsilon}{G(P,Q)} \leqq \frac{1}{\lg \frac{1}{\overline{PQ}}} \leqq \frac{1+\varepsilon}{G(P,Q)} \tag{12}$$

ist, falls P und Q beide in K_{α_ε} liegen. Wir nehmen nun an, daß m so groß ist, daß

$$\lambda^{2m} \leqq \alpha_\varepsilon$$

ist.

Gehen wir nun in (11) zum limes bzw. unteren limes über, so erhalten wir

$$\gamma_n \underline{G} \leqq v_n \leqq \gamma_n \overline{G}, \qquad (\gamma_n = \overline{\gamma_n}) \tag{11a}$$

wo z. B. für $\underline{G}$ das Minimum von $G(P,Q)$ zu nehmen ist, wenn Q die Punkte von e' durchläuft. Da nach Voraussetzung auch P in K_{α_ε} liegt, so können wir (12) benutzen und erhalten, da wegen $\overline{PQ} \leqq 1$ der Logarithmus positiv ist,

$$(1-\varepsilon)\gamma_n \lg \frac{1}{\operatorname{Max} \overline{PQ}} \leqq v_n \leqq (1+\varepsilon)\gamma_n \lg \frac{1}{\operatorname{Min} \overline{PQ}}. \tag{13}$$

Liegt nun P in dem Kreisringe, in welchem auch e_{2n} liegt, so ist in $v_{m,m'}$

$$v_{2n} \leqq 1,$$

und für $n > i$ ist nach (13)

$$v_{2i} \leqq (1+\varepsilon)\gamma_{2i} \lg \frac{1}{\lambda^{2i+1} - \lambda^{2n}} = (1+\varepsilon)\gamma_{2i}\left[2i \lg \frac{1}{\lambda} + \lg \frac{1}{\lambda(1-\lambda^{2(n-i)-1}}\right],$$

da $1-\lambda^{2(n-i)-1} \geqq 1-\lambda$ ist, so folgt

$$v_{2i} \leqq (1+\varepsilon)\Big[2i\gamma_{2i}\lg\frac{1}{\lambda}+\gamma_{2i}\lg\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big]. \tag{14}$$

Die Ungleichung (14) gilt aber auch, wie man ähnlich beweist, für den Fall $n<i$. Also ist schließlich

$$v_{m,m'} \leqq (1+\varepsilon)\Big[1+\lg\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\sum_{m}^{m'}\gamma_{2i}+\lg\frac{1}{\lambda}\sum_{m}^{m'}2i\gamma_{2i}\Big]$$

$$= (1+\varepsilon)\Big[A+\lg\frac{1}{\lambda}\sum_{m}^{m'}2i\gamma_{2i}\Big].$$

Setzen wir

$$\frac{v_{m,m'}}{(1+\varepsilon)\Big(A+\lg\frac{1}{\lambda}\sum_{m}^{m'}2i\gamma_{2i}\Big)} = \bar{v}_{m,m'}, \tag{15}$$

so ist

$$\bar{v}_{m,m'} \leqq 1.$$

Benutzt man nun die andere Hälfte der Ungleichung (13), so ergibt sich für $r > \overline{pP}$

$$v_{m,m'} > (1-\varepsilon)\sum_{m}^{m'}\gamma_{2i}\lg\frac{1}{\lambda^{2i}+r}$$

$$= (1-\varepsilon)\left[\lg\frac{1}{\lambda}\sum_{m}^{m'}2i\gamma_{2i}+\sum_{m}^{m'}\gamma_{2i}\lg\frac{1}{1+\frac{r}{\lambda^{2i}}}\right]$$

$$> (1-\varepsilon)\Big[\lg\frac{1}{\lambda}\sum_{m}^{m'}2i\gamma_{2i}-\sum_{m}^{m'}\gamma_{2i}\lg\Big(1+\frac{r}{\lambda^{2m'}}\Big)\Big].$$

Setzen wir $r=\lambda^{2m'}$, so folgt schließlich

$$v_{m,m'} > (1-\varepsilon)\Big[\lg\frac{1}{\lambda}\sum_{m}^{m'}2i\gamma_{2i}-\lg 2\sum_{m}^{m'}\gamma_{2i}\Big].$$

Nach (15) ist also

$$\bar{v}_{m,m'} > \frac{-B+\lg\frac{1}{\lambda}\sum_{m}^{m'}2i\gamma_{2i}}{A+\lg\frac{1}{\lambda}\sum_{m}^{m'}2i\gamma_{2i}}\cdot\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \tag{16}$$

$$A = 1+\lg\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\sum_{m}^{m'}\gamma_{2i}, \quad B=\lg 2\sum_{m}^{m'}\gamma_{2i}.$$

Aus der Divergenz von $\sum_{m}^{m'} 2i\gamma_{2i}$ folgt nun[15])

$$\lim_{m' \to \infty} \frac{\sum_{m}^{m'} \gamma_{2i}}{\sum_{m}^{m'} 2i\gamma_{2i}} = 0.$$

Ist nun η beliebig vorgegeben, so wähle ich ε hinreichend klein, also m genügend groß, und dann auch $m' > m$ hinreichend groß, so daß nach (16)

(17) $$\bar{v}_{m,m'} > 1 - \eta$$

ist. Andererseits ist $\bar{v}_{m,m'} \leqq 1$. Offenbar ist nun

$$v_\alpha \geqq \bar{v}_{m,m'},$$

weil die Menge E_α die Menge $e_{m,m'}$ enthält. In einem hinreichend kleinen Kreise um p gilt also wegen (17)

$$v_\alpha \geqq 1 - \eta.$$

Aus Satz 3 folgt somit die Regularität von p, was wir beweisen wollten.

Nun ist die Umkehrung zu beweisen. Es sei also $\sum_{i=1}^{\infty} i\gamma_i$ konvergent, Wir wählen m so groß, daß

(18) $$\sum_{i=m}^{\infty} i\gamma_i < \frac{1}{\lg \frac{1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{8}$$

ist, und daß im Kreise K_{λ^m} um p die Ungleichung (12) mit $\varepsilon < 1$ gilt. Nun sei v_m das normierte Potential von E_m (nicht e_m!). Wir nehmen an, daß $v_m(P)$ für $P \to p$ sich dem Werte 1 stetig nähert. Dann gibt es einen Kreis K innerhalb K_{λ^m}, in und auf welchem

(19) $$v_m > \frac{3}{4}$$

ist. Jetzt wählen wir $m' (> m)$ so groß, daß $K_{\lambda^{m'}}$ innerhalb K liegt, und daß das normierte Potential $v_{m'}$ von $E_{m'}$ auf K kleiner als $\frac{1}{4}$ ist:

$$K_{\lambda^m} > K > K_{\lambda^{m'}}, \qquad v_{m'} < \frac{1}{4} \text{ auf } K.$$

$v_{m,m'}$ sei das normierte Potential von $E_m - E_{m'}$ (bedeutet also etwas anderes als im ersten Teil des Beweises). Bei geeigneter Approximation der drei Potentiale v_m, $v_{m'}$ und $v_{m,m'}$ erhält man leicht die Ungleichung

(20) $$v_m \leqq v_{m'} + v_{m,m'}.$$

---

[15]) Vgl. Knopp, Unendliche Reihen, 2. Aufl., S. 281, § 37, Satz 2 (logarithmische Vergleichsskalen).

Auf K ist also

$$\frac{3}{4} < v_m < \frac{1}{4} + v_{m,m'},$$

$$v_{m,m'} > \frac{1}{2} \text{ auf } K.$$

Daraus kann man mit Hilfe der Approximationsfunktionen folgern, daß

$$v_{m,m'} \geqq \frac{1}{2} \tag{21}$$

auch innerhalb K ist. Andererseits ist in p (ähnlich wie bei (20))

$$v_{m,m'} \leqq \sum_{i=m}^{m'} v_i \leqq (1+\varepsilon) \sum_{m}^{m'} \gamma_i \lg \frac{1}{\lambda^{i+1}} = (1+\varepsilon) \sum_{m}^{m'} i\gamma_i \lg \frac{1}{\lambda^{1+\frac{1}{i}}},$$

wobei nach einer Bemerkung zur Ungleichung (18) $\varepsilon < 1$ genommen werden darf. Also ist

$$v_{m,m'} \leqq 2 \lg \frac{1}{\lambda^{1+1}} \sum_{m}^{m'} i\gamma_i < \frac{1}{2}$$

nach (18). Dies steht aber im Widerspruch zu (21), und die Annahme, daß $\lim_{P \to p} v_m(P) = 1$ ist, ist falsch. Damit ist aber nach Satz 3 auch die Umkehrung bewiesen.

§ 5.

Vergleichung der regulären Punkte für $L(u) = 0$ und $\Delta u = 0$.

Außer der Bedingung (2) stellen wir jetzt noch die *Forderung* auf

$$2c - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) < 0, \tag{2a}$$

von der wir uns am Schlusse wieder frei machen werden. Σ_0, Σ, Ω_0, Ω mögen dieselbe Bedeutung wie früher haben.

Wir wollen einen neuen Ausdruck für die Kapazität eines normierten Potentials aufstellen, der uns eine Vergleichung mit den Potentialen für die Gleichung $\Delta u - cu = 0$ ermöglicht.

Es sei also $u(P) = \int_{\Sigma} G(P, Q_t)\, \varphi(t)\, dt$ ein normiertes Potential der Gleichung $L(u) = 0$ für das Gebiet Ω, d. h. es ist

$$u = \begin{cases} 0 & \text{auf } \Sigma_0, \\ 1 & \text{auf } \Sigma. \end{cases}$$

Dann folgt aus dem Greenschen Satze, wenn n die innere Normale von $\Omega_0 - \Omega$ bezeichnet:

$$\int_{\Omega_0 - \Omega} (u\Delta u + u_x^2 + u_y^2)\, d\omega = -\int_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Sigma_0} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} ds. \tag{22}$$

Setzt man hierin

$$u\Delta u = -uau_x - ubu_y - cu^2$$

und integriert die beiden ersten Glieder partiell, so erhält man

$$-\int_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int_{\Omega_0-\Omega}\left[\frac{1}{2}u^2(a_x+b_y-2c)+u_x^2+u_y^2\right]d\omega+\frac{1}{2}\int_{\Sigma_0+\Sigma}u^2(a\cos nx+b\cos ny)\,ds$$

$$=\int_{\Omega_0-\Omega}\left[\frac{1}{2}u^2(a_x+b_y-2c)+u_x^2+u_y^2\right]d\omega+\frac{1}{2}\int_{\Sigma}(a\cos nx+b\cos ny)\,ds.$$

Das zweite Integral können wir in ein Flächenintegral über Ω verwandeln, wobei zu beachten ist, daß hier n die äußere Normale von Ω ist. Unter Benutzung der Relation

$$-\frac{\partial u_a}{\partial n}+\frac{\partial u_i}{\partial n}=2\pi\varphi,$$

in welcher sich i und a auf das Innen- bzw. Außengebiet von Ω beziehen, erhält man schließlich, wenn man noch zur Abkürzung $\frac{1}{2}u^2(a_x+b_y-2c)+u_x^2+u_y^2=H(u,u)$ setzt,

$$(23)\quad 2\pi\int_{\Sigma}\varphi(s)\,ds-\int_{\Sigma}\frac{\partial u_i}{\partial n}ds=\int_{\Omega_0-\Omega}H(u,u)\,d\omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega}(a_x+b_y)\,d\omega.$$

Da n die äußere Normale von Ω bezeichnet, und u im Inneren von Ω kleiner als 1 ist, so ist $\frac{\partial u_i}{\partial n}>0$, also

$$(23\,a)\quad 2\pi\int_{\Sigma}\varphi(s)\,ds=2\pi\gamma\geqq\int_{\Omega_0-\Omega}H(u,u)\,d\omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega}(a_x+b_y)\,d\omega.$$

Wir setzen nun

$$-\frac{1}{2}(a_x+b_y)+c=c^*$$

und betrachten das normierte Potential u^* für das Gebiet Ω, welches der Gleichung

$$(24)\qquad \Delta u^*+c^*u^*=0$$

genügt.

Da nach Voraussetzung $c^*<0$ ist, so ist auch u^* in der Form darstellbar

$$u^*(P)=\int_{\Sigma}G^*(P,Q_t)\,\varphi^*(t)\,dt.$$

Nun gilt unter der Voraussetzung, daß u^* in $\Omega_0-\Omega$ der Gleichung $\Delta u^*+c^*u^*=0$ genügt und mit u auf dem Rande übereinstimmt, die Identität

$$(25)\quad \int_{\Omega_0-\Omega}H(u,u)\,d\omega=\int_{\Omega_0-\Omega}H(u^*,u^*)\,d\omega+\int_{\Omega_0-\Omega}H(u^*-u,u^*-u)\,d\omega,$$

welche man erhält, wenn man in $H(u^* - u, u^* - u) = H(u^*, u^*) + H(u, u) - 2H(u, u^*)$ an dem letzten Summanden eine partielle Integration ausführt.

Wegen $c^* < 0$ folgt aus dieser Identität

$$\int_{\Omega_0 - \Omega} H(u, u)\, d\omega > \int_{\Omega_0 - \Omega} H(u^*, u^*)\, d\omega \text{ [16]}. \tag{26}$$

Wendet man nun die Formel (23) auf u^* an, indem man $a = b = 0$ setzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0 - \Omega} H(u^*, u^*)\, d\omega &= 2\pi \int_{\Sigma} \varphi^*(s)\, ds - \int_{\Sigma} \frac{\partial u_i^*}{\partial n}\, ds = 2\pi\gamma^* - \int_{\Omega} \Delta u^*\, d\omega \\ &= 2\pi\gamma^* + \int_{\Omega} c^* u^*\, d\omega. \end{aligned} \tag{27}$$

Aus (23), (26) und (27) folgt schließlich die wichtige Formel

$$2\pi\gamma \geq \int_{\Omega_0 - \Omega} H(u, u)\, d\omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a_x + b_y)\, d\omega > 2\pi\gamma^* + \int_{\Omega} \left[c^* u^* + \frac{1}{2}(a_x + b_y) \right] d\omega. \tag{28}$$

Wir haben nun zu zeigen, daß die letzten beiden Summanden für die Divergenz der Wienerschen Reihe nicht in die Wagschale fallen. $c^* u^*$ und $a_x + b_y$ liegen zwischen festen Schranken. Sei also

$$\left| c^* u^* + \frac{1}{2}(a_x + b_y) \right| \leqq \mu.$$

Beim Wienerschen Kriterium handelt es sich um die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n$, in welcher sich die Kapazität γ_n auf eine gewisse Punktmenge e_n zwischen den Kreisen λ^n und λ^{n+1} bezieht. e_n wird von außen durch analytische Kurven $\Sigma_n^{(k)}$ approximiert. Deren Innengebiete $\Omega_n^{(k)}$ liegen für genügend großes k sicher innerhalb des Kreises $K_{\lambda^{n-1}}$, also ist

$$\left| \int_{\Omega_n^{(k)}} \left[c^* u^* + \frac{1}{2}(a_x + b_y) \right] d\omega \right| \leqq \pi\mu\lambda^{2n-2}. \tag{29}$$

Wegen $\lambda < 1$ konvergiert aber $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^{2(n-1)}$. Ist also $\Sigma n\gamma_n^*$ divergent, so gilt nach (28) das Gleiche auch von $\Sigma n\gamma_n$. Nun haben wir noch γ^* zu vergleichen mit der Kapazität γ^{**} des entsprechenden Potentials u^{**}, das der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt [17]. Bei dieser Gleichung gilt, wie

---

[16]) Zur Benutzung einer Minimumseigenschaft bin ich durch die Ausführungen von Püschel [l. c. [1]), § 3, Nr. 2] angeregt worden (die im übrigen nichts mit dem hier geführten Beweis zu tun haben).

[17]) Wir könnten uns hier zwar direkt auf die Ergebnisse von Brelot stützen, nach welchen jeder für Δu reguläre Punkt auch für $\Delta u + cu$ regulär ist, jedoch wählen wir der Einheitlichkeit halber den oben eingeschlagenen Weg.

man sich leicht überzeugt, das Wienersche Kriterium ebenfalls in der hier entwickelten Form, weil man hier die Darstellung $u = \int G \cdot \varphi \, dt$ viel einfacher beweisen kann, ohne eine Voraussetzung wie $c < 0$ ansetzen zu müssen. Aus (23) folgt

$$2\pi\gamma^{**} = \int_{\Omega_0 - \Omega} (u_x^{**2} + u_y^{**2})\, d\omega,$$

(30)

$$2\pi\gamma^{*} - \int_{\Sigma} \frac{\partial u_i^*}{\partial n}\, ds = 2\pi\gamma^{*} + \int_{\Omega} c^* u^* d\omega = \int_{\Omega_0 - \Omega} (u_x^{*2} + u_y^{*2} - c^* u^{*2})\, d\omega.$$

Bekanntlich ist

$$\int_{\Omega_0 - \Omega} (u_x^{**2} + u_y^{**2})\, d\omega \leqq \int_{\Omega_0 - \Omega} (u_x^{*2} + u_y^{*2})\, d\omega.$$

Wegen $c^* < 0$ ist also

(31) $$2\pi\gamma^{*} \geqq 2\pi\gamma^{*} + \int_{\Omega} c^* u^* d\omega \geqq \int_{\Omega_0 - \Omega} (u_x^{*2} + u_y^{*2}) d\omega \geqq \int_{\Omega_0 - \Omega} (u_x^{**2} - u_y^{**2}) d\omega = 2\pi\gamma^{**}.$$

Divergiert also $\sum_n n\gamma_n^{**}$, so tut dies auch $\sum_n n\gamma_n$, womit unser Ziel erreicht ist.

Wir haben uns jetzt nur noch von den beiden Bedingungen

$$c < 0, \quad c - \frac{1}{2}(a_x + b_y) = c^* < 0$$

zu befreien. Zu diesem Zweck beweisen wir den folgenden **Hilfssatz:** *u_1 sei die Lösung des verallgemeinerten Dirichletschen Problems für die Gleichung*

$$L^{(1)}(u) = \Delta u + a u_x + b u_y + c^{(1)} u = 0, \qquad c^{(1)} \leqq 0,$$

und u die entsprechende Lösung für

$$L(u) = \Delta u + a u_x + b u_y + c u = 0, \qquad c \leqq 0.$$

Dann haben $L^{(1)}$ und L dieselben regulären Punkte.

$G^{(1)}(P, Q)$ sei die verallgemeinerte Greensche Funktion, welche der Gleichung $L^{(1)}(u) = 0$ genügt. p sei ein regulärer Punkt für $L^{(1)}(u) = 0$. Dann nimmt $G^{(1)}$ in p den Wert Null stetig an. Wir setzen

(32) $$L^{(1)}(u) = (c_1 - c)\, u = f.$$

Nun überzeugt man sich leicht von der Gültigkeit der Gleichung

(33) $$u(P) = u_1(P) - \frac{1}{2\pi} \int_T G^{(1)}(P, Q) f(Q)\, d\omega_Q,$$

indem man in üblicher Weise den Rand des Gebietes durch analytische Kurven approximiert. Da nun $f(Q)$ eine beschränkte Funktion ist, so nimmt der zweite Summand rechts in p den Wert Null stetig an, während der erste dem geforderten Randwert stetig zustrebt. Also gilt das letztere auch von $u(P)$. Da man L und $L^{(1)}$ vertauschen kann, so ist der Satz hiermit bewiesen.

Sind nun a, b, c beliebig gegeben und $c \leqq 0$, so betrachten wir statt der Gleichung

$$L(u) = \Delta u + a u_x + b u_y + c u = 0$$

die folgende

$$L^*(u) = \Delta u + a u_x + b u_y + c^* u = 0, \tag{34}$$

wo c^* eine negative Konstante ist, für welche

$$2c^* - a_x - b_y < 0$$

ist. Auf $L^*(u)$ ist unsere Theorie anwendbar. Ist der Punkt p aber für $L^*(u)$ regulär, dann ist er es nach dem Hilfssatze auch in bezug auf $L(u)$.

Damit ist also schließlich der folgende Satz bewiesen:

Satz 5. *Sind a_x, b_y und c in $T + S$ Hölder-stetig*[18]) *und $c \leqq 0$, so sind alle bezüglich der Gleichung $\Delta u = 0$ regulären Punkte auch für die Gleichung*

$$\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0$$

regulär. Ist die Gleichung selbstadjungiert, so gilt auch das Umgekehrte.

Der zweite Teil der Behauptung läßt sich analog beweisen wie bei Püschel [l. c.[1]), § 3, Nr. 2].

Es sei zum Schluß noch bemerkt, daß sich das inhomogene Problem $L(u) = f$, wobei nicht mehr $c \leqq 0$ zu gelten braucht, in ganz analoger Weise erledigen läßt, wie es Lichtenstein[19]) im klassischen Falle tut.

§ 6.

Bemerkungen über den n-dimensionalen Fall.

Wir erwähnten bereits in der Einleitung, daß zur Erledigung des n-dimensionalen Falles vorläufig noch die den beiden Hilfssätzen 1 und 2 analogen Sätze fehlen. Nehmen wir aber diese Sätze als bewiesen an, so läßt sich die Theorie ähnlich wie im zweidimensionalen Falle — in mancher Beziehung sogar noch einfacher — entwickeln. Dies wollen wir noch kurz skizzieren.

Wir beschäftigen uns also jetzt mit der Differentialgleichung

$$\Delta_2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u = 0, \quad \Delta_2 u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right). \tag{35}$$

Wir setzen voraus, daß c, *die ersten Ableitungen der b_i* und *die zweiten Ableitungen der a_{ik} Hölder-stetig* sind. Unter diesen Bedingungen ist das

[18]) Der Koeffizient c brauchte übrigens nur beschränkt und integrierbar zu sein.

[19]) Vgl. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 15 (1916), S. 129.

erste Randwertproblem für gewisse hinreichend kleine Gebiete lösbar[20]). Wir benutzen nur die Lösung für den Kreis und setzen wieder voraus

$$c \leqq 0. \tag{2'}$$

Dann kann man das verallgemeinerte Dirichletsche Problem nach der Methode von O. Perron lösen [l. c. [8])]. Perron benutzt in Wirklichkeit nur drei Eigenschaften des Poissonschen Integrals, nämlich die Nichtexistenz positiver Maxima, die Linearität und den zweiten Harnackschen Satz[21]). Diese Eigenschaften sind auch in unserem Falle vorhanden[21a]). Man gewinnt damit auch eine klassische Lösung für beliebig große Gebiete, die von endlich vielen analytischen Flächen begrenzt werden. Auch Giraud bringt eine Lösung für beliebig große Gebiete, jedoch unter schärferen Voraussetzungen über die Koeffizienten. Mit diesen klassischen Lösungen kann man nun auch die Theorie von Kellogg durchführen, welche bei unserem Beweise (vgl. § 3) eine Rolle spielte.

Nun die Konstruktion des normierten Potentials. Wir müssen den Hilfssatz 3 beweisen. Die früheren Bezeichnungen behalten wir unter sinngemäßer Übertragung auf den n-dimensionalen Fall bei. Von Vorteil ist es, die durch die a_{ik} nahegelegte *Riemannsche Maßbestimmung* einzuführen. Wir verweisen hierfür auf die betreffende Arbeit von W. Feller[22]), in welcher alles genau durchgeführt ist. $dV = \sqrt{g}\, dx_1 \ldots dx_n$ bedeutet das n-dimensionale, do das n-1-dimensionale Volumenelement einer Hyperfläche. Außerdem setzen wir

$$(36)\quad \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\Delta_2 u + \sum_i^{1,n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu\right] = L(u),\quad \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\Delta_2 v - \sum_i^{1,n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv\right] = M(v).$$

$M(v)$ ist der zu $L(u)$ adjungierte Differentialausdruck. Die Normalenrichtung in den nachher benutzten Formeln ist immer im Riemannschen Sinne aufzufassen (vgl. Feller l. c. (7)). Nun setzen wir wieder voraus

$$c < 0. \tag{2}$$

Dann läßt sich der Beweis von Hilfssatz 3 unter sinngemäßer Übertragung genau so durchführen wie in § 1. Man transformiert wieder lokal in Koordinaten X_i, so daß ein Flächenstück von Σ in die Ebene $X_n = \text{const.}$ übergeht wobei man die neuen Koordinaten so wählen kann,

---

[20]) Vgl. G. Giraud, Ann. école Norm. 3, Sér. 46 (1929), S. 164.

[21]) Perron benutzt den zweiten Harnackschen Satz allerdings nicht, sondern einen anderen Konvergenzsatz. Es genügt jedoch der zweite Harnacksche Satz, wie Radò und Riesz Math. Zeitschr. 20 gezeigt haben.

[21a]) Die zweite wegen (2') und die dritte nach Feller, vgl. Fußnote 22, S. 647.

[22]) Math. Annalen 102 (1930), S. 633—649.

daß von den neuen G^{ik} die G^{in} $(i \neq n)$ verschwinden[23]). Dabei bleibt die Normalenrichtung natürlich erhalten. Nun setzen wir wieder w in einer (euklidischen) Kugel K über die Grenzebene fort durch Spiegelung, und setzen auf der anderen Seite

$$B_i(\overline{X}_i) = B_i(X_i) \ (i \neq n),$$

$$A_{ik}(\overline{X}_i) = A_{ik}(X_i), \quad B_n(\overline{X}_i) = -B_n(X_i), \quad C(\overline{X}_i) = C(X_i)$$

Dann gilt wiederum

$$L(\overline{w}) = 0, \tag{37}$$

ohne daß eine Unstetigkeit in den A_{ik} auftritt. Man erhält analog zu dem Früheren

$$\Delta_2(W - w) = 0. \tag{38}$$

Da nach Voraussetzung w und ebenso wie früher auch W in jeder abgeschlossenen Hälfte von K stetige zweite Ableitungen besitzt, so ist $W - w$ auf der Trennungsfläche selbst noch eine Lösung von (38) mit stetigen ersten Ableitungen. Durch die Funktionswerte und die Werte der ersten Ableitungen sind aber unter Benutzung von (38) die zweiten Ableitungen eindeutig festgelegt. Diese sind also in K stetig. Daraus folgt wie früher der Widerspruch zur Annahme $w \not\equiv 0$.

Auf Grund unserer Hypothesen läßt sich dann auch die Darstellung des normierten Potentials als Potential einer einfachen Belegung genau wie in § 2 beweisen. Die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen bei analytischer Randfunktion und Randfläche ist von Giraud bewiesen worden [l. c. [20])].

Um eine bessere Analogie zu den Ausführungen von Kellogg und Püschel zu haben, ist es zweckmäßig — aber nicht unbedingt erforderlich —, die normierten Potentiale für den ganzen Raum zu definieren. Die Koeffizienten kann man ja in bekannter Weise fortsetzen, so daß sie außerhalb eines hinreichend großen Kreises verschwinden. Man läßt einfach die Kontur Σ_0 ins Unendliche wachsen. Daß dabei die Potentiale wieder gegen eine Lösung der Differentialgleichung konvergieren, folgt aus dem Harnackschen Satze[24]).

Das Wienersche Kriterium läßt sich fast wörtlich so beweisen wie bei Kellogg [l. c. [1]), Foundat, S. 332]. Man hat nur die Bemerkungen *c*, *d*. *e* von Püschel [l. c. [1]), S. 549/550] auf unseren Fall zu übertragen.

---

[23]) Vgl. Darboux, Surfaces 2, 2. Aufl. (1915), S. 522. Die großen Buchstaben bezeichnen hier die transformierten Größen. Die g^{ik} (G^{ik}) stehen zu den a_{ik} (A_{ik}) in der Beziehung $g^{ik} = a_{ik} |a_{ik}|^{\frac{1}{2-n}}$, wo $|a_{ik}|$ die Determinante der Matrix (a_{ik}) bedeutet.

[24]) Vgl. l. c. [22]), § 5.

Püschel führt dort unter anderem eine lineare Transformation durch, bei welcher sich die Kapazität nur mit dem Werte der Determinante multipliziert. In unserem Falle muß man die direkte Definition der Kapazität heranziehen:

$$\gamma = \int_{\Sigma} \varphi \, do, \quad \varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i.$$

Bei Benutzung der Riemannschen Maßbestimmung ergibt sich sogar die Gleichheit der Kapazität des transformierten Potentials mit der ursprünglichen. Bezüglich der Limites der $\gamma_n^{(k)}$ gilt auch jetzt das auf S. 542 Gesagte. In den Ausführungen von Kellogg (S. 332/333) hat man dann nur ε durch $\frac{\varepsilon}{n-2}$ zu ersetzen und überall einen Exponenten $n-2$ hinzuzufügen, z. B. ergibt sich

$$v_{ki} \leqq \frac{\gamma_{ki}}{[\lambda (1-\lambda^{k-1}) \lambda^{ki}]^{n-2}}.$$

Nun der Beweis des Hauptsatzes. Aus der Greenschen Formel folgt:

$$\int_{\Omega_0 - \Omega} u \cdot \frac{\Delta_2 u}{\sqrt{g}} \, dV = -\int_{\Omega_0 - \Omega} \sum_{i,k}^{1,n} g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dV + \int_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} do,$$

wenn $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in Richtung der inneren Riemannschen Normalen bedeutet. Macht man nun den Grenzprozeß $\Omega_0 \to \infty$, so konvergiert auch das erste Glied der rechten Seite, wie man sich leicht klar macht. Setzen wir $(\lim \Omega_0) - \Omega = \Omega^*$, so erhält man wegen $L(u) = 0$ und $u = 1$ auf Σ

$$\int_{\Omega^*} \left[\sum_{i,k}^{1,n} g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{c u^2}{\sqrt{g}} - \frac{u}{\sqrt{g}} \sum_{i}^{1,n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] dV = \int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} do.$$

Nun ist

$$\int_{\Omega_0 - \Omega} \frac{u}{\sqrt{g}} \sum_{i}^{1,n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dV = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_0 - \Omega} \frac{u^2}{\sqrt{g}} \sum_{i}^{1,n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} dV + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \frac{u^2}{\sqrt{g}} \sum_{i}^{1,n} \frac{b_i D_i}{\sqrt{\Sigma g^{ik} D_i D_k}} do,$$

wo die D_i den gewöhnlichen Richtungskosinussen der inneren Normalen von Ω proportional sind. Man kann offenbar wieder zur Grenze übergehen und erhält, wenn man noch den zweiten Summanden der rechten Seite umformt, wegen $u = 1$ auf Σ

$$\int_{\Omega^*} \frac{u}{\sqrt{g}} \sum_{i}^{1,n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dV = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^*} \frac{u^2}{\sqrt{g}} \sum_{i}^{1,n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} dV - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{i}^{1,n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) dV.$$

Aus $u\ (P) = \int\limits_{\Sigma} G(P,Q)\,\varphi(Q)\,d\,o_Q$ folgt nun

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \varphi.$$

Wir können also schließlich schreiben:

$$\int\limits_{\Sigma} \varphi\,d\,o = \gamma = -\int\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i d\,o + \int\limits_{\Omega^*}\left\{\sum_{i,k}^{1,n} g^{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{u^2}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i}^{1,n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i} - c\right)\right\} d\,V + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_{i}^{1,n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right) d\,V.$$

Da $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der inneren Riemannschen Normalen von Ω bedeutet, die wegen der positiven Definitheit des Maßtensors tatsächlich ins Innere von Ω weist, so ist $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i$ negativ, weil das Potential u wegen $c < 0$ in Ω nicht größer als 1 sein kann. Mithin ist schließlich

$$\gamma \geqq \int\limits_{\Omega^*}\left\{\sum_{i,k}^{1,n} g^{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{u^2}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i}^{1,n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i} - c\right)\right\} d\,V + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_{i}^{1,n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right) d\,V.$$

Damit kann man nun dieselben Überlegungen anstellen wie im zweidimensionalen Falle, falls wiederum die Bedingung

$$\frac{1}{2}\sum_{i}^{1,n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i} - c > 0$$

erfüllt ist, von der man sich aber ebenso freimachen kann wie im zweidimensionalen Falle. Auch die Bedingung $c < 0$ kann durch die schwächere $c \leqq 0$ ersetzt werden.

Es ergibt sich also zunächst, daß alle für die Gleichung

$$\Delta_2 u = 0$$

regulären Punkte auch für

$$L(u) = 0$$

regulär sind. Nun folgt aber durch ein Verfahren, das dem Beweise von Püschel ganz genau nachgebildet ist, *daß die regulären Punkte für* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta_2 u = 0$ *genau übereinstimmen.* Wir würden also unter den erwähnten Hypothesen den Satz erhalten:

Alle für die Gleichung $\Delta u = 0$ *regulären Punkte sind auch für die Gleichung* $L(u) = 0$ *regulär, falls* $c \leqq 0$ *ist.*

Anhang.

Kurzer Beweis der Hilfssätze 1 und 2.

Wir setzen voraus wie in § 1, daß die Koeffizienten a, b, c von (1) in ihrem Definitionsgebiet Hölder-stetig mit festem Exponenten sind. Innerhalb des Definitionsgebiets liege ein Gebiet Ω, dessen Berandung Σ eine stetige Krümmung besitze. Für ein solches Gebiet und stetige Randfunktionen ist bekanntlich die erste Randwertaufgabe lösbar. Wir benutzen des weiteren Grundlösungen, deren Existenz durch E. E. Levi gesichert worden ist und in unserem Falle auch leicht durch sukzessive Approximation und alternierendes Verfahren bewiesen werden kann. Damit ist zugleich auch die Existenz der im Text benutzten Greenschen Funktion bewiesen.

Wir erinnern an einige Eigenschaften der Grundlösungen. Setzt man

$$G(P, \bar{P}) = \lg \frac{1}{r} + g(P, \bar{P}), \qquad r = \overline{P\bar{P}},$$

so genügt g der Gleichung

$$L(g) = a \frac{1}{r} \frac{x - \bar{x}}{r} + b \frac{1}{r} \frac{y - \bar{y}}{r} + c \lg r = f(P, \bar{P}). \tag{39}$$

Man kann g in folgender Weise darstellen: Es sei K irgend ein Kreis im Definitionsgebiet. Wir setzen

$$u_1 = \frac{1}{2\pi} \int_K \lg \varrho \, f(Q, \bar{P}) \, d\omega_Q, \qquad \varrho = \overline{Q\bar{P}},$$

$$-u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_K \lg \varrho \left(a \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + b \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + c u_1 \right) d\omega_Q,$$

wo den Punkten $P, Q, \bar{P}$ beziehentlich die Koordinaten (x, y), (ξ, η), $(\bar{x}, \bar{y})$ entsprechen. Dann ist offenbar $u_3 = g - u_1 - u_2$ eine Lösung der Gleichung

$$L(u_3) = -a \frac{\partial u_2}{\partial x} - b \frac{\partial u_2}{\partial y} - c u_2. \tag{39a}$$

Aus bekannten Eigenschaften des logarithmischen Potentials folgt nun wegen $f(P, \bar{P}) = O\left(\frac{1}{r}\right)$, wenn wir zur Abkürzung für die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ die gemeinsame Bezeichnung $D_1(u)$ einführen

$$u_1 = O(1), \quad D_1(u_1) = O(\lg r).$$

Hieraus aber folgt, daß u_2 mit seinen ersten Ableitungen Hölder-stetig ist[25]). Das Gleiche folgt dann auch von u_3, das eine reguläre Lösung von (39a) darstellt. Man kann also g in der folgenden Weise schreiben:

$$g(P, \bar{P}) = \frac{1}{2\pi} \int_K \lg \varrho \, [f(Q, \bar{P}) + d(Q, \bar{P}) \lg \bar{\varrho}] \, d\omega_Q + v \tag{40}$$

$$\varrho = \overline{Q\bar{P}}, \qquad \bar{\varrho} = \overline{Q\bar{P}},$$

[25]) Bei Dini (Acta Math. 25) ist der Satz nur für beschränkte Belegungsfunktionen bewiesen, jedoch läßt sich der Beweis leicht für unseren Fall umgestalten.

wo v eine gewisse reguläre Funktion bedeutet, während d beschränkt und integrabel und bei passender Ergänzung für $Q = \bar{P}$ in $\bar{P}$ bezüglich Q Hölder-stetig mit festem Exponenten ist. Aus (40) folgt

$$D_1(g) = O(\lg r). \tag{41}$$

Wir bemerken noch, daß die zweiten Ableitungen regulärer Lösungen von (1) sogar Hölder-stetig sind. Das gleiche gilt auch von den zweiten Ableitungen des logarithmischen Potentials für jedes abgeschlossene Gebiet, in welchem die Belegung Hölder-stetig ist.

Es sei nun $\varphi(t)$ eine Hölder-stetige Funktion der Bogenlänge t auf der Randkurve Σ. Dann beweisen wir den

Hilfssatz: *Die zweiten Ableitungen der Funktion*

$$w(P) = \int_{\Sigma} g(P, Q_t)\, \varphi(t)\, dt$$

lassen sich in $\Omega + \Sigma$ zu Hölder-stetigen Funktionen ergänzen.

Beweis: Es sei K ein Kreis um irgend einen Punkt von Σ, auf dessen Umgebung wir den Punkt P beschränken können. σ seien die durch K bestimmten Stücke von Σ. Den Beweis brauchen wir nur für $\int_{\sigma} g \cdot \varphi \cdot dt$ zu führen.

g enthält Summanden von der Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_K \lg \varrho \cdot a \frac{\partial \lg \bar{\varrho}}{\partial \bar{x}}\, d\omega_Q.$$

Wir betrachten also die Funktion

$$w_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} dt\, \varphi(t) \cdot \int_K \lg \varrho\, a \frac{\partial \lg \bar{\varrho}}{\partial \bar{x}}\, d\omega_Q = \int_K a \lg \varrho\, d\omega_Q \cdot \int_{\sigma} \frac{\partial \lg \bar{\varrho}}{\partial \bar{x}}\, \varphi(t)\, dt.$$

Die Vertauschung der Integrationen ist offenbar erlaubt. Dann ist

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \lg \bar{\varrho}}{\partial \bar{x}} \varphi\, dt = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\sigma} \lg \bar{\varrho}\, \varphi\, dt = -\frac{\partial}{\partial \xi} F(Q)$$

die erste Ableitung nach ξ eines Potentials der einfachen Schicht. Nach Lichtenstein[26]) ist diese in $\Omega + \Sigma$ Hölder-stetig und erleidet beim Überschreiten von Σ im allgemeinen einen Sprung. w_1 ist nun ein logarithmisches Potential, dessen Belegung in jedem der Teilgebiete von K, die durch σ bestimmt werden, einschließlich des Randes Hölder-stetig ist. Wie man sich leicht klar macht, sind dann die zweiten Ableitungen jedes Teilpotentials in jedem abgeschlossenen Teilgebiet bei passender Ergänzung Hölder-stetige Funktionen. Für die anderen Summanden von g ist der

[26]) Vgl. Enc. Bd. II_3, H. 3 (im folgenden mit „E" zitiert), S. 201, Nr. 3.

Beweis zum Teil noch einfacher. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Da Σ eine Hölder-stetige Krümmung besitzt, ergibt sich noch die

Folgerung: *Die Ableitung von* $\frac{\partial w}{\partial n_s}$ *nach der Bogenlänge* s *ist ebenfalls Hölder-stetig.*

Nun kommen wir zum Beweis von Hilfssatz 1 (vgl. Text). Man zerspaltet G in $\lg \frac{1}{r}$ und g. Sei

$$W_1(s) = \int_{\Sigma} \frac{\cos(r\, n_s)}{r_{st}}\, \varphi(t)\, dt \quad |s - s_1| = \delta \quad \begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix} = \begin{matrix} r_{st} \\ r_{s_1 t} \end{matrix}.$$

Das Integral $J = W_1(s) - W_1(s_1)$ zerspalten wir wie folgt:

$$J = J_1 + J_2 \qquad J_1 = \int_{\Sigma_1} \qquad \text{Min}\,(r, r_1) \geqq \delta^{1/4},$$

$$J_2 = \int_{\Sigma_2} \qquad \text{Min}\,(r, r_1) \leqq \delta^{1/4}.$$

Da $\frac{\cos(r, n_s)}{r_{st}}$ ebenso wie die Krümmung beschränkt ist, ergibt sich

$$J_2 < \text{const} \cdot \delta^{1/4}.$$

Sind Θ und Θ_1 die Winkel zwischen r, r_1 und den zugehörigen Tangenten, so können wir schreiben:

$$\frac{\cos(r\, n_s)}{r} - \frac{\cos(r_1\, n_{s_1})}{r_1} = \sin\Theta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{\sin\Theta - \sin\Theta_1}{r_1}.$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{d\,\Theta}{d\,s}$ beschränkt ist, so erhält man unter Anwendung des Mittelwertsatzes auf die zweite Differenz und unter Benutzung der Beziehungen

$$|s - s_1| = \delta, \quad \begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix} \Big\} \geqq \delta^{1/4}, \quad |r_1 - r| \leqq |s - s_1| = \delta$$

$$\left|\frac{\sin\Theta}{r} - \frac{\sin\Theta_1}{r_1}\right| < \delta^{1/2} + \text{const} \cdot \delta^{3/4}, \quad |W_1(s) - W_1(s_1)| < \text{const}\, \delta^{1/4}.$$

Um

$$\int_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial n_s}\right)_s - \left(\frac{\partial g}{\partial n_s}\right)_{s_1}\right] \varphi\, dt = \bar{J}$$

abzuschätzen, zerlegen wir wie soeben: $\bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2$. $\bar{J}_2$ läßt sich mit Hilfe von (41) erledigen.

$$\bar{J}_2 < \text{const} \int_0^{2\delta^{1/4}} \Big|\lg|t - s| + \lg|t - s_1|\Big|\, dt < c \cdot \delta^{1/4\,(1\,-\,\alpha)}, \quad \alpha \text{ beliebig klein.}$$

Zur Abschätzung von $\bar{J}_1$ benutzen wir wie im Beweis des Hilfssatzes die Darstellung (40). Es handelt sich im wesentlichen um die Glieder vom Typus

$$v = \int_K (\lg\varrho) \cdot a\, \frac{\partial \lg \bar{\varrho}}{\partial \bar{x}}\, d\,\omega_\varrho, \qquad \bar{P} \text{ auf } \sigma,$$

also um die Abschätzung von

$$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial n_s}\right)_s - \left(\frac{\partial v}{\partial n_s}\right)_{s_1}\right|.$$

Es ist

$$\frac{\partial \lg \varrho}{\partial n_s} - \frac{\partial \lg \varrho}{\partial n_{s_1}} = \frac{\cos(\varrho_1 n_s)}{\varrho} - \frac{\cos(\varrho_1 n_s)}{\varrho_1} + \frac{\cos(\varrho_1 n_s) - \cos(\varrho_1 n_{s_1})}{\varrho_1}.$$

Die erste Differenz ist nach Dini (l. c. S. 195) absolut $\leqq \frac{3\delta}{\varrho\,\varrho_1}$. Die zweite haben wir vorhin erst abgeschätzt; der Zähler ist absolut $\leqq \delta \cdot \text{const}$, wobei wir wieder $\delta = |s - s_1| \geqq \overline{P P_1}$ gesetzt haben. Wir erhalten also

$$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial n_s}\right)_s - \left(\frac{\partial v}{\partial n_s}\right)_{s_1}\right| < \int_K \left(\frac{3\delta}{\varrho\,\varrho_1} + \text{const}\,\frac{\delta}{\varrho_1}\right) \cdot |a| \cdot \frac{1}{\bar{\varrho}}\, d\omega_Q < \text{const}\,\delta \int_K \frac{d\omega_Q}{\varrho\,\varrho_1\,\bar{\varrho}}.$$

Das letztere Integral läßt sich in bekannter Weise abschätzen. Wegen $\left.\begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix}\right\} \geqq \delta^{1/4}$ bekommt man z. B. als Schranke für $\left|\int_K \frac{d\omega_Q}{\varrho\,\varrho_1\,\bar{\varrho}}\right|$ den Wert: const $\delta^{-1/2}$. Also ist schließlich $|J| <$ const $\delta^{1/8}$.

Damit ist der Beweis des ersten Teiles vollendet. Der zweite Teil der Behauptung folgt für das Glied mit g aus dem eingangs bewiesenen Hilfssatz (Folgerung). Für die entsprechende Tatsache aus der gewöhnlichen Potentialtheorie ist bei Lichtenstein[27]) nur der analoge Satz für das Potential der Doppelbelegung angeführt. Er gilt aber auch in unserem Fall beim Potential der einfachen Belegung.

Der Satz gilt zunächst sicher bei konstanter Belegung, was sich leicht aus der Sprungrelation unter Benutzung von E, S. 202, Nr. 5 ergibt. Man kann also von $W(s)$ einen Summanden mit konstanter Belegung derart abspalten, daß etwa $\varphi(s)$ oder $\varphi(s_1)$ verschwindet. Aus der Hölder-stetigkeit von φ folgt dann, daß man $W(s)$ unter dem Integralzeichen nach s differenzieren darf. Die Ableitung $\frac{dW}{ds}$ existiert also. Die Integration zerlegen wir ähnlich wie früher. Es sei

$$J_1 = \int_{\Sigma_1} \left[\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\cos(r\,n_s)}{r_{st}}\right)\right)_s - \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\cos(r\,n_s)}{r_{st}}\right)\right)_{s_1}\right] \varphi(t)\, dt \qquad \begin{matrix} r_{st} = r \\ r_{s_1 t} = r_1 \end{matrix},$$

wo $\text{Min}(r, r_1) \geqq \delta^\beta$, $\delta = |s - s_1|$ sei; β ist noch näher zu bestimmen. Θ habe dieselbe Bedeutung wie vorher. Dann ist

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\cos(r\,n_s)}{r}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\sin\Theta}{r}\right) = \frac{-\cos\Theta}{\varrho} \cdot \frac{1}{r},$$

[27]) E, S. 205, Nr. 5.

wo $\frac{1}{\varrho}$ die Krümmung bedeutet. Setzt man $\frac{-\cos\Theta}{\varrho} = \psi(s,t)$, so stellt man leicht fest, daß $|\psi(s,t) - \psi(s_1,t)| < c|s - s_1|^\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$ und

$$\left|\frac{\psi}{r} - \frac{\psi_1}{r_1}\right| = \left|\psi\frac{r_1 - r}{r\,r_1} + \frac{\psi - \psi_1}{r_1}\right| < c_1\,\delta^{1-2\beta} + c_2\,\delta^{\alpha-\beta}$$

ist. Für $\beta < \text{Min}\,(\frac{1}{2}, \alpha)$ ist die Behauptung für J_1 somit bewiesen. Den Rest von $\left(\frac{dW}{ds}\right)_s - \left(\frac{dW}{ds}\right)_{s_1}$ bezeichnen wir mit J_2, nachdem wir noch von $\left(\frac{dW}{ds}\right)_s$ und $\left(\frac{dW}{ds}\right)_{s_1}$ Summanden abgespalten haben, so daß $\varphi(s)$ bzw. $\varphi(s_1)$ verschwindet. Die abgespaltenen Summanden liefern insgesamt einen Beitrag von der Form const δ^{α_1}, $0 < \alpha_1 \leqq 1$. Die zwei Glieder von J_1 haben Schranken von der Form

$$\left|c_3 \int_0^{c_4 \cdot \delta^\beta} \frac{\varphi}{t}\,dt\right| < c_5 \int_0^{c_4 \delta^\beta} t^{\gamma-1}\,dt = c_6\,\delta^{\beta\gamma}.$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Der Beweis des zweiten Hilfssatzes erledigt sich teils auf Grund der Tatsache, daß der Satz für $\Delta u = 0$ gilt (E, S. 201/2, 3 u. 5), teils auf Grund des schon mehrfach benutzten Hilfssatzes über die Grundlösungen.

(Eingegangen am 16. Januar 1934).

A theory of quasi-analytic classes.

By

W. J. Trjitzinsky, of Urbana, U. S A.

Index.

Page

1°. Introduction 560
1. On the system (1°) 561
2. Quasi-analytic classes of the real variable 563
3. Quasi-analytic classes of the complex variable 570
4. *D*-analytic classes 577
5. Some intermediate classes 583

1°. Introduction. Some of the ideas at the base of this paper occurred to me while conducting a course on quasi-analytic functions at Harvard University (1931/32). I was led to the developments, here given, by certain results of Carleman[1]). In the sequel some results are also used of my earlier papers on quasi-analytic functions[2]). The important tool employed throughout the greater part of the paper consists of the theory of E. Schmidt[3]) of linear systems

$$(1^0) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

in an infinity of unknowns (x_k), for which the series

$$(2^0) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}^2| \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

all converge. It will be shown that, when classes of functions are suitably defined, an equivalence exists between the theory of such classes and a part of the Schmidt theory. In the last section an extension is given of a theorem of Carleman[4]); here use is made of some of the results in the theory of discontinuous Dirichlet Problems.

---

[1]) T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques, Paris, 1926, hereafter referred to as (*C*).

[2]) W. J. Trjitzinsky, On quasi-analytic functions, Annals of Math., 1929, pp. 526—546; A study of indefinitely differentiable and quasi-analytic functions, Part I, Annals of Math., 1931, pp. 623—658; Part II, Annals of Math., 1931, pp. 659—685. These papers will be referred to as (*T*), (T_1) and (T_2), respectively.

[3]) E. Schmidt, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XXV, 1908, pp. 53—77, in the sequel referred to as (*S*).

[4]) (C; 99—100). This theorem is the only important one of its type.

1. On the system (1⁰). The following known facts (mostly from (*S*)), necessary for our purposes, will be briefly stated. Suppose that no linear relations with constant coefficients subsist between any finite number of the left members of the system (1⁰). It is known that

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \tag{1}$$

cannot converge for every (x_k), such $\sum |x_k^2|$ converges, unless $\sum |a_k^2|$ converges. On the other hand, if $\sum |a_k^2|$ converges the series (1) will be absolutely convergent for every (x_k) such that $\sum |x_k^2|$ converges[5]). Assume now that the a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots)$ in (1⁰) are such that the series (2⁰) all converge. Let $\bar{a}$ denote the conjugate of a and let

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{ik} a_{jk} \tag{2}$$

(so that $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$). The extremal solution of (1⁰), where the first n equations only are retained, is given by

$$x_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & c_1 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & c_n \\ \bar{a}_{1k}, & \ldots, & \bar{a}_{nk}, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

This solution, $(x_k^{(n)})$, renders the expression

$$\sum_k |x_k^{(n)}|^2$$

minimum under the conditions that the first n equations of (1⁰) should be satisfied. The value of this minimum may be given as follows:

$$\sum_k |x_k^{(n)}|^2 = M_n(c_1 \ldots c_n) = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & c_1 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & c_n \\ \bar{c}_1, & \ldots, & \bar{c}_n, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} \tag{3a}$$

This sequence of minima satisfies the inequalities

$$M_1(c_1) \leqq M_2(c_1, c_2) \leqq \ldots \tag{4}$$

[5]) Hellinger u. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen (1906), S. 351—355.

The necessary and sufficient condition in order that the system (1⁰) *should admit a solution* (x_k), *such that*

$$\sum |x_k^2| \leqq M, \tag{5}$$

is that

$$M(c_1, c_2, \ldots) = -\lim_n \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & c_1 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & c_n \\ \bar{c}_1, & \ldots, & \bar{c}_n, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} \leqq M. \tag{5a}$$

If (5a) holds,

$$\lim_n x_k^{(n)} = x_k^* \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

in the sense that

$$\lim_n \sum_k |x_k^* - x_k^{(n)}|^2 = 0;$$

(x_k^*) will be the extremal solution of the system (1⁰).

Consider the homogeneous system

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Associated with it is the hermitian

$$H(x; \bar{x}) = \sum_{j,k=1}^{\infty} A_{jk} x_j x_k, \tag{6a}$$

where

$$A_{jk} = -\lim_n \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & a_{1j} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & a_{nj} \\ \bar{a}_{1k}, & \ldots, & \bar{a}_{nk}, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} \tag{6b}$$

For every (x_k)

$$H(x; \bar{x}) \leqq \sum |x_k^2|. \tag{6c}$$

The hermitian $H(x; \bar{x})$ vanishes for every solution (x_k) of (6). Conversely, whenever $H(x; \bar{x}) = 0$ for an (x_k) it follows that (x_k) is a solution of (6). *In order that the system* (6) *should have no solution* (x_k) (*with* $\sum |x_k^2|$ *convergent*), *distinct from* (0), *it is necessary and sufficient that*

$$A_{jj} = 1, \quad A_{jk} = 0 \quad (j \neq k;\ j, k = 1, 2, \ldots). \tag{6d}$$

All the above statements of the Schmidt theory can be made also when the involved numbers are restricted to be real.

2. Quasi-analytic classes of the real variable. Let $\varphi_k(x)\,(k = 1, 2, \ldots)$ be real functions of the real variable, indefinitely differentiable in an interval (a, b) $[a \leqq x \leqq b;\ a < b]$. We consider functions $f(x)$ of the form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \qquad \text{(the } a_k \text{ real)}, \tag{1}$$

indefinitely differentiable in (a, b).

Given a sequence (α_k), of positive numbers, a class $C_\alpha(\varphi)$ will be defined as the totality of functions $f(x)$, of the form (1) *and indefinitely differentiable in (a, b), for which the series*

$$\sum_k \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)^2 \tag{1a}$$

converges.

From (1) it follows formally that

$$f^{(\nu)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k^{(\nu)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)(\alpha_k \varphi_k^{(\nu)}(x)) \tag{1b}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hence convergence on (a, b) of all the series (1b), for every set (a_k) such that (1a) converges, necessitates convergence, for all x in (a, b), of the series[6])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \varphi_k^{(\nu)2}(x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{1c}$$

Consequently, classes $C_\alpha(\varphi)$ can be formed only corresponding to sequences of functions $(\varphi_k(x))$ which are such that there exist some sequences (α_k) (of positive numbers) for which the series (1c) all converge in (a, b). Also it is noted that, inasmuch as $f(x)$ belongs to $C_\alpha(\varphi)$, the series (1b) are all absolutely convergent in (a, b).

Any class $C_\alpha(\varphi)$ is additive. In fact, let

$$a(x) = \sum_k a_k \varphi_k(x), \quad b(x) = \sum_k b_k \varphi_k(x)$$

be functions of class $C_\alpha(\varphi)$; let

$$S_a^2 = \sum \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)^2, \qquad S_b^2 = \sum \left(\frac{b_k}{\alpha_k}\right)^2.$$

Then, in virtue of the inequality

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k + B_k|^2\right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k^2|\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |B_k^2|\right)^{1/2} \tag{2}$$

(which is valid whenever the series in the last member converge) it follows that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k \pm b_k}{\alpha_k}\right)^2 \leqq (S_a + S_b)^2; \tag{2a}$$

[6]) This is a consequence of the quoted result of Hellinger and Toeplitz, loc. cit.

the latter inequality, however, implies that the functions

$$a(x) \pm b(x) = \sum_k (a_k \pm b_k)\, \varphi_k(x)$$

belong to $C_\alpha(\varphi)$.

With Carleman (cf. (C)), *define classes* C_A *by the inequalities*

$$|f^{(\nu)}(x)| \leqq h^\nu A_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots;\ a \leqq x \leqq b;\ a < b),$$

where the A_ν are independent of x and h is independent of ν and x, but may depend on the function $f(x)$.

Every class $C_\alpha(\varphi)$ *is a subclass of the class* C_A *defined by a sequence* $A_\nu [= A_\nu(\alpha);\ \nu = 0, 1, \ldots]$, *where* $A_\nu(\alpha)$ *is the upper bound on* (a, b) *of*

$$\Big(\sum_k \alpha_k^2\, \varphi_k^{(\nu)\,2}(x)\Big)^{1/2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

To demonstrate this statement use will be made of a special form of Hölders inequality[7]),

$$|\sum_{k=1}^{n} B_k C_k|^2 \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} |B_k^2|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} |C_k^2|\Big). \tag{3}$$

Consider $f(x)$, as given by (1) and belonging to $C_\alpha(\varphi)$. Writing

$$B_k = \frac{a_k}{\alpha_k}, \quad C_k = \alpha_k\, \varphi_k^{(\nu)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

from (1b) by application of (3) we get

$$f^{(\nu)\,2}(x) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{a_k}{\alpha_k}\Big)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2\, \varphi_k^{(\nu)\,2}(x).$$

Thus

$$|f^{(\nu)}(x)| \leqq h\, A_\nu(\alpha) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots;\ a \leqq x \leqq b)$$

By a theorem of Carleman (C; 61) it follows that a class is quasi-analytic if the integral

$$\int_0^\infty \log\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu}}{A_\nu^2(\alpha)}\Big) \frac{dr}{r^2}$$

diverges. There is no difficulty to show that quasi-analytic classes $C_\alpha(\varphi)$ exist.

A class $C_\alpha(\varphi)$ will be said to be quasi-analytic in G, a subset of (a, b), if every $f(x)$ of $C_\alpha(\varphi)$ with

$$f^{(\nu)}(x_0) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots;\ \text{any } x_0 \text{ in } G)$$

is identically zero in (a, b). Carleman, for instance, established necessary and sufficient conditions on the α_k under which the indefinitely differentiable class of functions of the form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\, k x \qquad (|a_k| < A\, \alpha_k)$$

---

[7]) Hölder, Über einen Mittelwertsatz, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, 1889, S. 38—47.

is quasi-analytic (in the sense just given) at $x = 0$[8]). Results of similar nature were obtained by the present author for certain more general series[9]).

A class $C_a(\varphi)$ is not quasi-analytic in (a, b) (at $x = x_0$) if there exists a function $f(x)$, of $C_a(\varphi)$, such that

$$f^{(\nu)}(x_0) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

while $f(x) \not\equiv 0$. The following definition will be introduced.

Definition 1. *A class $C_a(\varphi)$ will be said to be minimal if it contains no function*

$$f(x) = \sum a_k \varphi_k(x) \qquad [(a_k) \neq (0)^{10})$$

which is identically zero.

An example of a minimal class $C_a(\varphi)$ is furnished by any class $C_a(\varphi)$ formed with

$$(\varphi_k(x)) = (\cos(k-1)x).$$

Consider the equations (the a_k being the unknowns)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k^{(i)}(x_0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots;\ a \leqq x_0 \leqq b). \tag{4}$$

Let indices $n_i (n_1 < n_2 < \ldots;\ n_i = n_i(x_0))$ be characterised by the fact that the system

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k^{(n_i)}(x_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{4a}$$

consists of all those equations (4) whose left members are linearly independent. A set of such indices (n_i) may change with x_0. The following theorem will be now proved.

Theorem 1. *For quasi-analyticity at x_0 of a minimal class $C_a(\varphi)$ it is necessary and sufficient that*

$$A_{i,j}(x_0) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{5}$$

for $i, j = 1, 2, \ldots$. Here

$$A_{jk}(x_0) = -\lim_n \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & a_{1j} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & a_{nj} \\ a_{1k}, & \ldots, & a_{nk}, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{5a}$$

[8]) Cf. (C; 95). Certain results concerning indefinitely diferentiable trigonometric classes are also established by N. Wiener, Note on quasi-analytic functions, Journ. of Math. and Physics, Vol. IV No. 4, July, 1925; pp. 193—199.

[9]) Cf. (T_2).

[10]) The notation $(a_k) \neq (0)$ is to mean that not all the $a_k (k = 1, 2, \ldots)$ are zero.

where

$$a_{ij} = a_{ij}(x_0) = \alpha_j \varphi_j^{(n_i(x_0))}(x_0), \tag{5b}$$

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \varphi_k^{(n_i(x_0))}(x_0)\, \varphi_k^{(n_j(x_0))}(x_0). \tag{5c}$$

If $(\varphi_k(x))$ *is not necessarily minimal* (5) *continues to be a sufficient condition for quasi-analyticity of* $C_\alpha(\varphi)$ *at* x_0.

Suppose first that $C_\alpha(\varphi)$ is quasi-analytic at x_0 and is a minimal class. Then the system

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(x_0)\, x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{5d}$$

where the $a_{ik}(x_0)$ are given by (5b), has no solution (x_k) such that

$$\sum x_k^2 \tag{6}$$

converges, while $(x_k) \neq (0)$. In fact, if (x_k) were such a solution, the function

$$f(x) = \sum a_k \varphi_k(x) \qquad (a_k = x_k \alpha_k) \tag{6a}$$

would be of class $C_\alpha(\varphi)$ and would be not identically zero; on the other hand, the equations (5d) would imply that $f^{(i)}(x_0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ and the class $C_\alpha(\varphi)$, contrary to the hypothesis, would be not quasi-analytic. The system (5d) is of the type to which the results in (S) apply, as the series

$$\sum_k a_{ik}^2(x_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{6b}$$

all converge in virtue of the convergence of the series (1c). Accordingly, the condition (5) is seen to be necessary for quasi-analyticity of $C_\alpha(\varphi)$ at x_0.

Let $C_\alpha(\varphi)$ be not necessarily a minimal class and assume that (5) holds. Then the system (5d) has no solution (x_k) such that (6) converges while $(x_k) \neq (0)$. Now, if there existed a function

$$f(x) = \sum a_k \varphi_k(x) \qquad (a_k = x_k \alpha_k) \tag{6c}$$

with

$$\sum \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)^2 = \sum x_k^2$$

convergent (that is, belonging to $C_\alpha(\varphi)$), such that $f(x) \not\equiv 0$ (that is, with $(a_k) \neq (0)$) and such that

$$f^{(i)}(x_0) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

the assertion concerning solutions of (5d) would be contradicted. Hence in $C_\alpha(\varphi)$ there exists no $f(x)$ such as (6c). Therefore $C_\alpha(\varphi)$ will be a class quasi-analytic at x_0. This completes the proof of the theorem.

Let $(b_{1k}(x_0))$ be a set of real numbers such that

$$\sum_k b_{1k}^2(x_0) \tag{6d}$$

converges and such that

(6e) $$\sum_k b_{1k}(x_0)\, x_k$$

is not a linear combination of a finite number of the left members of the equations (5d). To the system (5d) adjoin the equation

(7) $$\sum_k b_{1k}(x_0)\, x_k = 1.$$

Let

(7a) $$\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}(x_0)\, x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

where

(7b) $$b_{ik}(x_0) = a_{i-1,k}(x_0) = \alpha_k \varphi_k^{(n_{i-1}(x_0))}(x_0)$$

$$[i = 2, 3, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots; \quad c_1 = 1; \quad c_i = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots)]$$

be the resulting system. The Schmidt theory will be applicable. The function $M_n(c_1 \ldots c_n)$ (cf. § 1), corresponding to the system (7a), will be given by

(7c) $$M_n(c_1 \ldots c_n) = p_n(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{2,2}, & \ldots, & \beta_{n,2} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \beta_{2,n}, & \ldots, & \beta_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{1,1}, & \ldots, & \beta_{n,1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \beta_{1,n}, & \ldots, & \beta_{n,n} \end{vmatrix}}$$

where

(7d) $$\beta_{ij} = \beta_{ij}(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \varphi_k^{(n_{i-1}(x_0))}(x_0)\, \varphi_k^{(n_{j-1}(x_0))}(x_0)$$

$$\left[\varphi_k^{(n_0(x_0))}(x_0) = \frac{b_{1k}(x_0)}{\alpha_k}\right].$$

A set of values $(b_{1k}(x_0))$ will be said to be *admissible* if (6d) converges and if the expression (6e) is not a linear combination, with constant coefficients, of any finite number of the expressions

$$\sum_k b_{ik}(x_0)\, x_k \qquad (i = 2, 3, \ldots).$$

The following theorem will be now proved.

Theorem 2. *For quasi-analyticity at x_0 of a minimal class $C_a(\varphi)$ it is necessary and sufficient that for every admissible set $(b_{1k}(x_0))$ the sequence $(p_n(x_0))$, as defined by* (7c) *and* (7d), *be unbounded. The sufficient part of the theorem continues to hold for all classes $C_a(\varphi)$.*

This can be demonstrated as follows. If a minimal class $C_a(\varphi)$ is quasi-analytic at x_0 then no system (7a), formed with an admissible $(b_{1k}(x_0))$ can have a solution $(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$ such that $\sum x_k^2$ converges. For,

if such a solution (x_k) of a system (7a) existed, the corresponding function

$$f(x) = \sum a_k \varphi_k(x) \tag{8}$$

would be of class $C_a(\varphi)$ and $f^{(i)}(x_0) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$; on the other hand, in view of (7), $(a_k) \neq (0)$ and consequently

$$f(x) \not\equiv 0.$$

Thus $C_a(\varphi)$ could not be quasi-analytic at x_0. Hence every system (7a), formed with an admissible $(b_{1k}(x_0))$ has no solution of the stated type. The sequences $(p_n(x_0))$ corresponding to these systems will be all unbounded.

Suppose that the sequence $(p_n(x_0))$ is unbounded for every admissible set $(b_{1k}(x_0))$. Then no system (7a), formed with an admissible $(b_{1k}(x_0))$, can heve a solution (x_k) such that $\sum x_k^2$ converges. The theorem will be proved if it is demonstrated that there exists no function (8) belonging to $C_a(\varphi)$ such that $f^{(i)}(x_0) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$ and which is not identically zero. In fact, if such a function existed the equations (7a). with (7) deleted, would posses a solution $(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$ such that $\sum x_k^2$ converges. Now, since $(x_k) \neq (0)$, there exists an admissible set $(b_{1k}(x_0))$ such that

$$\sum b_{1k}(x_0)\, x_k = 1.$$

The system (7a), with these $b_{1k}(x_0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ involved in the first equation, will accordingly have (x_k) for a solution such that $\sum x_k^2$ converges. The corresponding sequence $(p_n(x_0))$ would have to be bounded, contrary to the hypothesis. This completes the proof of the theorem.

A fundamental question with respect to classes $C_a(\varphi)$ is the following. What are the necessary and the sufficient conditions on the numbers c_k $(k = 1, 2, \ldots)$ in order that there should exist a function $f(x)$, of the class $C_a(\varphi)$, such that

$$f^{(i-1)}(x_0) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Suppose there exists a function

$$f(x) = \sum a_k \varphi_k(x)$$

of $C_a(\varphi)$ such that $f^{(i-1)}(x_0) = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Then the equations

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(x_0)\, x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

where the left members are the same as in (5d), will posses a solution

$$(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$$

such that Σx_k^2 converges. Hence the sequence

(9a) $$(M_n(c_1 \dots c_n))$$

will be bounded. Here

(9b) $$M(c_1 \dots c_n) = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \dots, & \alpha_{n1}, & c_1 \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ \alpha_{1n}, & \dots, & \alpha_{nn}, & c_n \\ c_1, & \dots, & c_n, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \dots, & \alpha_{n1} \\ \dots, & \dots, & \dots \\ \alpha_{1n}, & \dots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} = \sum_{r,s=1}^{n} q_{r,s}^{(n)} c_r c_s,$$

where

(9c) $$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(x_0)\, a_{jk}(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2\, \varphi_k^{(n_i(x_0))}(x_0)\, \varphi_k^{(n_j(x_0))}(x_0). \end{aligned}$$

Conversely, suppose that the sequence (9a), defined by (9b) and (9c), is bounded. Then the equations (9) will posses a solution $(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$ such that Σx_k^2 converges. The corresponding function

$$f(x) = \Sigma a_k \varphi_k(x)$$

will be of class $C_a(\varphi)$ (in the interval (a, b)); moreover, we shall have $f^{(i-1)}(x_0) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots)$.

We are now in a position to formulate the following theorem.

Theorem 3. *In order that there should exist a function $f(x)$ of the class $C_a(\varphi)$ such that*

$$f^{(i-1)}(x_0) = c_i \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

the necessary and sufficient condition on the c_i $(i = 1, 2, \dots)$ is that the sequence

(9d) $$\sum_{r,s=1}^{\infty} q_{r,s}^{(n)} c_r c_s \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

(cf. (9b), (9c)) be bounded.

Suppose that the sequence (9d), formed for a given class $C_a(\varphi)$ and a fixed x_0, is bounded. The totality of functions $f(x)$ of $C_a(\varphi)$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

such that $f^{(i-1)}(x_0) = c_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ will contain at least one member. The totality of the sets of coefficients (a_k), corresponding to this totality of functions, is found amongst the set of all solutions of (9). The

Schmidt theory supplies a particularly simple way for construction of the particular solution $(x_k^*) = \left(\frac{a_k^*}{\alpha_k}\right)$ for which

$$\sum \left(\frac{a_k^*}{\alpha_k}\right)^2$$

is minimum (cf. § 1). This solution is unique. The corresponding function

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \varphi_k(x) \qquad (f^{(i-1)}(x_0) = c_i;\ i = 1, 2, \ldots)$$

could be termed an extremal function of $C_a(\varphi)$.

3. Quasi-analytic classes of the complex variable. While the methods of Carleman are peculiarly adapted to trigonometric classes, they are not conveniently extensible to classes of functions of the complex variable; on the other hand, the methods of the preceding section can be so extended. In this connection it should be mentioned that quasi-analytic functions of the complex variable were discovered and considered for the first time by É. Borel[11]). His monogenic functions — we shall call them Borel monogenic functions — form a special class of quasi-analytic functions of a complex variable. The theory of Borel monogenic functions has been extended by the present author[12]) on the basis of certain generalized Cauchy formulas established by Borel. Our present point of view will be more general.

Let the functions $p_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *be uniform functions of the complex variable* x. We may have, for instance,

$$p_k(x) = \frac{1}{(x - \gamma_{n(k)})^{m(k)}}, \tag{1}$$

where $m(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ is a positive integer and the $\gamma_{n(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ may be dense in parts or in the whole of the complex plane. In the definition about to be given another property of the sequence $(p_k(x))$ will be implied.

Definition 2. *Given a sequence* (α_k), *of positive numbers, and a sequence* $(p_k)(x))$, *of uniform functions, a class* $K_a(p)$ *will be defined as the totality of functions* $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k(x) \qquad (a_k \text{ real or complex}), \tag{2}$$

with the following properties. The series

$$\Gamma^2(a; \alpha) = \sum \left|\frac{a_k}{\alpha_k}\right|^2 \tag{2a}$$

---

[11]) É. Borel, Leçons sur les fonctions monogènes ..., Paris, 1917.

[12]) Cf. (T) and (T_1).

converges. There exists a perfect set $W(\alpha; p)$, *depending only on the sequences* (α_k) *and* $(p_k(x))$, *such that the series*

$$f^{(\nu)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k^{(\nu)}(x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{2b}$$

are all convergent in $W(\alpha; p)$.

It is clear that, whenever a class $K_a(p)$ is defined as above over a perfect set $W(\alpha; p)$, the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^2 p_k^{(\nu)2}(x)| \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

will all converge in $W(\alpha; p)$ (cf. beginning of § 1). Hence, by the same statement of § 1, it follows that the series representing a function of $K_a(p)$, as well as all the various series of the derivatives, are absolutely convergent in $W(\alpha; p)$.

It is clear also that, whenever a sequence of functions $(p_k(x))$, is to be used in constructing a class $K_a(p)$ these functions are to be such that there exists a sequence (α_k) and a perfect set $W(\alpha; p)$ so that the series (3) all converge in $W(\alpha; p)$. This is implied in the above definition.

In the case of (1) we may have a class $K_a(p)$ of functions of the form (2),

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(x - \gamma_{n(k)})^{m(k)}} = \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{a_{n, m}}{(x - \gamma_n)^m}. \tag{4}$$

These classes are of interest because, as shown by the author[13]) every Borel monogenic function is representable, except for an additive analytic function, by a series

$$\sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{a_{n, m}}{(x - \gamma_n)^m}; \tag{4a}$$

this series being absolutely convergent over a perfect subset. It is also of interest to note that this set $W(\alpha; p)$ may be non dense (discontinuous, in the terminology of Borel) in parts or in the whole of the complex plane. Conversely, as shown by the present author (T_1; 644), given series of the form (4a), Borel monogenuity (in a perfect set) of the functions represented by such series will be secured under certain sufficient conditions on the $|a_{n, m}|$. Whenever, in considering a class $K_a(p)$ of functions of the form (4), we secure quasi-analyticity in a perfect set $W(\alpha; p)$, it is possible at the same time to effect the construction of such a class $K_a(p)$ so as to actually secure non-analyticity in $W(\alpha; p)$ of at least some members of the class.

[13]) Cf. (T_1; 642).

The classes $K_\alpha(p)$ are additive. It is observed also that, in view of Hölders inequality;

$$\left|\sum_k a_k p_k^{(\nu)}(x)\right|^2 = \left|\sum_k \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)(\alpha_k p_k^{(\nu)}(x))\right|^2$$

$$\leqq \sum_k \left|\frac{a_k}{\alpha_k}\right|^2 \sum_k \left|\alpha_k^2 p_k^{(\nu)2}(x)\right| \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

in $W(\alpha; p)$, whenever

$$f(x) = \Gamma a_k p_k(x) \tag{5}$$

is of $K_\alpha(p)$. Thus, *for every function* (5) *of* $K_\alpha(p)$ *the following inequalities will hold in* $W(\alpha; p)$:

$$|f^{(\nu)}(x)| \leqq \Sigma(a; \alpha) A_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

where A_ν^2 *is the upper bound in* $W(\alpha; p)$ *of the function defined by* (3) $(\nu = 0, 1, \ldots)$.

Definition 3. *A class* $K_\alpha(p)$ *will be said to be minimal in* $W(\alpha; p)$ *if it is defined in* $W(\alpha; p)$ *and if it contains no function*

$$f(x) = \Sigma a_k p_k(x) \qquad [(a_k) \neq (0)]$$

which is zero throughout $W(\alpha; p)$.

Examples of minimal classes $K_\alpha(p)$ may be constructed as follows. Let β_k $(k = 1, 2, \ldots)$ be a denumerable set in a finite part of the complex plane. Associated with β_k let there be a circle C_k.

$$|x - \beta_k| = r_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Let these circles have no points in common. Denote by R a simple closed curve containing all the C_k and having no points in common with these circles. Let C denote the set of points obtained by deleting the interiors of all the C_k from the closed region bounded by R. The set C will be perfect. Its frontier will consist of R and of the circumferences of all those circles $C_{g(k)}$,

$$|x - \gamma_k| = \varrho_k \quad [\gamma_k = \beta_{g(k)}; \quad \varrho_k = r_{g(k)}; \quad k = 1, 2, \ldots], \tag{6a}$$

which are exterior to each other. This construction can be so effected that the measure of C is as near as desired to the area enclosed by R and also so that C is non dense (discontinuous [14]) in parts of or throughout the region.

---

[14]) The expressions 'non dense in G' or 'discontinuous in G' here imply that there exists no circle, with a point of C for center, all of whose interior points are points of C.

Classes $K_\alpha(p)$ of functions of the form (4) (*where γ_k has the same meaning as in* (6a)) *can be defined*[15]) *over $W(\alpha; p) = C$, under the assumption that the series*

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n,m}^2 [m \dots (m+\nu-1)]^2}{\varrho_n^{2(m+\nu)}} \qquad (\nu = 0, 1, \dots) \tag{6b}$$

all converge. Such classes are minimal in C.

In fact, under the stated conditions, the series for $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 0, 1, \dots)$ are all convergent in C so that C could be taken for $W(\alpha; p)$. This is a consequence of an application of Hölders inequality; we have, for x in C,

$$|f^{(\nu)}(x)|^2 = \left| \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n,m}}{\alpha_{n,m}}\right) \left(\frac{\alpha_{n,m}\, m \dots (m+\nu-1)}{(x-\gamma_n)^{m+\nu}}\right) \right|^2$$

$$\leqq \sum_{n,m=1}^{\infty} \left|\frac{a_{n,m}}{\alpha_{n,m}}\right|^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n,m}^2 [m \dots (m+\nu-1)]^2}{\varrho_n^{2(m+\nu)}}$$

$$(\nu = 0, 1, \dots),$$

the two series in the last member being convergent by hypothesis. The series for $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 0, 1, \dots)$ will be absolutely convergent in C. Let $f(x)$, as represented by (4), belong to such a class $K_\alpha(p)$ defined over C. The coefficients $a_{n,m}$ of $f(x)$ are seen to be expressible by the integrals

$$a_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{g(n)}} f(z)(z-\gamma_n)^{m-1}\, dz \qquad (n, m = 1, 2, \dots). \tag{6c}$$

It follows, in consequence of these integrals, that whenever $f(z)$, of $K_\alpha(p)$, is zero in C (or even only on the circumferences $C_{g(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ all the $a_{n,m}$ $(n, m = 1, 2, \dots)$ will be zero. Thus $K_\alpha(p)$ is seen to be minimal throughout C. This completes the demonstration of the preceding statement in italics.

Consider the equations

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k^{(i)}(x_0) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots;\ x_0 \text{ in } W(\alpha; p)). \tag{7}$$

Let indices n_i $(n_1 < n_2 < \dots;\quad n_i = n_i(x_0))$ be characterized by the fact that the system

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k^{(n_i(x_0))}(x_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots) \tag{7a}$$

---

[15]) A class $K_\alpha(p)$ is specified by the convergence of the series $\sum \left|\frac{a_{n,m}}{\alpha_{n,m}}\right|^2$.

consists of all those equations of (7) whose left members are linearly independent (analogous to the corresponding systems of § 2).

A class $K_\alpha(p)$ will be said to be quasi-analytic at x_0, a point of $W(\alpha; p)$, if there exists no function $f(x)$ of $K_\alpha(p)$ such that

$$f^{(\nu)}(x_0) = 0 \qquad (\nu = 0, 1 \ldots),$$

while $f(x) \not\equiv 0$. A class $K_\alpha(p)$ will be said to be quasi-analytic in $W(\alpha; p)$ if it is quasi-analytic at every point of $W(\alpha; p)$. The following theorem will be now proved.

Theorem 4. *In order that a class $K_\alpha(p)$, minimal in $W(\alpha; p)$, be quasi-analytic at x_0 (a point of $W(\alpha; p)$) it is necessary and sufficient that*

$$A_{ij}(x_0) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{8}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots).$$

Here

$$A_{jk} = \lim_n \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & a_{1j} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & \alpha_{nj} \\ \bar{a}_{1k}, & \ldots, & \bar{a}_{nk}, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{8a}$$

where

$$a_{ij} = a_{ij}(x_0) = \alpha_j p_j^{(n_i(x_0))}(x_0) \tag{8b}$$

and[16])

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \bar{p}_k^{(n_i(x_0))}(x_0)\, p_k^{(n_j(x_0))}(x_0). \tag{8c}$$

The above condition continues to be sufficient also when $K_\alpha(p)$ is not restricted to be minimal.

To demonstrate this the system (7a) will be written in the form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(x_0)\, x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

where $(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$. The series

$$\sum_k |a_{ik}(x_0)|^2 = \sum_k |\alpha_k p_k^{(n_i(x_0))}(x_0)|^2 \qquad (i = 1, 2. \ldots)$$

all converge in virtue of the statement immediately following Definition 2. Thus the Schmidt theory is applicable to the system (9). Suppose $K_\alpha(p)$ is minimal in $W(\alpha; p)$ and is quasi-analytic at x_0 (in $W(\alpha; p)$).

[16]) The α_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots)$ of (8c) should not be confused with the α_{ij} of (6b).

Then the system (9) has no solution (x_k) such that $\Sigma|x_k|^2$ converges, while $(x_k) \neq (0)$. For, if (x_k) were such a solution, the function

$$f(x) = \sum_k a_k p_k(x) \qquad (a_k = x_k \alpha_k) \tag{9a}$$

would be of $K_\alpha(p)$; on the other hand, we would have

$$f^{(\nu)}(x_0) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

while $(a_k) \neq (0)$. As $K_\alpha(p)$ is quasi-analytic at x_0 it would follow that

$$\Sigma a_k p_k(x) \equiv 0 \qquad [(a_k) \neq (0)],$$

which is a contradiction to the assumption that $K_\alpha(p)$ is a minimal class. Then, as (9) is seen to have no solution (x_k), such that $\Sigma|x_k^3|$ converges while $(x_k) \neq (0)$, the condition (8) of the Theorem will at once follow.

Let $K_\alpha(p)$ be not necessarily a minimal class. Assume now that (8) holds. Then equations (9) will have no solution (x_k), distinct from (0), such that $\Sigma|x_k^3|$ converges. Then there will exist no function

$$f(x) = \sum_k a_k p_k(x),$$

of $K_\alpha(p)$, such that $f(x) \not\equiv 0$ and $f^{(\nu)}(x_0) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$. In fact, in the contrary case the system (9) would be satisfied by a solution $(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right) \neq (0)$ such that $\Sigma|x_k^3|$ converges. Thus a contradiction arises and the theorem is consequently proved.

Let $(b_{1k}(x_0))$ be called an *admissible* set of numbers if $\Sigma|b_{1k}(x_0)|^2$ converges and if $\Sigma b_{1k} x_k$ is not a linear combination of a finite number of the left members of (9). Consider the system

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}(x_0)\, x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

where

$$b_{ik}(x_0) = a_{i-1,k}(x_0) = \alpha_k p_k^{(n_{i-1}(x_0))}(x_0) \tag{10a}$$
$$[i = 2, 3, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots; \quad c_1 = 1; \quad c_i = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots)]$$

and the $(b_{1k}(x_0))$ form an admissible set. The functions $M_n(c_1 \ldots c_n)$ (cf. § 1), corresponding to the system (10), will be

$$M_n(c_1 \ldots c_n) = \varrho_n(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{22}, & \ldots, & \beta_{n2} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \beta_{2n}, & \ldots, & \beta_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11}, & \ldots, & \beta_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \beta_{1n}, & \ldots, & \beta_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{10b}$$

where

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \, \overline{p}_k^{(n_{i-1}(x_0))}(x_0) \, p_k^{(n_{j-1}(x_0))}(x_0)$$

(10c)

$$\left[p_k^{(n_0)}(x_0) = \frac{b_{1k}(x_0)}{\alpha_k}; \quad k = 1, 2, \ldots\right].$$

Theorem 5. *In order that a class $K_\alpha(p)$, minimal over $W(\alpha; p)$, be quasi-analytic at x_0 (a point of $W(\alpha; p)$) it is necessary and sufficient that for every admissible set $(b_{1k}(x_0))$ the sequence $(\varrho_n(x_0))$, as defined by* (10b) *and* (10c), *be bounded. The sufficient part of the theorem continues to hold for all classes $K_\alpha(p)$.*

The proof of the above is analogous to that of Theorem 2.

Theorem 6. *In order that there should exist a function $f(x)$ of the class $K_\alpha(p)$, devined over $W(\alpha; p)$, such that*

$$f^{(i-1)}(x_0) = c_i \quad [i = 1, 2, \ldots; \; x_0 \text{ in } W(\alpha; p)] \tag{11}$$

the necessary and sufficient condition on the $c_i (i = 1, 2, \ldots)$ is that the sequence

$$\sum_{r,s=1}^{n} q_{r,s}^{(n)} \, \overline{c}_r \, c_s \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{11a}$$

be bounded. Here

$$\sum_{r,s=1}^{n} q_{r,s}^{(n)} \, \overline{c}_r \, c_s = - \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & c_1 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & c_n \\ \overline{c}_1, & \ldots, & \overline{c}_n, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{11b}$$

where

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \, \overline{p}_k^{(n_i(x_0))}(x_0) \, p_k^{(n_j(x_0))}(x_0). \tag{11c}$$

In fact, suppose that there exists a function

$$f(x) = \sum a_k p_k(x) \tag{12}$$

of $K_\alpha(p)$ which is such that (11) holds. Then the system

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(x_0) \, x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{12a}$$

where the left members are the same as in (9) and to which the Schmidt theory applies, will have a solution $(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$. Consequently the sequence (11b) will be bounded.

Conversely, if the sequence of expressions (11 b), formed for x_0 in $W(\alpha; p)$ is bounded, the equations (12 a) will have a solution $(x_k = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$ with $\Sigma |x_k^2|$ convergent. The corresponding function $f(x)$, as given by (12) with $(a_k) = (x_k \alpha_k)$, will be of class $K_\alpha(p)$; moreover, we shall have $f^{(i-1)}(x_0) = c_i (i = 1, 2, \ldots)$. Thus the theorem is demonstrated.

Suppose that a class $K_\alpha(p)$ is given and that the sequence (11 b) is bounded for a fixed x_0, in $W(\alpha; p)$, and a given sequence of constants $c_i (i = 1, 2, \ldots)$. Consider the totality of functions of $K_\alpha(p)$,

$$f(x) = \sum_k a_k p_k(x),$$

for which $f^{(i-1)}(x) = c_i (i = 1, 2, \ldots)$. Amongst these functions there will be a unique extremal function which will be characterized by the fact that its coefficients render

$$\sum \left| \frac{a_k}{\alpha_k} \right|^2$$

a minimum under the condition that the $a_k (k = 1, 2, \ldots)$ are restricted to be the coefficients of the above totality of functions. (Of course, an extremal function might conceivably be represented by more than one series; the coefficients of one, and only one, of these series will minimize the above expression). The coefficients of an extremal function can be easily computed as limits of ratios of certain determinants (cf. § 1).

4. D-analytic classes. The quasi-analitic classes, which have been considered in sections 2 and 3, have a certain property in common with the class of analytic functions: just as analytic functions, the members of a quasi-analytic class are uniquely determined throughout the region of definition by the values of the derivatives, of all orders[17]), at a point of the region of definition.

Now, it is a well known property of analytic functions that the values at a denumerable set of points (z_i) determine an analytic function (if there exists an analytic function with such values) uniquely, provided that there is at least one limiting point of (z_i) which is in the region of analyticity. The purpose of this section is to give an extension, of the class of analytic functions, based on the above property of analytic functions.

Throughout this section the expression 'point (z_i)' will be used in the sense: 'denumerable set of points $z_1, z_2, \ldots$.

---

[17]) $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Definition 4. *A class D will be termed D-analytic at a point* (z_i) *of a perfect bounded*[18]) *set W if there exist no two functions* $f(x)$ *and* $g(x)$, *of D, such that*

$$f(z_i) = g(z_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

while

$$f(z) \not\equiv g(z). \tag{1a}$$

A class D will be said to be D-analytic in a perfect bounded set W if it is D-analytic at every point (z_i) *in W.*

Until stated otherwise, it will be now assumed that W consists of an interval (a, b) and that all the involved functions, variables and constants are real.

Definition 5. *Let* $(\varphi_k(x))$ *denote a sequence of functions each bounded and defined on* (a, b). *Let* (α_k) *be a sequence of positive numbers. A class* $D_\alpha(\varphi)$ *is then defined as the totality of functions*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \tag{2}$$

defined on (a, b), *for which*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)^2 \tag{2a}$$

converges.

The implication of the definition of a class $D_\alpha(\varphi)$ is that, inasmuch as the series (2) represent functions of $D_\alpha(\varphi)$, the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \varphi_k(x)) x_k \qquad \left[(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)\right]$$

will converge in (a, b) for every (x_k) such that $\sum x_k^2$ converges. In view of the statement at the beginning of § 1 it follows that whenever (α_k) is used to construct a class $D_\alpha(\varphi)$, the series

$$\sum_k \alpha_k^2 \varphi_k^2(x) \tag{3}$$

converges in (a, b). Incidentally, it is seen that a series (2), representing a function of a class $D_\alpha(\varphi)$, is necessarily absolutely convergent in (a, b).

Definition 6. *A class* $D_\alpha(\varphi)$ *is minimal in* (a, b) *if there exists no function of* $D_\alpha(\varphi)$,

$$f(x) = \sum a_k \varphi_k(x) \qquad ((a_k) \neq (0)),$$

which is identically zero.

Every class $D_\alpha(\varphi)$, formed with $(\varphi_k(x)) = (\cos(k-1)x)$ is minimal.

[18]) Assumption of boundedness is made here only for convenience.

Given a point (z_i) in (a, b), consider the system

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_i)\, a_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Let indices n_i $(n_1 < n_2 < \ldots;\ n_i = n_i(z_1, z_2, \ldots)$ be such that the system

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z_{n_i})\, a_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{4a}$$

consists of all those equations of (4) whose left members are linearly independent.

Theorem 7. *In order that a class $D_\alpha(\varphi)$, minimal in (a, b), should be D-analytic at a point (z_i) in (a, b) it is necessary and sufficient that*

$$A_{i,j}(z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{5}$$

for $i, j = 1, 2, \ldots$ Here

$$A_{jk}(z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots) = -\lim_n \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & a_{1j} \\ \ldots & \ldots, & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & a_{nj} \\ a_{1k}, & \ldots, & a_{nk}, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{5a}$$

$$a_{ij} = \alpha_j\, \varphi_j(z_{n_i}), \tag{5b}$$

$$\alpha_{ij} = \sum_k \alpha_k^2\, \varphi_k(z_{n_i})\, \varphi_k(z_{n_j}).$$

If $D_\alpha(\varphi)$ is not necessarily a minimal class, (5) *continues to be a sufficient condition.*

In proving this theorem use is made of the fact that classes $D_\alpha(\varphi)$ are additive. Suppose now that $D_\alpha(\varphi)$ is minimal and D-analytic at (z_i). The system

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

$$\left[(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right);\ a_{ik} = \alpha_k\, \varphi_k(z_{n_i})\right]$$

will have no solution (x_k) such that Σx_k^2 converges and $(x_k) \neq (0)$. For, if the contrary were the case, the function

$$f(x) = \sum_k \alpha_k\, x_k\, \varphi_k(x) \tag{6a}$$

would be of $D_\alpha(\varphi)$ and would be not identically zero; also

$$f(z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6b}$$

Thus condition (5) will hold.

Conversely, if (5) holds but the class $D_\alpha(\varphi)$ is not necessarily minimal, it will follow that the system (6) has no solution (x_k) such that Σx_k^2 converges while $(x_k) \neq 0$. Consequently, there could exist no function

$$f(x) = \Sigma a_k \varphi_k(x) \qquad (a_k = x_k \alpha_k), \tag{7}$$

of $D_\alpha(\varphi)$, such that $f(x) \not\equiv 0$ and such that (6b) holds. For, if such a function existed, the set $(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$ would be distinct from (0) and at the same time it would be a solution of the system (6). We arrive at a contradiction and so the theorem is proved.

Consider (z_i) fixed in (a, b). To the system (6) adjoin the equation

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} x_k = 1. \tag{8}$$

It will be supposed that the left member of (8) is not a linear combination of a finite number of the left members of (6). Moreover, the series

$$\Sigma b_{1k}^2$$

is to converge. In accordance with sections 2 and 3 such a set (b_{1k}) will be said to be an admissible set (with respect to the point (z_i) and the class $D_\alpha(\varphi)$).

We form the system

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

where $c_1 = 1$ and

$$b_{ik} = \alpha_k \varphi_k(z_{n_{i-1}}), \qquad c_i = 0$$
$$(i = 2, 3, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots).$$

For this system the function $M_n(c_1 \ldots c_n)$ (cf. § 1) will be

$$M_n(c_1 \ldots c_n) = \varrho_n = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{22}, & \ldots, & \beta_{n2} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \beta_{2n}, & \ldots, & \beta_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11}, & \ldots, & \beta_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \beta_{1n}, & \ldots, & \beta_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{9a}$$

where

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \varphi_k(z_{n_{i-1}}) \varphi_k(z_{n_{j-1}}) \qquad \left[\varphi_k(z_{n_0}) = \frac{b_{1k}}{\alpha_k}\right]. \tag{9b}$$

Theorem 8. *In order that a class $D_\alpha(\varphi)$, minimal in (a, b), should be D-analytic at a point (z_i) in (a, b) it is necessary and sufficient that for every set (b_{1k}), admissible with respect to (z_i) and $D_\alpha(\varphi)$, the sequence (ϱ_n) (cf. (9a), (9b)) be unbounded. The sufficient part of the theorem continues to hold for all classes $D_\alpha(\varphi)$.*

In fact, if $D_\alpha(\varphi)$ were minimal in (a, b) and D-analytic at (z_i) and if for an admissible (as stated in the theorem) set (b_{1k}) the system (9) lad a solution $(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)$, there would exist a function $f(x)$ of $D_\alpha(\varphi)$ such that (6b) holds; moreover, in view of the first equation (9) it would follow that $f(x) \not\equiv 0$. Accordingly, on making use of § 1, the necessary part of the theorem is inferred.

Assume now that for every set (b_{1k}), admissible with respect to (z_i) and $D_\alpha(\varphi)$, the sequence (ϱ_n) is unbounded. Then no system (9), formed with an admissible set (b_{1k}), can have a solution such that Σx_k^2 converges. Now, existence of a function $f(x)$of $D_\alpha(\varphi)$ such that $f(z_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ and $f(x) \not\equiv 0$ would imply that there exists a solution

$$(x_k) = \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right) \neq (0)$$

of the set of equations (9), with the first one deleted. For some set (b_{1k}) this solution (x_k) will be also a solution of the corresponding system (9). Then the corresponding sequence (ϱ_n) would be bounded, contrary to the hypothesis.

Necessary and sufficient conditions for D-analyticity in (a, b) of a class $D_\alpha(\varphi)$ can be immediately inferred from either one of the Theorems 8 and 7.

The following theorem will be stated without proof, as it can be derived by a reasoning similar to that employed in establishing Theorem 6.

Theorem 9. *In order that there should exist a function $f(x)$ of the class $D_\alpha(\varphi)$ such that*

$$f(z_i) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

the necessary and sufficient condition on the c_i $(i = 1, 2, \ldots)$ is that the sequence

$$(10)\quad \sum_{r,s=1}^{n} q_{r,s}^{(n)} c_r c_s \left(= -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & c_1 \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & c_n \\ c_1, & \ldots, & c_n, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}; \qquad n = 1, 2, \ldots),$$

(10 a) $$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \, \varphi_k(z_{n_i}) \, \varphi_k(z_{n_j}),$$

be bounded.

If there exists a function $f(x)$ of $D_\alpha(\varphi)$ such that

(11) $$f(z_i) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

the construction of the coefficients (a_k) can be simply effected by solving the system

(11 a) $$\sum_k a_k \varphi_k(z_i) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

for (a_k). We need only to retain all the linearly independent equations and to apply the method of (S). The particular function

$$f(x) = \sum a_k \varphi_k(x),$$

so obtained, would be extremal in the sense that

$$\sum \left(\frac{a_k}{\alpha_k}\right)^2$$

would be minimum under the conditions (11).

We shall now consider D-analytic classes of the complex variable x. It will be supposed that the involved functions and constants may be complex (unless stated otherwise). Let the functions $p_k(x)$ $(K = 1, 2, \ldots)$ be uniform[19]).

Definition 7. *Given a sequence (α_k), of positive numbers, and a sequence $(p_k(x))$, a class $\Delta_\alpha(p)$ will be defined as the totality of functions $f(x)$,*

(12) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k(x),$$

with the following properties. The series

(12a) $$\sum \left|\frac{a_k}{\alpha_k}\right|^2$$

converges. In a perfect bounded set $V(\alpha; p)$, depending only on the sequences (α_k) and $(p_k(x))$, the functions $f(x)$, as defined by the series (12), exist.

Given a class $\Delta_\alpha(p)$, defined in $V(\alpha; p)$, the series

$$\sum \alpha_k^2 \, | p_k^2(x) |$$

will converge in $V(\alpha; p)$. The series (12) will be absolutely convergent in $V(\alpha; p)$. Minimal classes $\Delta_\alpha(p)$ can be defined in a way analogous to the Definition 6.

---

[19]) We may have, for instance, functions like (1) of § 3; or, functions $p_k(x) = x^{k-1}$ could be used.

Theorems 7, 8, 9, which were obtained for D-analytic classes of a real variable, can be extended to the classes $\Delta_a(p)$. The modifications will consist in the following. In the analogue of Theorem 7 the $A_{jk}(jk = 1, 2, \ldots)$ will be of the form

$$-\lim_n \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1}, & a_{1j} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn}, & a_{nj} \\ \bar{a}_{1k}, & \ldots, & \bar{a}_{nk}, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{1n}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}, \qquad \alpha_{ij} = \sum_k \alpha_k^2 \, \overline{p}_k(z_{n_i}) \, p_k(z_{n_j}).$$

In the analogue of Theorem 8

$$\varrho_n = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{22}, & \ldots, & \beta_{n2} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \beta_{2n}, & \ldots, & \beta_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11}, & \ldots, & \beta_{n1} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \beta_{1n}, & \ldots, & \beta_{nn} \end{vmatrix}}, \qquad \beta_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \, \overline{p}_k(z_{n_i-1}) \, p_k(z_{n_j-1}),$$

and the elements of an admissible set (b_{1k}) may be complex. In the analogue of Theorem 9 the sequence to be considered is of the form

$$\sum_{r,s=1}^{n} q_{r,s}^{(n)} \, \bar{c}_r \, c_s \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Note. The results of sections 2, 3 and 4 could be obtained in a different, though equivalent, form if the linear systems, involved in the demonstrations, were all replaced by orthogonal and normal systems.

5. Some intermediate classes. Carleman[20]) and S. Bernstein[21]) (and some others) have considered functions which are uniquely determined, throughout specified regions of definition, by the functional values on an arc or an interval, no matter how small. Classes of functions, with the above property, we shall call *C*-analytic.

Definition 8. *A class M (of functions of a real or of a complex variable) will be said to be M-analytic if the functional values on any set of positive measure, situated on any arc or interval within a suitable region of definition determine a unique function of M.*

In a sense *M*-analytic classes are intermediate to *D*-analytic (cf. § 4) and *C*-analytic classes.

---

[20]) (C; 98—102).

[21]) S. Bernstein, Lecons sur les Propriétés Extrémales . . ., Paris, 1926; especially, pp. 163—175.

Carleman has a very important theorem on C-analytic classes (C; 99—100). He makes the following remarks (C; 99), which will be now stated as they are essential for our purpose. Let $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x), \ldots$ be a sequence of functions uniform interior a domain D. A sequence $(f_\nu(x))$ converges uniformly on almost every circular arc of D if, a being any complex number, the set of values of r for which the sequence does not converge interior to D on the circle $|x-a| = r$ has zero measure. Let E denote the class of limiting functions of sequences $(f_\nu(x))$, convergent on almost every circular arc of D. Let $M(f|A)$ denote the set of points where $|f(x)| \geqq A'$. His theorem in our terminology can be stated as follows:

The limiting functions of sequences $(f_\nu(x))$ of functions uniform in D and converging uniformly on almost every circular arc constitute a C-analytic class[22]) provided the following holds. Given $\epsilon > 0$, every set of points $M(f_\nu|A)$ can be enclosed in a finite number N_ν of circles C_s $(s = 1, \ldots N_\nu)$,

(1) $$|x - \varepsilon_s| = r_s,$$

such that

(2) $$\sum_{s=1}^{N_\nu} \frac{\log\log\frac{l}{r_s}}{\log\frac{l}{r_s}} < \epsilon$$

for $\nu \geqq \nu_0(\epsilon)$ and $A \geqq A_0(\epsilon)$. Here l is a constant greater than e (diameter of D).

The class E itself is not even C-analytic[23]).

We shall prove the following theorem.

Theorem 10. *Under the conditions of the above theorem of Carleman, a class Q, defined as in that theorem, is M-analytic (cf. Definition 10) in the sense of unique determination on almost every circular arc of D.*

The method of proof is along the lines of Carleman's proof. However, it will be necessary first to consider a discontinuous Dirichlet problem.

Let T be a simply connected open region (in the finite plane) whose boundary Γ consists of a finite number of circular arcs. Let g be the Green's function and h its conjugate for T. On a subarc (α, β), interior to one of the arcs of Γ, construct a perfect non-dense[24]) set of points W of positive measure M. In the arc (α, β) we shall have a denumerable infinity of closed circular arcs (Δ_ν), without any common points, such

---

[22]) In the sense of unique determination on almost every circular arc of D.

[23]) This follows from certain examples of Wolff an Denjoy, referred to in (C; 98—99).

[24]) That is, there exists no subarc of (α, β) which consists of points of W only.

that W consists of the end points (interior to (α, β)) of these arcs and of the limiting points of these end points. Let $f(P)$ be defined, for all positions of the point P on Γ, as follvws. For P in W let

$$f(P) = 1;$$

for P in the rest of the boundary Γ let

$$f(P) = 0.$$

Consider the integral (in the sense of Lebesgue)

$$V(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(P)\, d\, h(M, P), \tag{3}$$

where M is a variable point of T and P is a point on Γ. By a theorem of G. C. Evans[25]) *the function $V(M)$, which is harmonic in T, will assume the boundary values $f(P)$ everywhere on Γ except when P is in a set W_0, of measure zero and contained in W*[26]).

The transformation

$$w = F(x) = e^{-g - hi} \tag{4}$$

establishes a one to one and, except for the vertices of Γ, a conformal correspondence, on one hand, between the x-points of T and the w-points of the interior of the unit circle and, on the other hand, between the x-points of Γ and the w-points of the circumference S of the unit circle[27]). By means of (4) we have (3) transformed into a Poisson-Lebesgue integral

$$V_1(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2) f_1(\varphi)\, d\, \varphi}{1 + r^2 - 2 r \cos(\varphi - \Theta)} \tag{5}$$

$$[|w| = r; \quad \text{angle } w = \Theta; \quad r < 1].$$

Let W_1 be the transformation of W. In W_1

$$f_1(\varphi) = 1;$$

in $S - W_1$ we have $f_1(\varphi) = 0$. Now, for $0 \leqq r < 1$,

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2 r \cos(\varphi - \Theta)} > 0.$$

Hence interior the unit circle

$$0 \leqq V_1(r, \Theta). \tag{5a}$$

---

[25]) G. C. Evans, The Logarithmic Potential, Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems, New York, 1927. The theorem in question is Theorem 5 on p. 80. The material pertaining to it is on pp. 71—80. This book will be referred to as (E).

[26]) Every point of Γ, not in W, is an interior point of a circular subarc (of Γ) throughout which $f(P) = 0$; that is, in the vicinity of every such point we have a continuous boundary value problem.

[27]) (E; 71).

On the other hand, for $0 \leqq r < 1$,

$$(5b) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\,f_1(\varphi)\,d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\Theta)} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\,d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\Theta)} = 1.$$

Thus interior the unit circle

$$(5c) \qquad 0 \leqq V_1 \leqq 1.$$

The values of V_1 interior the unit circle are the same as those of V in T. Hence, from (5c), it follows that

$$(5d) \qquad 0 \leqq V(M) \leqq 1$$

for M in T. The function $V(M)$ cannot attain in T neither the value zero nor the value unity. In fact, let E_1 be the set of points in T where $V(M) = 1$. Obviously E_1 is distinct from T. Thus E_1 has a frontier F_1 in T. Let S_1 be circle interior T with the center at F_1. In S_1 some of the values of V are < 1, while at the center $V = 1$. This is a contradiction to the mean value property of harmonic functions. Similarly, it can be shown that, in T, $V(M)$ does not assume the value zero. This reasoning is, of course, of the familiar type as it had been applied to continuous classical theory.

Thus, for M in T,

$$(6) \qquad 0 < V(M) < 1.$$

We now proceed to the proof of the theorem. The class Q (of the Thorem 10) being additive, it is sufficient to demonstrate the following. Whenever $F(x)$ is the limit of a sequence $(f_\nu(x))$, satisfying the conditions of the theorem, we shall have $F(x) = 0$ on almost every circular arc of D provided that $F(x) = 0$ on a set of points W^*, of positive measure and situated on an arc (α, β) of uniform convergence. We need only to consider the case when W^* is non dense. Let W denote a perfect component of W^*, of the same measure as W^*. Form a suitable closed contour Γ, consisting of the circular arcs containing (α, β) and of a finite number of other circular arcs of uniform convergence. Choose, as is possible in view of (2), a connected open region D', of points interior to Γ and exerior to the circles C_s $(s = 1, \ldots, N_\nu)$ (cf. (1), (2)), so that (for sufficiently small values of $\in$, its frontier Γ' has in common with W a set nf positive measure m,

$$m > h > 0,$$

h being independent of $\in$. Let circles C_s' be defined by the equations

$$|x - \xi_s| = \varrho_s = \frac{l}{\log\frac{l}{r_s}} \qquad (s = 1, \ldots, N_\nu).$$

Designate by $V(x)\,[= V(M)]$ the function whose existence had been established by means of (3) and which has the following properties. Interior Γ (that is, in T) $V(x)$ is harmonic; it assumes the boundary value zero throughout $\Gamma - W$; it assumes the boundary value unity in $W - W_0$, where W_0 is of measure zero; it satisfies inequalities (6). Now, for x in W,

$$\lim_{\nu} f_\nu(x) = 0.$$

Consider the function

$$H_\nu(x) = \log A - \eta_\nu \left[V(x) - \sum \frac{\log \frac{l}{|x-\xi_s|}}{\log \frac{l}{r_s}} \right], \tag{7}$$

where $-\eta_\nu$ is the upper limit in W of $\log|f_\nu(x)|$[28]), which is harmonic in D'.

On the part of Γ' belonging to a circle C_s

$$L_\nu(x) = \sum_{s=1}^{N_\nu} \frac{\log \frac{l}{|x-\xi_s|}}{\log \frac{l}{r_s}} > 1; \tag{7a}$$

it follows then that, unless x is a point of W_0,

$$V(x) - L_\nu(x) < 0 \tag{7b}$$

on the same part of Γ'. When x is in W_0 this inequality will continue to hold for the set of boundary limits, at x, of $V(x)$[29]). Thus on the specified part of Γ'

$$H_\nu(x) > \log A. \tag{7c}$$

Now on and exterior the C_s $(s = 1, \ldots, N_\nu)$ $|f_\nu| < A$ so that, in particular, for every point of Γ'

$$\log A > \log|f_\nu(x)| \qquad (\nu = \nu(\in)).$$

Thus in Γ', on a circle C_s,

$$H_\nu(x) > \log|f_\nu(x)|. \tag{8}$$

Here the inequality holds in an extended sense, whenever x belongs also to W_0. In this case it will hold for the set of the boundary limits.

In the part of Γ' belonging to $\Gamma - W$ we have $V(x) = 0$ and $L_\nu(x) > 0$. Thus, in this part of Γ' (8) will continue to hold (in the ordinary sense).

In the part of Γ' common with $W - W_0$

$$V(x) = 1, \quad L_\nu(x) > 0$$

---

[28]) Compare with the corresponding function in (C; 101).

[29]) The set of these limits is in the closed interval (0, 1)

so that $$H_\nu(x) = \log A - \eta_\nu + \eta_\nu L_\nu(x) > -\eta_\nu.$$

Accordingly, by definition of $-\eta_\nu$, (8) will hold (in the ordinary sense).

In the part Γ_0', of Γ', of points belonging to W_0 (if there are points of Γ' in W_0) $L_\nu(x) > 0$ and the boundary limits of $V(x)$, at each point, are in the closed interval $(0, 1)$. Let x be fixed in Γ_0'. For the boundary values (of $V(x)$ and $H_\nu(x)$) the following inequalities will hold

(8a) $$0 \geqq -\eta_\nu V(x) \geqq -\eta_\nu,$$

$$0 \geqq -\eta_\nu V(x) = H_\nu(x) - \eta_\nu L_\nu(x) - \log A \geqq -\eta_\nu,$$

$$\eta_\nu L_\nu(x) + \log A \geqq H_\nu(x) \geqq -\eta_\nu + \eta_\nu L_\nu(x) + \log A,$$

$$H_\nu(x) > -\eta_\nu.$$

On account of the last inequality (8a) and in view of the fact that, x being a point of W,

$$-\eta_\nu > \log|f_\nu(x)|$$

it is concluded that (8) holds (in the extended sense) whenever x is in Γ_0'.

Thus (8) *holds in the extended sense for* x *on* Γ'*; in the part of* Γ' *exclusive of points of* W_0 *this inequality holds in the ordinary sense.*

The function

$$C_\nu(x) = H_\nu(x) - \log|f_\nu(x)|$$

is harmonic in D'. Moreover, by (8), $C_\nu(x) > 0$ in the extended sense for all x on Γ'. At every point of Γ', not in W_0, the boundary values of $C_\nu(x)$ are, of course, unique. It is clear that for no point in D' is it possible to have $C_\nu(x) < 0$. Consequently, in D',

(9) $$\log|f_\nu(x)| \leqq H_\nu(x).$$

Noting that within a suitable closed curve, interior to Γ, $V(x) > d > 0$ and choosing ϵ less than $\frac{d}{2}$, we complete the proof of the Theorem 10 by precisely the same reasoning as employed by Carleman[30]) for the completion of the proof of his theorem[31]).

Applications. As shown by Carleman on making use of his theorem, the class of functions

(10) $$f(x) = \sum_\nu \frac{a_\nu}{z - \alpha_\nu}$$

for which the series

(10a) $$\sum_\nu \frac{\log\log\left|\frac{1}{a_\nu}\right|}{\log\left|\frac{1}{a_\nu}\right|}$$

[30]) (C; 102).

[31]) On using (9), (2) and the circles C_ρ' it is shown that, when x is on almost any circular arc of D, there exists a subsequence (f_{ν_i}) such that $\lim_i \log|f_{\nu_i}(x)| = -\infty$.

converges, is C-analytic. Moreover, as communicated by Carleman to the present author, the class of functions

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{n,m}}{(z-\alpha_n)^m} \tag{11}$$

for which

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |b_{n,m}| e^{H n^{1+\epsilon} m} \qquad (\epsilon > 0) \tag{11a}$$

converges for all real H, is also C-analytic.

By Theorem 10 *these classes* [(10), (10a)] *and* [(11), (11a)] *are also M-analytic.*

The class [(11), (11a)] can be made more extensive, for instance, by taking

$$r_s = e^{-H s [\log (s+r)]^2 + \epsilon} \qquad (\epsilon > 0;\ r > 0).$$

It is seen then that *the class of functions of the form* (11), *for which*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |b_{n,m}| e^{H n m [\log (n+r)]^2 + \epsilon} \tag{12}$$

converges for all real H, is M-analytic.

(Eingegangen am 30. Januar 1933.)

Über einen Satz von Milloux.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

Im folgenden wird ein Satz, den man Milloux verdankt[1]), bewiesen und verschärft werden, welcher für eine Klasse von ganzen Funktionen unendlicher Ordnung eine ähnliche Rolle spielt wie der klassische Satz von Phragmèn und Lindelöf für ganze Funktionen endlicher Ordnung. Zum Schluß wird mit Hilfe einer der Millouxschen analogen Ungleichung[2]) gezeigt, daß für diese Funktionenklasse ein Analogon des Denjoy-Ahlforsschen Satzes gilt.

2. Es sei $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion von $z = x + iy$, die im Streifen T_k

$$x \geqq 0, \quad -\frac{\pi}{2k} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2k} \qquad (k > 0) \tag{2.1}$$

folgenden Bedingungen genügen möge:

$$\overline{\lim_{x=\infty}} e^{-\varrho x} \log M_0(x) = 0 \qquad (\varrho \text{ endlich} > 0) \tag{2.2}$$

$$\overline{\lim_{x=\infty}} e^{-\varrho x} \log M(x) = \sigma, \qquad (\sigma \neq 0) \tag{2.3}$$

wobei $M_0(x)$, $M(x)$ durch

$$M_0(x) = \operatorname{Max}\left|f\left(t \pm i\frac{\pi}{2k}\right)\right| \qquad \text{für } 0 \leqq t \leqq x \tag{2.4}$$

$$M(x) = \operatorname{Max}|f(x+iy)| \qquad \text{für } -\frac{\pi}{2k} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2k} \tag{2.5}$$

definiert sind. Schließlich gelte noch (5. 2).

Unter diesen Voraussetzungen wird in 4. *bewiesen, daß* $k \leqq \varrho$ *ist.*

3. Eine Ungleichung. Die Funktion $g(z)$ sei im Rechteck A_a

$$0 \leqq x \leqq a \quad -\frac{\pi}{2k} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2k} \qquad (k > 0) \tag{3.1}$$

eine ganze Funktion, und es sei

$$\left|g\left(x \pm i\frac{\pi}{2k}\right)\right| \leqq M_0, \quad |g(a+iy)| \leqq M \qquad |g(iy)| \leqq M_0$$

[1]) H. Milloux, Sur quelques propriétès des fonctions entières d'ordre infini, Annales de l'école norm. sup. **31** (1932), S. 330.

[2]) H. Milloux, Sur les domaines de détermination infinie des fonctions entières, Acta mathematica **61** (1933), S. 105.

für $0 \leqq x \leqq a$, $-\frac{\pi}{2k} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2k}$ vorausgesetzt, und es sei noch $M_0 < M$. Bezeichnet man mit $\Phi(z)$ die innerhalb (3.1) reguläre Potentialfunktion

(3.2) $$\operatorname{Arctg} \frac{2e^{k(x-a)} \cos k y}{1 - e^{2k(x-a)}},$$ [3])

die auf den beiden horizontalen Begrenzungen von A_a gleich Null ist, $\geqq 0$ auf dem linken senkrechten Randstück und gleich $\frac{\pi}{2}$ auf dem rechten, so ist $\log|g(z)|$ am Rande von A_a durch die reguläre Potentialfunktion

(3.3) $$\log M_0 + \frac{2}{\pi} \log \frac{M}{M_0} \Phi(z)$$

majorisiert; also muß dem Maximumprinzip gemäß im ganzen Rechteck die Ungleichung

(3.4) $$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{2}{\pi} \log \frac{M}{M_0} \Phi(z)$$

gelten. Bekanntlich darf, abgesehen von dem Falle, wo

$$g(z) = M_0 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{-\frac{2i}{\pi} F(z)}$$

ist, das Gleichheitszeichen im Inneren von A_a nicht gelten. Nun ist aber in (3.1) wegen $\cos k y \geqq 0$, $e^{k(x-a)} \leqq 1$

(3.5) $$\begin{aligned} \Phi(z) &= \operatorname{Arctg} \frac{2e^{k(x-a)} \cos k y}{1 - e^{2k(x-a)}} \leqq \operatorname{Arctg} \frac{2e^{k(x-a)}}{1 - e^{2k(x-a)}} \\ &= 2 \operatorname{Arctg} e^{k(x-a)} \leqq 2 e^{k(x-a)}, \end{aligned}$$

also

(3.6) $$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} \log \frac{M}{M_0} e^{k(x-a)}.$$

Diese Ungleichung (für $k = 1$) spielt eine wesentliche Rolle in Millouxs Arbeit der Acta.

4. Es sei nun gegen die Behauptung in 2. angenommen, daß $k > \varrho$ ist. Wir bilden die im Streifen T_k: $x \geqq 0$, $-\frac{\pi}{2k} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2k}$ eindeutige Funktion $G(z) = f(z) e^{-\varepsilon e^{\varrho z}}$ [4]) mit $\varepsilon > 0$ (das sonst beliebig klein gewählt werden kann) und setzen:

(4.1) $$M_0^*(x) = \operatorname{Max} \left|G\left(t \pm i \frac{\pi}{2k}\right)\right| \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq x$$

und

(4.2) $$M^*(x) = \operatorname{Max} |G(x + iy)| \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2k} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2k}.$$

---

[3]) Als Imaginärteil der innerhalb A_a regulären analytischen Funktion

$$F(z) = \log \frac{1 + i e^{k(z-a)}}{1 - i e^{k(z-a)}}.$$

[4]) Wir wählen denjenigen Zweig von $e^{-\varepsilon e^{\varrho z}}$, der auf der reellen Achse reell wird.

Übrigens können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $M_0^*(0) > 1$ voraussetzen, da es immer durch Multiplikation von $f(z)$ mit passender Konstante zu erreichen ist. Bezeichnet man nun mit δ die positive Zahl $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varrho}{k}\right)$, so ist vorerst

$$M_0^*(x) \leqq M_0(x) \qquad M^*(x) \geqq M(x)\, e^{-\varepsilon e^{\varrho x}} \tag{4.3}$$

und zweitens ist wegen (2.4) und (2.5) die Ungleichung

$$M_0(x) < M(x)\, e^{-\varepsilon e^{\varrho x}} \tag{4.4}$$

für unendlich viele und beliebig große x erfüllt, denn sonst wäre $0 \geqq \sigma - \varepsilon$, was im Widerspruch zu (2.3) steht[5]). Aus der Kombination von (4.3) (4.4) erhält man, daß auch $M_0^*(x) < M^*(x)$ von unendlich vielen und beliebig großen x erfüllt ist. Diese x wollen wir im folgenden mit a bezeichnen. Wendet man auf $G(z) = f(z)\, e^{-\varepsilon e^{\varrho z}}$ die Ungleichung (3.6) an, so erhält man

$$\log|f(z)\, e^{-\varepsilon e^{\varrho z}}| \leqq \log M_0^*(a) + \frac{4}{\pi} \log \frac{M^*(a)}{M_0^*(a)}\, e^{k(x-a)}, \quad (z = x + iy), \tag{4.5}$$

oder wegen $M_0^*(0) > 1$

$$\log|f(z)\, e^{-\varepsilon e^{\varrho z}}| \leqq \log M_0^*(a) + \frac{4\, e^{kx}}{\pi} \cdot e^{-ka} \log M^*(a). \tag{4.6}$$

Halten wir jetzt z fest und lassen $a \to \infty$ konvergieren, so strebt zunächst das zweite Glied der rechten Seite der vorigen Ungleichung wegen $M^*(a) < M(a)$ gegen Null, weil $k > \varrho$ vorausgesetzt wurde, während das erste Glied nach oben beschränkt bleibt. Denn es ist

$$\overline{\lim_{x=\infty}}\; e^{-\varepsilon \delta e^{\varrho x}} \cdot \left| f\left(x \pm i \frac{\pi}{2k}\right)\right| = 0,$$

und so kann $M_0^*(a)$ nicht über alle Grenzen wachsen. Bezeichnet man diese obere Schranke von $M_0^*(a)$, die nur von ε abhängt, mit C, so erhält man aus (4.6)

$$\log|f(z)\, e^{-\varepsilon e^{\varrho z}}| \leqq C, \tag{4.7}$$

oder auch

$$\log M(x) \leqq C + \varepsilon e^{\varrho x}, \tag{4.8}$$

was der Annahme (2.3) widerspricht. In der Tat entnimmt man aus (4.8), daß $\sigma = \overline{\lim_{x=\infty}} \log M(x)\, e^{-\varrho x} \leqq \varepsilon$ sein muß, was für $\varepsilon < \sigma$ falsch ist.

5. Wir werden nun für eine Klasse von ganzen Funktionen unendlicher Ordnung gewisse Begriffe einführen, welche schon in der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung lange geläufig sind. Die in Betracht kommenden Funktionen dieser Klasse werden dadurch charakterisiert, daß sie in einem Parallelstreifen

$$x \geqq 0, \quad -\frac{\pi}{2T} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2T} \tag{5.1}$$

[5]) Wäre nämlich für alle $x \geqq x_0$ $M_0(x) \geqq M(x)\, e^{-\varepsilon e^{\varrho x}}$, so wäre $\log M_0(x)\, e^{-\varrho x} \geqq \log M(x)\, e^{-\varrho x} - \varepsilon$ und daraus hätte man $0 \geqq \sigma - \varepsilon$ folgern können. σ ist aber größer als Null, und ε kann beliebig klein gewählt werden.

der Bedingung

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x)}{x} = \varrho, \tag{5.2}$$

($\varrho > 0$ und endlich), genügen, wo mit $M(x)$ das Maximum von $|f(x+iy)|$ für $-\frac{\pi}{2T} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2T}$ bezeichnet ist. Es wird jetzt gesagt, die Funktion $f(z)$[6]) sei in (5.1) vom Maximal-, Normal- oder Minimaltypus der „Ordnung" ϱ, je nachdem $\overline{\lim_{x=\infty}} e^{-\varrho x}\log M(x)$ unendlich, endlich > 0, oder gleich Null ist. Weiter wird gesagt, die Funktion $f(z)$ ist auf der Halbgeraden $y = y_0$ $x \geqq 0$[7]) vom Maximal-, Normal- oder Minimaltypus der „Ordnung" ϱ, je nachdem $\overline{\lim_{x=\infty}} e^{-\varrho x}\log^{+}|f(x+iy_0)|$ gleich unendlich, endlich und > 0, oder Null ist.

Unter diesen Festsetzungen besagt nur der vorher bewiesene Satz folgendes:

Es gibt keine ganze transzendente Funktion[6]), *welche auf zwei parallelen Geraden, deren Abstand* $< \frac{\pi}{\varrho}$ *ist, den Minimaltypus von der „Ordnung"* ϱ *besitzt, während sie innerhalb des von ihnen begrenzten Streifens vom Maximal- oder Normaltypus derselben „Ordnung" ist.*

Dieser Satz enthält in sich den Satz von Milloux[8]).

Ferner kann man noch einen Satz beweisen, der auch sein Analogon in der Theorie der Funktionen endlicher Ordnung besitzt.

Es sei $f(z)$ *eine ganze Funktion von* z, *die in* (5.1) *der Bedingung* (5.2) *genügen möge, und welche auf* $n+1$ *zur* $0x$*-Achse parallelen positiven Halbgeraden* $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}$, *die innerhalb* (5.1) *liegen, vom Minimaltypus der „Ordnung"* ϱ *ist, während sie innerhalb jedes von je zwei aufeinanderfolgenden* $\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots \nu)$ *begrenzten Streifens vom Maximal- oder Normaltypus ist. Dann ist:* $T < \frac{\varrho}{n}$.

Ob man nun in diesem letzten Satz die Halbgeraden durch beliebige innerhalb eines gewissen Streifens laufende und sich nicht schneidende Wege ersetzen könnte [mit passender Erweiterung des Typus einer ganzen transzendenten Funktion $f(z)$ auf „einem Wege"] bleibt unentschieden. Wir werden in 7. sehen, daß unter viel größeren Einschränkungen des Funktionsverlaufes auf diesen Wegen ein solcher Satz gilt.

Hier möge nun noch bemerkt sein, daß man Funktionen angeben kann, für welche die Grenzen erreicht sind. In der Tat hat Milloux[9])

---

[6]) Es handelt sich immer um Funktionen, die schon (5.2) genügen.

[7]) $-\frac{\pi}{2T} \leqq y_0 \leqq \frac{\pi}{2T}$.

[8]) Milloux, l. c. [1]), S. 330.

[9]) Milloux, l. c. [1]), S. 331.

ganze transzendente Funktionen konstruiert, welche innerhalb eines Streifens $x \geqq 0$, $-\frac{\pi}{2\varrho} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$ der Bedingung (5.2) genügen, während sie außerhalb derselben von endlicher Ordnung bleiben. Ist nun $g(z)$ eine ganze Funktion, die (5.2) genügt und die außerdem in (5.1) mit $T < \varrho$ vom Minimaltypus ist, so bildet das Produkt dieser beiden Funktionen eine Funktion, die die Grenze erreicht. Ebenso, falls ϱ eine ganze Zahl > 0 ist, so ist $g(z)\, e^{e^{\varrho z}}$ eine Funktion, welche die Grenze des zweiten Satzes erreicht.

6. Zum Schluß werden wir eine Ungleichung aufstellen, die der Millouxschen analog lautet[10]), und aus der man einen interessanten Satz schließen kann, insbesondere für die in der vorigen Nummer betrachtete spezielle Funktionsklasse. Dazu kehren wir zu der Ungleichung (3.6) zurück. Bezeichnet man mit L die Breite des Streifens (3.1), so ist $k = \frac{\pi}{L}$, und (3.6) kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\log|g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} \log \frac{M}{M_0}\, e^{-\pi \int_x^a \frac{dt}{L}} \tag{6.1}$$

Daß nun eine analoge Ungleichung auch für Streifen allgemeinerer Gestalt gilt, kann man mit Hilfe einer von Ahlfors herrührenden fundamentalen Ungleichung[11]) sehr leicht zeigen.

Wir werden im folgenden solche einfach zusammenhängenden Bereiche in Betracht ziehen, die von zwei sich ins Unendliche erstreckenden Kurven[12]), welche im Nullpunkt münden, begrenzt sind, und von denen wir noch verlangen werden, daß der obere Limes der Länge des Durchschnittes eines solchen Bereiches mit einer Geraden $x = a$ für $a \to \infty$ eine endliche Zahl ist[13]). Einen solchen Bereich kann man immer durch eine zur $0y$-Achse parallele Strecke AB in zwei einfach zusammenhängende Bereiche zerlegen, von denen der eine den Nullpunkt und der andere den unendlich fernen Punkt als Randpunkte besitzen. Die Länge dieser Strecke werden wir im folgenden mit $L(x)$ bezeichnen und den links von AB liegenden Bereich mit B_x. Wegen der Annahme über die Begrenzung von

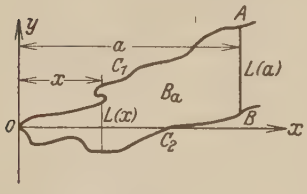


Fig. 1.

[10]) Milloux, l. c. [2]), S. 109.

[11]) Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta soc. scient. Fenn. Nova Series 1 (1930), Nr. 5.

[12]) Wir werden voraussetzen, daß die Kurven C_1, C_2 aus analytischen Kurvenstücken, deren Ecken sich nicht im Endlichen häufen, zusammengesetzt sind.

[13]) Diese Annahme ist unwesentlich.

B ist $L(x)$ eine stetige Funktion, die im Endlichen nur endlich viele Sprungstellen aufweisen kann.

Es sei nun mit $w = F(z)$ diejenige analytische Funktion von z bezeichnet, die dem Bereich B_a auf dem Halbkreise $|w| \leqq 1$, $Rw \geqq 0$ der w-Ebene derart konform abbildet, daß die Punkte A, B, 0 in die Punkte i, $-i$, 0 der w-Ebene übergehen. Die innerhalb B_a reguläre harmonische Funktion $\Phi(z) = \frac{2}{\pi} \arg \frac{1 + iF(z)}{1 - iF(z)}$ ist auf der Strecke AB gleich eins, während sie auf dem übrigen Rande verschwindet. Nach dem Maximumprinzip muß innerhalb B_a die Ungleichung

$$\log |g(z)| \leqq \log M_0 + \log \frac{M}{M_0} \Phi(z)^{14}) \tag{6.2}$$

gelten, insofern diese schon in beliebiger Nähe eines Randpunktes von ihm gilt.

Aus der Definition von $\Phi(z)$ folgt aber nun wegen $|w| = |F(z)| \leqq 1$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{2Rw}{1 - |w|^2} \leqq \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{2|w|}{1 - |w|^2} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} |w| \leqq \frac{4}{\pi} |w|,$$

so daß (6.2) übergeht in

$$\log |g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} \log \frac{M}{M_0} |F(z)|. \tag{6.3}$$

Zu einer Abschätzung von $|F(z)|$ nach oben gelangt man folgendermaßen: Die Funktion $\zeta = \xi + i\eta = -\log F(z)$ bildet B_a auf $\xi \geqq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{2}$ derart konform ab, daß A, B, 0 in die Punkte $-i$, $+i$, ∞ der w-Ebene übergehen. Nach Ahlfors Verfahren[15]) kann man nun folgendes beweisen:

Ist

$$\int_x^a \frac{dt}{L(t)} > 1, \tag{6.4}$$

so ist

$$\xi = -\log |F(z)| > \pi \int_x^a \frac{dt}{L(t)} - 2\pi. \tag{6.5}$$

Mit Hilfe dieser letzten Ungleichung gewinnt man schließlich aus (6.3)

$$\log |g(z)| \leqq \log M_0 + \frac{4}{\pi} \log \frac{M}{M_0} e^{2\pi - \pi \int_x^a \frac{dt}{L(t)}} \tag{6.6}$$

7. Ein Analogon des Denjoy-Ahlforsschen Satzes. Aus dieser letzten Ungleichung kann man einen Satz ableiten, der für die betrachtete Klasse von ganzen Funktionen unendlicher Ordnung die Rolle des Denjoy-Ahlforsschen Satzes spielt. Es ist nämlich folgender Satz richtig:

---

[14]) M ist die obere Grenze von $|f(z)|$ auf AB und M_0 auf dem übrigen Rand. Ferner wird $M_0 < M$ vorausgesetzt.

[15]) Ahlfors, l. c.

Die Funktion $f(z)$ sei im Streifen S_T

$$x \geqq 0, \quad -\pi T \leqq y \leqq \pi T \qquad (T > 0) \tag{7.1}$$

von unendlicher Ordnung und derart, daß

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x)}{x} = \varrho \qquad (\varrho \text{ endlich} > 0)$$

ist. $M(x)$ möge das Maximum von $|F(z)|$ auf der Strecke $x = x$ $-\pi T \leqq y \leqq \pi T$ bedeuten. Ist $|f(z)|$ auf $n+1$ innerhalb S_T laufenden, sich ins Unendliche erstreckenden und sich nicht schneidenden Kurven $C_1 C_2 \ldots C_{n+1}$ beschränkt, so ist

$$n \leqq 2\varrho T. \tag{7.2}$$

Zum Beweis bezeichnen wir mit $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ die Schnittpunkte der Geraden $x = a$ $(a > 0)$ mit den Wegen $C_1 \ldots C_{n+1}$ und ersetzen die vor a gelegenen Stücke dieser Wege C_i durch die Strecke $0A_i$. $(i = 1, \ldots, n+1)$. Die so gebildeten n Bereiche von der in der vorherigen Nummer betrachteten Art nennen wir $B_1 \ldots B_n$. Es folgt nun aus (6.6) wegen der Beschränktheit von $|f(z)|$ auf C_i

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{L_\nu(t)} < O(1) + \frac{1}{\pi}\log\log M(x), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.3}$$

wo hier $O(1)$ eine von x unabhängige Größe bezeichnet. Durch Summation dieser Ungleichungen über alle ν folgt nun

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{L_\nu(t)} < nO(1) + \frac{n}{\pi}\log\log M(x), \tag{7.4}$$

oder auch

$$\int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{L_\nu(t)} \Big)\, dt < nO(1) + \frac{n}{\pi}\log\log M(x), \tag{7.5}$$

was wegen $\sum_{1}^{n} \frac{1}{L_\nu(t)} \geqq \frac{n^2}{2\pi T}$ folgendes ergibt:

$$\frac{n}{2\pi T}(x - x_0) < O(1) + \frac{1}{\pi}\log\log M(x). \tag{7.6}$$

Aus dieser letzten Ungleichung entnimmt man sehr leicht

$$\frac{n}{2T} \leqq \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log\log M(x)}{x} = \varrho, \qquad \text{d. h. } n \leqq 2\varrho T. \tag{7.7}$$

Berlin, den 1. Januar 1934.

(Eingegangen am 2. März 1934.)

Integraleigenschaften der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome.

Von

Karl Mayr in Graz.

In der unter dem Titel „Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome“ [1]) erschienenen Arbeit hat Herr G. Doetsch einige Integralrelationen für die Hermiteschen Polynome mitgeteilt und dabei vor allen die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s x^2} H_{2\nu}(x)\, dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s x^2} H_\nu(\sqrt{s}\, x) H_\mu(x)\, dx$ berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit sollen Integrale etwas allgemeinerer Form nach einer anderen Methode berechnet werden. Das Wesen dieser Methode besteht darin, im Integranden geeignete Parameter einzuführen und mit deren Hilfe eine Differentialgleichung bzw. ein System von Differentialgleichungen für das gesuchte Integral aufzustellen [2]). Wir behandeln auf diese Weise hier die beiden Integrale $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} H_\nu(\alpha x) x^{\sigma-1} dx$ und $\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 x^2} H_\nu(\alpha x) H_\mu(\beta x) x^{\sigma-1} dx$. λ, α, β sind beliebige Parameter, die wir nur als reell und positiv voraussetzen wollen; ebenso ist σ eine beliebige reelle Zahl, lediglich beschränkt durch die Existenzbedingung des betreffenden Integrals. Für $\sigma = 1$ bzw. $\sigma = 1$ und $\alpha = \lambda$ erhält man die von Herrn Doetsch behandelten Fälle. Die Grenzen der Integrale sind hier mit 0 und ∞ angenommen. Das hat gegenüber den Grenzen $-\infty$ und ∞ den Vorteil, daß die beiden Integrale auch für den Fall, daß die Integranden ungerade Funktionen sind, nicht trivial werden. Das Ergebnis der hier durchgeführten Rechnung ist kurz folgendes: Das erste Integral läßt sich durch ein gewöhnliches hypergeometrisches Polynom (§ 1), das zweite durch ein Appellsches Polynom F_2 der auftretenden Parameter ausdrücken (§ 2).

---

[1]) G. Doetsch, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 587.

[2]) In den beiden Arbeiten „Bestimmte Integrale und hyperg. Funktionen“, Sitz.-Ber. der Akad. d. Wiss. in Wien, Abt. IIa, 141, S. 227, und „Bestimmte Integrale mit Besselschen Funktionen“, ebenda 142, S. 1, habe ich diese Parametermethode vielfach verwendet.

Ganz in derselben Weise lassen sich auch Integrale mit Laguerreschen Polynomen von der Form $\int_0^\infty e^{-\lambda x} L_r^{(a)}(\alpha x) L_s^{(b)}(\beta x) x^{\sigma-1} dx$ behandeln. Derartige Integrale spielen in der Quantentheorie eine gewisse Rolle. E. Schrödinger weist in dem mathematischen Anhang seiner Abhandlung „Quantisierung als Eigenwertproblem“ [3]) auf die Schwierigkeiten hin, die sich bei der Berechnung des Integrals

$$\int_0^\infty x^p e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}x} L_{n+k}^n(\alpha x) L_{n'+k'}^{n'}(\beta x)\, dx \text{ [4])}$$

ergeben. Es soll hier gezeigt werden, daß sich auch dieses Integral durch ein Appellsches Polynom F_2 darstellen läßt (§ 3). Im Falle $n = n' = p$ wird F_2 ein gewöhnliches hypergeometrisches Polynom. Ist $p = n + l$ (l ganzzahlig), $n = n'$, so gewinnt man das Integral durch l-malige Differentiation dieses Polynoms.

§ 1.

Das Integral $J = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_\nu(\alpha x) x^{\sigma-1} dx$.

($\sigma > 0$, wenn $\nu = 2k$; $\sigma > -1$, wenn $\nu = 2k+1$.)

$H_\nu(\alpha x) = e^{\alpha^2 x^2} \frac{d^\nu e^{-\alpha^2 x^2}}{d(\alpha x)^\nu}$ genügt der Differentialgleichung

$$H_\nu'' - 2\alpha x H_\nu' + 2\nu H_\nu = 0.$$

Daraus folgt für das Integral J die Relation

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha\, \partial \lambda} - \frac{\nu}{\lambda}\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0. \tag{1}$$

Setzt man hierin $J = \lambda^{-\sigma} u\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$, so folgt weiter:

$$(1 - z^2) u'' + (\nu - \sigma - 1) z u' + \nu\sigma u = 0 \qquad \left(z = \frac{\alpha}{\lambda}\right). \tag{2}$$

Die Integration von (2) liefert:

$$\begin{aligned} J_1 &= c_1 \lambda^{-\sigma} F\left(\frac{\sigma}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\alpha^2}{\lambda^2}\right), \\ J_2 &= c_2 \alpha \lambda^{-\sigma-1} F\left(\frac{\sigma+1}{2}, \frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\alpha^2}{\lambda^2}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

J_1 gilt für geradzahliges, J_2 für ungeradzahliges ν. c_1 und c_2 bestimmen sich durch Nullsetzen von α in J bzw. $\frac{J}{\alpha}$.

---

[3]) Ann. d. Phys. 80 (1926), S. 487.

[4]) L_{n+k}^n bedeutet die n-te Ableitung des $n+k$-ten Laguerreschen Polynoms.

Für $\alpha = \lambda$ ergibt sich aus (3):

$$J_1 = c_1 \lambda^{-\sigma} \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1-\sigma+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)},$$

(4)

$$J_2 = c_2 \frac{\lambda^{-\sigma}}{2} \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1-\sigma+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right)}.$$

Daraus folgt:

$$J_1 = 0 \text{ für } \sigma = 1, 3, \ldots, \nu - 1,$$
$$J_2 = 0 \text{ für } \sigma = 2, 4, \ldots, \nu - 1.$$

Damit ist die Orthogonalitätseigenschaft der Hermiteschen Polynome erwiesen.

Für $\sigma = 1$ liefert (3) die bekannten Werte:

$$J_1 = c_1 \lambda^{-\nu-1} (\lambda^2 - \alpha^2)^\nu,$$
$$J_2 = c_2 \lambda^{-\nu} (\lambda^2 - \alpha^2)^{\nu-1},$$

und für $\sigma = \nu$:

$$J_1 = c_1 \lambda^{-\nu} \cos\left(\nu \arcsin \frac{\alpha^2}{\lambda^2}\right),$$

$$J_2 = c_2 \frac{\alpha\, \lambda^{1-\nu}}{\nu} \sin\left(\nu \arcsin \frac{\alpha^2}{\lambda^2}\right).$$

Bei großen Werten von $\frac{\alpha}{\lambda}$ ist es zweckmäßiger, die Lösung von (2) nach fallenden Potenzen von z zu entwickeln. Man erhält in diesem Falle:

(5) $$J = c_3 \alpha^\nu \lambda^{-\sigma-\nu} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}, \frac{1-\sigma-\nu}{2}, \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right).$$

Zur Bestimmung von c_3 kann man $\frac{\lambda}{\alpha} = 1$ setzen und (5) mit (3) vergleichen.

§ 2.

Das Integral $J = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_\nu(\alpha x) H_\mu(\beta x) x^{\sigma-1} dx.$

$$\sigma \begin{cases} > 0, & \text{wenn } \nu \text{ und } \mu \text{ geradzahlig,} \\ > -1, & \text{wenn entweder } \nu \text{ oder } \mu \text{ ungeradzahlig,} \\ > -2, & \text{wenn } \nu \text{ und } \mu \text{ ungeradzahlig.} \end{cases}$$

Aus den Differentialgleichungen für H_ν und H_μ folgen für J die Relationen:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha\, \partial \lambda} - \frac{\nu}{\lambda} \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0,$$

(6)

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{\partial^2 J}{\partial \beta\, \partial \lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0.$$

Setzt man hierin $J = \lambda^{-\sigma} u\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$, so erhält man für u das System:

$$(7)\quad \begin{aligned} &(1-x^2)\,u''_{x^2} - x\,y\,u''_{xy} + (\nu - \sigma - 1)\,x\,u'_x + \nu\,y\,u'_y + \sigma\,\nu\,u = 0,\\ &(1-y^2)\,u''_{y^2} - x\,y\,u''_{xy} + (\mu - \sigma - 1)\,y\,u'_y + \mu\,x\,u'_x + \sigma\,\mu\,u = 0 \end{aligned}$$
$$\left(x = \frac{\alpha}{\lambda},\quad y = \frac{\beta}{\lambda}\right).$$

Verwendet man zur Integration von (7) den Ansatz

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} x^{r+k}\,\varphi_k(y),$$

so folgt aus der zweiten Gleichung:

$$(8)\quad (1-y^2)\,\varphi''_k + (\mu - \sigma - 1 - r - k)\,y\,\varphi'_k + \mu\,(\sigma + r + k)\,\varphi_k = 0,$$

und aus der ersten:

$$r(r-1) = 0,$$

ferner:

$$(9)\quad (r+k+1)\,(r+k+2)\,\varphi_{k+2} = (r+k-\nu)\,\{(r+k+\sigma)\,\varphi_k + y\,\varphi'_k\}.$$

Die Lösungen von (8) sind

$$\varphi_k^1 = a_k\,F\left(\frac{r+k+\sigma}{2},\ -\frac{\mu}{2},\ \frac{1}{2},\ y^2\right),$$
$$\varphi_k^2 = b_k\,F\left(\frac{1+r+k+\sigma}{2},\ \frac{1-\mu}{2},\ \frac{3}{2},\ y^2\right).$$

Nach (9) ergeben sich die Rekursionsformeln:

$$a_{k+2} = \frac{(r+k+\sigma)\,(r+k-\nu)}{(r+k+1)\,(r+k+2)}\,a_k,$$
$$b_{k+2} = \frac{(1+r+k+\sigma)\,(r+k-\nu)}{(r+k+1)\,(r+k+2)}\,a_k.$$

Damit ist die Integration von (7) vollständig geleistet und man erhält, wenn man in φ_k für r die Werte 0 und 1 einsetzt und für die auftretenden Summen die Appellsche Bezeichnungsweise[5]) verwendet:

$$J_1 = a_1\,\lambda^{-\sigma}\,F_2\left(\frac{\sigma}{2},\ -\frac{\nu}{2},\ -\frac{\mu}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2}{\lambda^2},\ \frac{\beta^2}{\lambda^2}\right)\quad (\nu \text{ und } \mu \text{ gerade}),$$

$$J_2 = a_2\,\beta\,\lambda^{-\sigma-1}\,F_2\left(\frac{\sigma+1}{2},\ -\frac{\nu}{2},\ \frac{1-\mu}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{\alpha^2}{\lambda^2},\ \frac{\beta^2}{\lambda^2}\right)$$
(ν gerade, μ ungerade),

$$(10)\quad J_3 = a_3\,\alpha\,\lambda^{-\sigma-1}\,F_2\left(\frac{\sigma+1}{2},\ \frac{1-\nu}{2},\ -\frac{\mu}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2}{\lambda^2},\ \frac{\beta^2}{\lambda^2}\right)$$
(ν ungerade, μ gerade),

$$J_4 = a_4\,\alpha\,\beta\,\lambda^{-\sigma-2}\,F_2\left(\frac{\sigma+2}{2},\ \frac{1-\nu}{2},\ \frac{1-\mu}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{\alpha^2}{\lambda^2},\ \frac{\beta^2}{\lambda^2}\right)$$
(ν und μ ungerade).

---

[5]) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m)\,(\beta, m)}{(1, m)\,(\gamma, m)}\,x^m\,F(\alpha+m, \beta', \gamma', y) = F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y)$. P. Appel, J. Kampé de Feriet, Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. (1926), S. 15.

Die Konstanten a_1, a_2, a_3, a_4 erhält man durch Nullsetzen von α und β in J_1, $\frac{J_2}{\beta}$, $\frac{J_3}{\alpha}$ und $\frac{J_4}{\alpha\beta}$. Alles weitere ergibt sich nun aus der Theorie der Appellschen Funktionen. Insbesondere folgt für $\sigma = 1$ aus der Relation

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \alpha, \gamma', x, y) = (1-x)^{-\beta} F_1\left(\beta', \beta, \alpha-\beta, \gamma', \frac{y}{1-x}, y\right)^{6}):$$

$$J_1 = a_1 \lambda^{-\nu-1} (\lambda^2 - \alpha^2)^{\frac{\nu}{2}} F_1\left(-\frac{\mu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\beta^2}{\lambda^2-\alpha^2}, \frac{\beta^2}{\lambda^2}\right),$$

und hieraus wieder auf Grund der Beziehung

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \beta+\beta', x, y) = (1-y)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \beta+\beta', \frac{y-x}{y-1}\right)^{7}):$$

$$J_1 = a_1 \lambda^{-\nu-\mu-1} (\lambda^2-\alpha^2)^{\frac{\nu}{2}} (\lambda^2-\beta^2)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\frac{\nu}{2}, -\frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\alpha^2\beta^2}{(\lambda^2-\alpha^2)(\lambda^2-\beta^2)}\right)$$

(11)

(ν und μ gerade, $\sigma = 1$).

Ebenso ergibt sich für ungeradzahlige Werte von ν und μ:

$$J_4 = a_4 \alpha\beta \lambda^{-\nu-\mu-1} (\lambda^2-\alpha^2)^{\frac{\nu-1}{2}} (\lambda^2-\beta^2)^{\frac{\mu-1}{2}}$$

(12)

$$F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\alpha^2\beta^2}{(\lambda^2-\alpha^2)(\lambda^2-\beta^2)}\right)$$

($\sigma = 1$).

(11) und (12) lassen wieder die Orthogonalitätseigenschaft der Hermiteschen Polynome erkennen und zeigen ferner, daß J_1 und J_4 für $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ sich durch Γ Funktionen ausdrücken lassen, nämlich:

$$J_1 = a_1 (\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1+\nu+\mu}{2}} \alpha^\mu \beta^\nu \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)},$$

(13)

$$J_4 = a_4 (\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1+\nu+\mu}{2}} \alpha^\mu \beta^\nu \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+\mu}{2}\right)}$$

($\sigma = 1, \quad \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$).

Für kleine Werte von λ ist es zweckmäßig, die Lösungen von (6) nach steigenden Potenzen von λ zu entwickeln. Wir setzen

$$J = \beta^{-\sigma} u\left(\frac{\lambda}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

---

6) Appell, Kampé de Feriet, l. c. S. 35.

7) Appell, Kampé de Feriet, l. c. S. 24.

Dann folgt aus (6):

$$x\,u''_{y^2} + y\,u''_{x\,y} - \nu\,u'_x = 0,$$

$$(x^3 - x)\,u''_{x^2} + y\,(2\,x^2 - 1)\,u''_{x\,y} + x\,y^2\,u''_{y^2} + \{2\,(\sigma+1)\,x^2 - (\mu+\sigma+1)\}\,u'_x$$

$$+ 2\,(\sigma+1)\,x\,y\,u'_y + \sigma\,(\sigma+1)\,x\,u = 0, \tag{14}$$

$$\left(x = \frac{\lambda}{\beta},\ y = \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Wir verwenden jetzt den Ansatz

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} y^{s+k}\,\varphi_k(x)$$

und erhalten aus der zweiten Gleichung von (14) — wenn wir nur jene Lösung berücksichtigen, die ein Polynom ergibt —:

$$\varphi_k(x) = a_k\,x^{-(\mu+\sigma+s+k)}\,F\left(-\frac{\mu}{2},\ \frac{1-\mu}{2},\ \frac{2-\mu-\sigma-s-2\,k}{2},\ x^2\right).$$

Aus der ersten Gleichung von (14) folgt

$$s\,(s-1) = 0, \quad (s+k+1)\,(s+k+2)\,\varphi_{k+2} = -\,(s+k-\nu)\,\varphi'_k$$

und daraus:

$$a_{k+2} = \frac{(s+k+\sigma+\mu)\,(s+k-\nu)}{(s+k+1)\,(s+k+2)}\,a_k.$$

Man erhält schließlich:

$$J_1 = a_1\,\beta^{\mu}\,\lambda^{-\mu-\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\sigma+\mu}{2},\ k\right)\left(-\frac{\nu}{2},\ k\right)}{(1,k)\left(\frac{1}{2},\ k\right)}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^k$$

$$\cdot F\left(-\frac{\mu}{2},\ \frac{1-\mu}{2},\ \frac{2-\mu-\sigma-2\,k}{2},\ \frac{\lambda^2}{\beta^2}\right) \quad (\nu \text{ gerade}),$$

(15)

$$J_2 = a_2\,\alpha\,\beta^{\mu}\,\lambda^{-\mu-\sigma-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1+\sigma+\mu}{2},\ k\right)\left(\frac{1-\nu}{2},\ k\right)}{(1,k)\left(\frac{1}{2},\ k\right)}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^k$$

$$F\left(-\frac{\mu}{2},\ \frac{1-\mu}{2},\ \frac{1-\mu-\sigma-2\,k}{2},\ \frac{\lambda^2}{\beta^2}\right) \quad (\nu \text{ ungerade}).$$

Die rechts stehenden Summen gehören jetzt aber nicht mehr zum Typus der vier Appellschen Funktionen.

§ 3.

Das Integral $J = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,L_r^{(a)}(\alpha x)\,L_s^{(b)}(\beta x)\,x^{\sigma-1}\,dx$.

Das allgemeine Laguerresche Polynom $L_r^{(a)}(x)$ ist definiert durch die erzeugende Funktion

$$\frac{e^{-\frac{t}{1-t}x}}{(1-t)^{c+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} t^r\,L_r^{(a)}(x).$$

Es genügt der Differentialgleichung

$$x\,y'' + (a + 1 - x)\,y' + r\,y = 0\,^{8}).$$

Wir erhalten daher in derselben Weise wie in § 2 für J die Relationen

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} + \alpha \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha\, \partial \lambda} + (a+1)\frac{\partial J}{\partial \alpha} - r\frac{\partial J}{\partial \lambda} &= 0, \\ \beta \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} + \beta \frac{\partial^2 J}{\partial \beta\, \partial \lambda} + (b+1)\frac{\partial J}{\partial \beta} - s\frac{\partial J}{\partial \lambda} &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

und daraus für $J = \lambda^{-\sigma} u\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$:

$$\begin{aligned} (x - x^2)\,u''_{x^2} - x\,y\,u''_{xy} + \{a + 1 + (r - \sigma - 1)\,x\}\,u'_x + r\,y\,u'_y + r\,\sigma\,u &= 0, \\ (y - y^2)\,u''_{y^2} - x\,y\,u''_{xy} + \{b + 1 + (s - \sigma - 1)\,y\}\,u'_y + s\,x\,u'_x + s\,\sigma\,u &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Die Integration von (17) geschieht nun wie in § 2. Aus

$u = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,\psi_k(y)$ folgt nämlich

$$\psi_k = c_k F(-s,\ k + \sigma,\ b + 1,\ y)$$

und

$$c_{k+1} = \frac{(k - r)\ (k + \sigma)}{(k + 1)\ (k + a + 1)}\,c_k.$$

Wir erhalten so

$$J = c\,\lambda^{-\sigma} F_2\left(\sigma,\ -r,\ -s,\ a + 1,\ b + 1,\ \frac{\alpha}{\lambda},\ \frac{\beta}{\lambda}\right). \tag{18}$$

c ist wieder durch den Wert des Integrals für $\alpha = \beta = 0$ bestimmt.

Für $\sigma - 1 = a = b$ liefern die bereits verwendeten Beziehungen zwischen den Appellschen Funktionen:

$$J = c\,\lambda^{-\sigma}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)^{r}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right)^{s} F\left(-r,\ -s,\ \sigma,\ \frac{\alpha\,\beta}{(\lambda - \alpha)\,(\lambda - \beta)}\right). \tag{19}$$

Um das Integral von Schrödinger zu erhalten, haben wir

$$a = b = n, \quad r = k, \quad s = k', \quad \sigma = p + 1, \quad \lambda = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

zu setzen. Es ist also im Falle $p = n$[9])

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} x^n\, e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}x}\, L^n_{n+k}(\alpha x)\, L^n_{n+k'}(\beta x)\, dx \\ &= c\,(-1)^k\, 2^{-n-1}\,(\alpha + \beta)^{-(1+k+k'+n)}\,(\alpha - \beta)^{k+k'} \\ &\qquad \cdot F\left(-k,\ -k',\ n + 1,\ \frac{-4\,\alpha\,\beta}{(\alpha - \beta)^2}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

---

[8]) Das von Schrödinger mit L^n_{n+k} bezeichnete Polynom genügt der Differentialgleichung $y'' + (n + 1 - x)\,y' + k\,y = 0$. Wir brauchen daher, um dieses Polynom zu erhalten, nur $a = n$, $r = k$ zu setzen. Der Koeffizient der 0-ten Potenz ist dabei $\frac{\{(n+k)!\}^2}{n!\,k!}$.

[9]) Ist $p = n + l$, so kann man das Integral auch durch l-malige Differentiation von (19) nach λ erhalten.

Ist außerdem noch $\alpha = \beta = 1$, $k = k'$, so folgt aus (20), da

$$c = \frac{\{(n+k)!\}^4}{n!\,(k!)^2}:$$

$$\int_0^\infty x^n\, e^{-x} \{L_{n+k}^n(x)\}^2\, dx = \frac{\{(n+k)!\}^3}{k!}\ ^{10}).$$

---

[10]) Das Integral von Schrödinger findet in der wellenmechanischen Literatur Verwendung u. a. noch bei: A. Kupper, Zur Frage der Intensität von Spektrallinien, Ann. d. Phys. **86** (1928), S. 515. (Kupper berechnet dort dieses Integral für einige Werte von n, n', k, k' nach einer von Schrödinger angegebenen Methode.) E. Fues, Das Eigenschwingungsspektrum zweiatomiger Moleküle in der Undulationsmechanik, Ann. d. Phys. **80** (1926), S. 392.

(Eingegangen am 24. April 1933.)

Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. II.

Von

Stefan Bergmann in Tomsk.

Bekanntlich lassen sich manche Sätze der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen, in deren Aussagen der Rand des Bereiches eingeht, nicht unmittelbar auf zwei komplexe Variable verallgemeinern, erwähnt sei z. B. die Cauchysche Integralformel, das Schwarzsche Lemma usw.[1]). Der Rand eines Gebietes des (vierdimensionalen) $z_1 z_2$-Raumes ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. In einem speziellen Falle, nämlich dem des Bizylinders $\mathfrak{E}^4$: $|z_k| < 1$, $k = 1, 2$, wo der Rand aus zwei analytischen Hyperflächen $\overline{\mathfrak{i}}_0^3$: $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| = 1$ und $\overline{\mathfrak{i}}_1^3$: $|z_1| = 1$, $|z_2| \leqq 1$ besteht, befindet sich auf der Berandung eine zweidimensionale Fläche $\mathfrak{G}^2$: $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, die in funktionentheoretischer Hinsicht eine ähnliche Rolle spielt wie die Randkurve im Falle der einer Veränderlichen: in diesem Spezialfalle ist die Verallgemeinerung der genannten Sätze möglich, wenn man die Randkurve durch $\mathfrak{G}^2$ ersetzt.

Im ersten Teile[2]) der vorliegenden Arbeit wird eine Klasse von Bereichen $\mathfrak{M}^4$ betrachtet, die von endlich vielen analytischen Hyperflächen $\overline{\mathfrak{i}}_k^3$, $k = 1, 2, \ldots, n$, berandet sind; der Rand jedes $\mathfrak{M}^4$ enthält eine „ausgezeichnete Fläche" $\mathfrak{F}^3$, d. i. die Gesamtheit aller Schnitte $\overline{\mathfrak{i}}_k^3 . \overline{\mathfrak{i}}_s^3$, $k \neq s$. $\mathfrak{F}^2$ ist erstens eine Maximumfläche, d. h. jede in $\overline{\mathfrak{M}}^4$ reguläre Funktion f nimmt das Maximum (bezüglich $\overline{\mathfrak{M}}^4$) ihres Betrages bereits auf $\mathfrak{F}^2$ an; ferner gilt für f eine der Cauchyschen analoge Integraldarstellung, wobei die Integration längs $\mathfrak{F}^2$ zu erstrecken ist. (Im Falle von $\mathfrak{E}^4$ ist $\mathfrak{G}^2 = \mathfrak{F}^2$.)

Es liegt nun nahe zu fragen, was für das Verhalten auf dem Gesamtrande einer im (offenen) Gebiete $\mathfrak{M}^4$ regulären Funktion folgt, wenn man besondere Voraussetzungen über ihr Verhalten auf $\mathfrak{F}^2$ macht. Ein Satz in dieser Richtung wird im § 7 angegeben.

---

[1]) Siehe dazu „Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas über die Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen". Math. Annalen **109** (1934), S. 324—348, § 1 und „Sur les fonctions entières et meromorphes de deux variables complexes", erscheint demnächst in Compositio mathematica.

[2]) Diese Zeitschrift **39** (1934), S. 76—94. Wir setzen die Kenntnis des ersten Teiles voraus und benutzen die dort angegebenen Bezeichnungen und Definitionen.

§ 7.

Über das Randverhalten (insbesondere über die Stetigkeit) einer im (offenen) Gebiete $\mathfrak{M}^4$ regulären Funktion $p(z_1, z_2)$ kann verschiedenes ausgesagt werden; wir leiten in dieser Hinsicht einen Satz über das Verhalten von $p(z_1, z_2)$ in der Umgebung einer Lamelle, etwa $\mathfrak{Z}_k^2(\lambda^0)$, ab. Hierzu nehmen wir an, daß $\mathfrak{M}^4$ außer **1**, **2**, **3** noch den weiteren Voraussetzungen (**5a**—**5c**) genügt.

5a. Für $k \neq 0$ ist $\mathfrak{B}_k^2(\lambda^0)$ [bzw. $\mathfrak{Z}_0^2(\lambda^0)$ für $k = 0$] ein Sternbereich in bezug auf einen inneren Punkt[3]), d. h. die Gleichung der Berandungskurve lautet, wenn etwa $z_2 = 0$ das Zentrum ist,

$$R = H(\Theta). \tag{7,1}$$

Weiter gelte

$$|H(\Theta) - H(\Theta')| \leqq N_1 |\Theta - \Theta'|, \qquad N_1 < \infty.$$

5b. Es sei

$$\mathfrak{M}'^4 \cdot (z_1' = 0) \equiv \mathfrak{B}_k^2(\lambda) \subset [1 + N|\gamma|^\tau][\mathfrak{M}'^4 \cdot (z_1' = \gamma)]^4) \tag{7,2}$$

für $|\gamma - p| \leqq p$ ($p > 0$, hinreichend klein) und geeignetes, positives τ und N.

5c. Für alle Punkte $\{z_1', z_2'\}$ von $\mathfrak{M}'^4$ mit $|z_1'| \leqq l$ ($l > 0$, hinreichend klein) gelte

$$z_1' + \bar{z}_1' > 0. \tag{7,3}$$

Nach § 2 ist $h_k'(z_2, \lambda) \equiv \dfrac{d\, h_k(z_2, \lambda)}{d\, \lambda}$ von 0 verschieden und beschränkt, so daß nach **3** $\dfrac{1}{h_k'(z_2, \lambda)}$ in $\mathfrak{C}^2$: $|z_2| \leqq 1$ regulär ist, ferner besitzt die Randkurve von $\mathfrak{M}^4 \cdot (z_2 = z_2^0)$ im Punkte $z_1 = h_k(z_2^0, \lambda^0)$ eine Normale $n(\lambda^0, z_2^0)$. Ist $k \neq 0$, so wird $\mathfrak{M}^4$ durch die Transformation

$$\mathsf{T}_1: \qquad z_1' = -i \frac{z_1 - h_k(z_2, \lambda^0)}{h_k'(z_2, \lambda^0)}, \qquad z_2' = z_2$$

auf einen Körper $\mathfrak{M}'^4$ der in K_2[5]), § 2, S. 102 betrachteten Art abgebildet: $\mathfrak{Z}_k^2(\lambda^0)$ geht in einen in der Ebene $z_1' = 0$ gelegenen Bereich [nämlich

---

[3]) Die Voraussetzung **5a** kann natürlich dahin abgeschwächt werden, daß man nur annimmt, daß $\overline{\mathfrak{B}}_k^2(\lambda^0)$ durch eine in $\overline{\mathfrak{C}}^2$: $|z_2| \leqq 1$ reguläre und schlichte Funktion auf einen Sternbereich abgebildet werden kann.

[4]) Unter $c\,\mathfrak{N}^2$ (c reell) wird derjenige Bereich verstanden, der aus $\mathfrak{N}^2$ durch die Transformation $z^* = c\,z$ entsteht.

[5]) Mit K_1 bzw. K_2 wird die Arbeit „Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I", Crelles Journ. f. reine und ang. Math. **169** (1933), S. 1—42 bzw. II, ebenda **172** (1934), S. 89—128 bezeichnet. Durch T_1 wurde $\mathfrak{M}^4$ auf die in K_1, § 6 angegebene Gestalt gebracht. z_1', z_2' sind die dort angegebenen „normalen Koordinaten". Es genügt für unsere weiteren Zwecke (Konstruktion des *inneren* „Vergleichskörpers"), daß anstatt der Bedingung 1. aus K_2 (S. 102), $H(\Theta)$ nur den Lipschitzbedingungen genügt und von 3. nur (2. 38) erfüllt ist.

$\mathfrak{B}_k^2(\lambda^0)]$ über, und die innere Normale an $\boldsymbol{R}$ $[\mathfrak{M}'^4 \ (z_2' = t_2')]$ im Punkte $z_1' = 0$ fällt für jedes $t_2' \subset \mathfrak{B}_k^2(\lambda^0)$ mit der positiven x_1'-Achse zusammen. Für $k = 0$ hat $\mathfrak{M}^4$ von vornherein die für die folgenden Betrachtungen zweckmäßige Gestalt.

Wir sprechen von der A-Annäherung der Punktfolge $\mathfrak{p}_\mu \{z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}\}$ an den Punkt $\mathfrak{q}\{z_1^{(0)}, z_2^{(0)}\} \subset \mathfrak{I}_k^2(\lambda^0)$, wenn $\lim\limits_{\mu \to \infty} z_k^{(\mu)} = z_k^{(0)}$, $k = 1, 2$ ist und außerdem der Winkel, den die Gerade $\overset{\frown}{z_1^{(\mu)} \zeta_1^{(\mu)}}$, $\zeta_1^{(\mu)} = h_k(z_2^{(\mu)}, \lambda^0)$ mit der inneren Normalen $n(\lambda^0, z_2^{(\mu)})$ bildet, für $\mu \geqq \mu_0$ absolut kleiner ist als eine (von μ unabhängige) Konstante α mit $0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Satz. *Besitzt eine in $\mathfrak{M}^4$ reguläre Funktion $p(z_1, z_2)$ längs $\mathfrak{i}_k^1(\lambda^0)$ stetige Randwerte, so hat sie bei der A-Annäherung an $\mathfrak{I}_k^2(\lambda^0)$ die Randwerte $P(z_1, z_2)$. Ist dabei $k \neq 0$, so ist $P[h_k(z_2, \lambda^0), z_2]$ in $\mathfrak{B}_k^2(\lambda^0)$, ist $k = 0$, so ist $P[z_1, e^{i\lambda^0}]$ in $\mathfrak{I}_0^2(\lambda^0)$, betrachtet als Funktion der einen komplexen Veränderlichen z_2 bzw. z_1, regulär.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen **1**, **2**, **3**, **5** kann man, wie aus K_2, § 2 folgt, einen „inneren Vergleichskörper" $\overline{\mathfrak{B}^4}$ von $\mathfrak{M}^4$ konstruieren, der mit $\mathfrak{m}^3$ die Lamelle $\overline{\mathfrak{I}_k^2(\lambda^0)}$ gemein hat und dessen übrige Punkte innerhalb $\mathfrak{M}^4$ liegen. $\overline{\mathfrak{B}^4}$ geht durch die Abbildung

$$\mathsf{T}: \qquad z_k = \Psi_k(Z_1, Z_2)$$

aus dem Bizylinder $\overline{\mathfrak{E}^4}$: $|Z_k| \leqq 1$, $k = 1, 2$ hervor. Für T gilt laut Gleichung (6. 45) und Anmerkung [1]) auf Seite 22 von K_1: $\mathsf{T} = \mathsf{T}_1 . \mathsf{T}_2 . \mathsf{T}_3$ $(k \neq 0)$ bzw. $\mathsf{T} = \mathsf{T}_2 . \mathsf{T}_3$ $(k = 0)$, worin

$$\mathsf{T}_2: \quad \begin{aligned} z_1' &= z_1'' \\ z_2' &= z_2'' f_\nu(z_1'')' \end{aligned} \qquad\qquad \mathsf{T}_3: \quad \begin{aligned} z_1'' &= c_1 Z_1 + c_2 \\ z_2'' &= \Phi(Z_2) \end{aligned}$$

bedeutet. Dabei überführt T_1: $\mathfrak{B}^4$ in $\mathfrak{D}^{(\nu)4}$, T_2: $\mathfrak{D}^4$ in $\mathfrak{D}^{(\nu)4}$, T_3: $\mathfrak{E}^4$ in $\mathfrak{D}^4$. $\mathfrak{D}^4$ und $\mathfrak{D}^{(\nu)4}$ bedeuten hier die in K_1 eingeführten Produktbereiche $\mathfrak{D}$ [6]) bzw. Vergleichskörper $\mathfrak{D}^{(\nu)}$, während Φ diejenige Funktion ist, die den E.-K. $|Z_2| < 1$ auf $\mathfrak{B}_k^2(\lambda^0)$ abbildet. Nach **5a** ist $\Phi(Z_2)$ noch am Rande $|Z_2| = 1$ stetig. Schließlich ist $f_\nu(z_1'')$ die in (6. 14) von K_1 eingeführte Funktion, die die Halbebene $z_1'' + \bar{z}_1'' > 0$ auf ein geeignetes Dreieck (vgl. K_1, S. 24) abbildet, wobei $f_\nu(0) = 1$ ist.

Die Funktionen $\Psi_k(Z_1, Z_2)$, $k = 1, 2$ sind somit in $\mathfrak{E}^4$ regulär, in $\overline{\mathfrak{E}^4}$ stetig und die Abbildung T von $\overline{\mathfrak{E}^4}$ auf $\overline{\mathfrak{B}^4}$ eineindeutig.

Die einzelnen Schnitte $\mathfrak{M}^4$ $(z_2 = \text{const})$ erfahren durch T_1 eine Translation und Drehstreckung. Konvergiert eine Punktfolge $\mathfrak{p}_\mu$ im A-Sinne gegen den Punkt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{I}_k^2(\lambda^0)$, so gilt das gleiche für die Folge $\mathfrak{p}_\mu$ ihrer

[6]) Die eine Faktorkomponente dieses Produktbereiches ist $\mathfrak{B}_k^2(\lambda^0)$, als zweite wählen wir einen Kreis $|z_1'' - r| \leqq r$, $r > 0$, genügend klein. Vgl. dazu Anmerkung [1]) S. 28 von K_1.

Bildpunkte. Nach K_1, § 3 [insbesondere (3. 12)] wird durch T_2 eine A-Annäherung in eine ebensolche überführt; das gleiche gilt für T_3.

Da $\overline{\mathfrak{B}}^4$ abgesehen von $\overline{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda^0)$ in $\mathfrak{M}^4$ liegt, ist $p(z_1, z_2)$ in $\overline{\mathfrak{B}}^4 - \overline{\mathfrak{I}}_k^2(\lambda^0)$ regulär, ferner besitzt $p(z_1, z_2)$ voraussetzungsgemäß auf $\mathfrak{i}_k^1(\lambda^0)$ stetige Randwerte. Nach früherem ist $q(Z_1, Z_2) \equiv p[\Psi_1(Z_1, Z_2), \Psi_2(Z_1, Z_2)]$ in $\mathfrak{E}^4$ regulär in $\overline{\mathfrak{E}}^4 - \mathfrak{N}^2$ stetig. $[\mathfrak{N}^2 : |Z_2| < 1, Z_1 = e^{i\vartheta}, \vartheta = \text{const}$ bedeutet das Bild von $\mathfrak{I}_k^2(\lambda^0)]$. Es gilt aber der

Hilfssatz. *Ist $q(Z_1, Z_2)$ in $\mathfrak{E}^4$ regulär und in $\overline{\mathfrak{i}}_0^3 : |Z_1| \leqq 1, |Z_2| = 1$ stetig, so ist $q(Z_1, Z_2)$ in $\mathfrak{E}^4$ gleichmäßig stetig, und die Randwerte bilden für $|Z_2| < 1$ auf jeder Ebene $Z_1 = e^{i\vartheta}$, $\vartheta = \text{const}$ eine reguläre Funktion der einen komplexen Veränderlichen Z_2.*

Beweis. Seien $\{Z_1, Z_2\}$ und $\{\xi_1, \xi_2\}$ zwei Punkte von $\mathfrak{E}^4$. Es ist dann

$$(7,4) \qquad |q(Z_1, Z_2) - q(\zeta_1, \zeta_2)| \leqq |q(Z_1, Z_2) - q(\zeta_1, Z_2)| + |q(\zeta_1, Z_2) - q(\zeta_1, \zeta_2)|.$$

Nun ist

$$(7,5) \qquad |q(Z_1, Z_2) - q(\zeta_1, Z_2)| \leqq \max_{|t_2|=1} |q(Z_1, t_2) - q(\zeta_1, t_2)| \leqq \varepsilon \quad \text{für } |Z_1 - \zeta_1| \leqq \delta(\varepsilon),$$

worin $\delta(\varepsilon)$ von t_2 nicht abhängt, da ja $q(Z_1, Z_2)$ im abgeschlossenen Bereiche $\overline{\mathfrak{i}}_0^3$ voraussetzungsgemäß stetig und daher gleichmäßig stetig ist.

Um den zweiten Summanden in (7, 4) in analoger Weise abzuschätzen, betrachtet man eine Schar von in $|Z_2| < 1$ regulären, von einen Parameter $\tau\,(|\tau| \leqq 1)$ abhängigen Funktionen $q_\tau(Z_2)$. Sind die Funktionen $q_\tau(Z_2)$ auf $|Z_2| = 1$ stetig, und zwar gleichmäßig in τ, so sind sie, wie man zeigen kann[7]), auch in $|Z_2| \leqq 1$ stetig, und zwar gleichmäßig in τ. Indem man $\tau = \zeta_1$ setzt, findet man, daß auch

$$|q(\zeta_1, Z_2) - q(\zeta_1, \zeta_2)| \leqq \delta(\varepsilon) \text{ für } |Z_2 - \zeta_2| < \varepsilon,$$

δ unabhängig von ζ_1, ist.

Da nun $q(Z_1^0, Z_2)$ für jedes konstante $Z_1^0, |Z_1^0| < 1$, eine für $|Z_2| < 1$ reguläre Funktion von Z_2 ist und $q(Z_1, Z_2)$ gleichmäßig gegen die Randwerte $Q(Z_1, Z_2)$ konvergiert, ist $Q(e^{i\vartheta}, Z_2)$ $[\vartheta = \text{const}]$ in $|Z_2| < 1$ regulär.

Da nun für $z_1 = h_k(z_2, \lambda^0)$, $z_2 \subset \mathfrak{B}_k^3(\lambda^0)$: $z_1' = 0$ ist, und andererseits $f_\nu(0) = 1$ ist, gilt auf $\mathfrak{I}_k^2(\lambda^0)$: $Z_2 = \Phi^{-1}(z_2)$, daher ist $P[h_k(z_2, \lambda), z_2] = Q[e^{i\vartheta}, Z_2] = Q[e^{i\vartheta}, \Phi^{-1}(z_2)]$ in $\mathfrak{B}_k^2(\lambda^0)$ regulär.

Für $k = 0$ verlaufen die Betrachtungen völlig analog.

Tomsk, Forschungsinstitut f. Mathematik u. Mechanik.

---

[7]) Man zerlegt die Funktion in den Real- und den Imaginärteil und schließt dann in einer analogen Weise, wie dies bei einem ähnlichen Hilfssatz [Math. Annalen **104** (1931), S. 617—619] geschehen ist.

(Eingegangen am 30. Januar 1934.)

Transformationsformeln gewisser Besselscher Reihen, Beziehungen zu Zeta-Funktionen.

Von

Hermann Kober in Breslau.

Herr Watson hat in der Abhandlung „Some self-reciprocal functions" (The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford 1931, S. 300) bewiesen:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}nz\right)^{\nu}K_{\nu}(nz)+\tfrac{1}{2}\Gamma(\nu)$$

$$=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)z^{2\nu}\cdot\left[\frac{1}{z^{2\nu+1}}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(z^2+4n^2\pi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{m=0}^{M-1}\binom{-\nu-\frac{1}{2}}{m}\frac{z^{2m}}{(2n\pi)^{2\nu+2m+1}}\right\}+2\sum_{m=0}^{M-1}\binom{-\nu-\frac{1}{2}}{m}\frac{z^{2m}\,\zeta(2\nu+2m+1)}{(2\pi)^{2\nu+2m+1}}\right]$$

für $\Re(z)>0$, $\Re(\nu)>-M$, ausgenommen $\nu=0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\ldots$. Setzt man hier $z=2\pi u$, $M=1$, $s=2\nu+1$, so folgt:

$$(1)\quad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^{-s}-(u^2+n^2)^{-\frac{s}{2}}\right\}$$

$$+\frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\cdot u^{\frac{1-s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{s-1}{2}}K_{\frac{s-1}{2}}(2n\pi u)-\frac{u^{-s}}{2}+\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)u^{1-s}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

für $\Re(u)>0$, $\sigma>-1$, wenn $s=\sigma+it$ ist. Man erhält also hier eine Darstellung von $\zeta(s)$ für $\sigma>-1$ mit dem willkürlichen Parameter u, hieraus natürlich auch, wenn man statt s die Größe $1-s$ einführt und die Riemannsche Funktionalgleichung benutzt, eine ähnliche in der Halbebene $\sigma<2$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{s-1}{2}}K_{\frac{s-1}{2}}(2n\pi u)$ konvergiert gut, da bei festem ν stets $K_{\nu}(2\pi u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}e^{-2\pi u}\left(1+O\left(\frac{1}{u}\right)\right)$ für $|\arg u|<\frac{3\pi}{2}$ ist. Die Formel, von der Herr Watson ausgeht (S. 299),

$$(2)\quad \tfrac{1}{2}\Gamma(\nu)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nz}{2}\right)^{\nu}K_{\nu}(nz)=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)z^{2\nu}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z^2+4n^2\pi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}},$$

läßt sich nun verallgemeinern. Setzt man wieder $z = 2\pi u$, so ist nämlich:

$$(2a)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_\nu(2\pi u|n+\alpha|)|n+\alpha|^\nu e^{2\pi i\beta(n+\alpha)} = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,u^\nu}{2\pi^{\nu+\frac{1}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\alpha n}}{\{(n+\beta)^2+u^2\}^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

für $\Re(u) > 0$, β reell, $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ im Falle $0 < \alpha < 1$; für $\Re(\nu) > 0$ im Falle $\alpha = 0$.

Herr Doetsch hat im 1. Hefte der „Compositio Mathematica" in seiner Arbeit über „Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen ..." für $\nu > 0$, $0 < v < 1$, $x > 0$ und $\neq 2m\pi$ bewiesen:

$$(3)\qquad 2^{\nu-1}x^\nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_\nu((n+v)x)(n+v)^{-\nu} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(x^{2\nu-1} + 2\sum_{1}^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(x^2-4m^2\pi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos 2\pi m v\right).$$

Außer dieser sehr schönen Formel nun, die übrigens auch für $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ besteht und durch die für $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, $x > 0$, α, β reell, $x \pm \beta$ nicht $\equiv 0 \pmod 1$ gültige Formel [für $\alpha = 0$ ist links im Gliede $n = 0$ der Grenzwert $\pi x^\nu/\Gamma(\nu+1)$ zu nehmen]

$$(3a)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_\nu(2\pi x(n+\alpha))}{(n+\alpha)^\nu} e^{2\pi i\beta(n+\alpha)} = \frac{x^{-\nu}\pi^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \sum_{|n+\beta|<x} e^{-2\pi i\alpha n}\{x^2-(n+\beta)^2\}^{\nu-\frac{1}{2}}$$

verallgemeinert werden kann, besteht aber noch eine andere ähnliche, die jedoch rechts eine unendliche Reihe enthält:

$$(4)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_\nu(2\pi x|n+\alpha|)|n+\alpha|^{\nu-1}(n+\alpha)e^{2\pi i\beta(n+\alpha)} = ix^\nu\frac{\pi^{-\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \sum_{|n+\beta|>x} \frac{e^{-2\pi i n\alpha}\operatorname{sign}(n+\beta)}{\{(n+\beta)^2-x^2\}^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

für $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < +\frac{1}{2}$, $x > 0, \alpha, \beta$ reell, $x \pm \beta$ nicht $\equiv 0 \pmod 1$ mit einer kleinen Abänderung im Sonderfalle $\alpha \equiv 0 \pmod 1$.

Herr Watson hat die Ausgangsformel (2) durch die Poissonsche Summenformel bewiesen, indem er die Fourier-Transformation benutzte:

$$(2,1)\qquad \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}tz\right)^\nu K_\nu(tz)\cos at\,dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})z^{2\nu}}{2(z^2+a^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}.$$

Entsprechend beruht die Formel des Herrn Doetsch auf der Transformation

$$(3,1)\qquad \int_0^\infty x^{-\nu} J_\nu(x)\cos xy\cdot dx$$

$$= \frac{2^{-\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)}(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \text{ für } 0<y<1,\ =0 \text{ für } y>1,$$

die Formel (4) auf der Transformation:

$$(4,1)\qquad \int_0^\infty x^{\nu} J_\nu(x)\sin xy\cdot dx$$

$$= \frac{2^{\nu}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}(y^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}} \text{ für } y>1,\ =0 \text{ für } 0<y<1.$$

Ganz andersartige Ergebnisse erhalte ich nun, wenn ich $K_\nu(x) = K_\nu(x_1\cdot x_2)$, $J_\nu(x) = J_\nu(x_1\cdot x_2)$, wobei $x = x_1 x_2$ gesetzt ist, als Funktionen von zwei Variablen auffasse und die entsprechende Poissonsche Summenformel in zwei Variablen anzuwenden suche. Die hier notwendigen Fourierschen Transformationsformeln sind verblüffend einfach. Es ergeben sich nämlich für $-\frac{1}{2}<\Re(\nu)<\frac{1}{2}$, $y_1>0$, $y_2>0$ die Gleichungen

$$(5,1)\qquad 4\int_0^\infty\int_0^\infty K_\nu(2\pi x_1 x_2)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\nu \cos 2\pi x_1 y_1\cdot\cos 2\pi x_2 y_2\cdot dx_1\,dx_2$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^\nu K_\nu(2\pi y_1 y_2),$$

$$(7,1)\qquad 4\int_0^\infty\int_0^\infty J_\nu(2\pi x_1 x_2)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\nu \cos 2\pi x_1 y_1\cdot\sin 2\pi x_2 y_2\cdot dx_1\,dx_2$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^\nu J_{-\nu}(2\pi y_1 y_2),$$

und wenn man $K_0(x) = K_0(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4)$ als Funktion von vier Variablen auffaßt,

$$16\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty K_0\left(4\pi\sqrt{x_1x_2x_3x_4}\right)\cos 2\pi x_1 y_1\cdot\cos 2\pi x_2 y_2$$
$$\cdot\sin 2\pi x_3 y_3\cdot\sin 2\pi x_4 y_4\cdot dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$$
$$= K_0\left(4\pi\sqrt{y_1y_2y_3y_4}\right)$$

und noch andere, die Herr Watson, dem ich sie mitteilte, noch erheblich verallgemeinert hat. Betrachtet man etwa die erste dieser Formeln für $\nu=0$, so fällt sofort die Analogie zu den Formeln auf

$$2\int_0^\infty e^{-\pi x^2}\cos 2\pi xy\,dx = e^{-\pi y^2},\quad 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\pi(x_1^2+x_2^2)}\cos 2\pi x_1 y_1$$
$$\cdot\cos 2\pi x_2 y_2\cdot dx_1\,dx_2$$
$$= e^{-\pi(y_1^2+y_2^2)}.$$

Es entspricht also die Funktion $K_0(2\pi x_1 x_2)$ ebenso wie die Funktion $e^{-\pi(x_1^2+x_2^2)}$ durch die obige Fourier-Transformation mit zwei Variablen sich selbst. Nun beruht aber auf dieser Selbst-Reziprozität die lineare Transformation der Thetareihe; also kann man für die doppelt-unendlichen K_ν-Reihen etwas Ähnliches erwarten. Und in der Tat ergibt sich eine weitgehende Analogie! Es sei, der Einfachheit halber, $u > 0$, v reell; w sei beliebig komplex; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien ganze Zahlen, $\alpha\delta - \gamma\beta = \varepsilon = \pm 1$, sonst beliebig, $z = v + iu$, $z^* = v^* + \varepsilon i u^*$,

$$(5) \qquad \Theta(u, v, w) = \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_2=1}}^{\infty\ \infty} \cos 2\pi v m_1 m_2 K_w(2\pi u m_1 m_2) \cdot \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^w$$

$$+ \tfrac{1}{4} u^w \Gamma(w + \tfrac{1}{2}) \pi^{-w-\frac{1}{2}} \zeta(2w+1) + \tfrac{1}{4} u^{-w} \Gamma(w) \pi^{-w} \zeta(2w),$$

so ist $\Theta(u, v, w)$ in w im Endlichen überall regulär bis auf zwei einfache Pole in den Punkten $w = +\frac{1}{2}, w = -\frac{1}{2}$, es ist ferner

$$\sqrt{u} \cdot \Theta(u, v, w) = \sqrt{u^*}\, \Theta(u^*, v^*, w),$$

wobei

$$u^* = \frac{u}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma v + \gamma^2(u^2+v^2)}, \qquad v^* = \frac{\alpha\beta + v(\alpha\delta + \gamma\beta) + v^2\gamma\delta + u^2\gamma\delta}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma v + \gamma^2(u^2+v^2)}.$$

Man kann diese Transformationsformeln in eine zusammenfassen, da auch u^* und v^* reell sind:

$$z^* = (\delta z + \beta)/(\gamma z + \alpha).$$

Es ergeben sich noch weitere Transformationen und nahe Beziehungen zur Kroneckerschen Zetafunktion zweiten Grades, wie überhaupt Verbindungen mit Zetafunktionen der verschiedensten Art bei den hier betrachteten Besselschen Reihen auftreten (Formel 1, 1a, 5a, u. a.). Zum Beweise der Sätze werde ich nun nicht die Poissonsche Formel oder die Sätze von Müntz („Der Summensatz von Cauchy ...“, Math. Annalen 1923, Bd. 90, S. 279 u. f.) benutzen; denn die Prüfung der Stetigkeitsbedingungen ist in manchen Fällen umständlich, in manchen Fällen aber sind die Bedingungen überhaupt nicht erfüllt und die Müntzschen Sätze daher gar nicht anwendbar, es treten daher bei den Reihen dann auch zusätzliche Glieder auf.

I. Die Verallgemeinerung der Watsonschen Formel.

Es sei α nicht $\equiv 0 \pmod 1$, also, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $0 < \alpha < 1$, $\Re(u) > 0$, $|\Im(\log u)| < \frac{\pi}{2}$; es sei zunächst u reell — statt v schreibe ich: w —, dann ist für $v > 0$

$$K_w(v) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{v}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)} x^{-w-1}\, dx = \frac{v^{-w}}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2x} - \frac{x}{2}} x^{w-1}\, dx;$$

ist $x = \frac{v}{x'}$ gesetzt,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_w(2\pi u\,|\,n+\alpha|)\,|\,n+\alpha\,|^w\, e^{2\pi i\beta(n+\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(2\pi u)^{-w}}{2}\, e^{2\pi i\beta(n+\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{w-1}\, e^{-\frac{2}{x}u^2\pi^2(n+\alpha)^2}\, dx.$$

Da nun, wenn ich $F_n = \frac{1}{2}(2\pi u)^{-w}\, e^{2\pi i\beta(n+\alpha)}\, e^{-\frac{x}{2}} x^{w-1}\, e^{-\frac{2}{x}u^2\pi^2(n+\alpha)^2}$ setze, die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n$ gleichmäßig in x in jedem Intervalle $0 < x_0 \leqq x \leqq X_0$ konvergiert, kann man in jedem solchen Intervalle Integration und Summation vertauschen; ersetzt man ferner auf der linken Seite w durch $\Re(w)$, β durch 0, so bleibt die linke Seite konvergent, die dann entsprechende rechte wird $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |F_n|\, dx$, also kann ich auch im Intervalle $0 \ldots \infty$ die Vertauschung vornehmen. Nun ist aber auf Grund der linearen Transformation der Theta-Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{x}u^2\pi^2(n+\alpha)^2 + 2\pi i\beta(n+\alpha)} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{x}{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x}{2u^2}(n+\beta)^2 - 2\pi i n\alpha}$$

Vertauscht man wieder Summation und Integration, so folgt rechts:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(2\pi u)^{-w}}{2u\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-2\pi i n\alpha - \frac{x}{2}\left(1+\frac{(n+\beta)^2}{u^2}\right)} \cdot x^{w-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})u^w}{2\pi^{w+\frac{1}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\alpha n}}{\{(n+\beta)^2+u^2\}^{w+\frac{1}{2}}}.$$

Die Vertauschung von Summation und Integration war hier zunächst in jedem Intervalle $0 < x_0 \leqq x \leqq X_0$, dann aber, da die rechts entstehende Reihe für $\Re(w) > 0$ absolut konvergiert, auch im Intervalle $0 \ldots \infty$ gestattet. Die Formel stimmt somit für $R(w) > 0$. Nun ist aber $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\alpha n}}{\{(n+\beta)^2+u^2\}^{w+\frac{1}{2}}}$ eine reguläre Funktion von w für $\Re(w) > -\frac{1}{2}$, die linke Seite der zu beweisenden Formel aber ist sogar eine ganze Funktion von w, somit ist die Formel zunächst für $u > 0$ bewiesen. Nun sind aber beide Seiten bei festem w, $\Re(w) > -\frac{1}{2}$, reguläre Funktionen von u für $\Re(u) > 0$, so folgt die Behauptung. — Nun noch der Fall $\alpha = 0$. Dann ist, da $\Sigma\{(n+\beta)^2+u^2\}^{-w-\frac{1}{2}}$ eine reguläre Funktion von w nur für $\Re(w) > 0$ ist, eine Einschränkung in diesem Sinne erforderlich,

das Glied mit $n = 0$ der linken Seite wird auf Grund eines leichten Grenzprozesses $= \frac{1}{2}(\pi u)^{-w}\Gamma(w)$, man erhält

$$(2\,\mathrm{b}) \qquad \frac{u^{-w}}{4\pi^w}\Gamma(w) + \sum_{n=1}^{\infty} K_w(2\pi n u)\, n^w \cos 2\pi n\beta$$

$$= \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})\, u^w}{4\pi^{w+\frac{1}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{(n+\beta)^2 + u^2\}^{-w-\frac{1}{2}}$$

für $\Re(w) > 0$, $\Re(u) > 0$.

Aus der Formel 2a) und der daraus durch Differenzieren nach β abgeleiteten erhält man mit Herrn Watsons Methode (l. c., S. 300, $M = 1$) schließlich für die Funktion $\zeta(s;a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$ für $0 < a < 1$

$$(1\,\mathrm{a}) \quad \zeta(s;a) + \zeta(s;1-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{(n+a)^{-s} - ((n+a)^2+u^2)^{-\frac{s}{2}}\right\}$$

$$+ \frac{4\pi^{\frac{s}{2}}\, u^{\frac{1-s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{s-1}{2}} K_{\frac{s-1}{2}}(2n\pi u)\cos 2\pi n a + \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) u^{1-s}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)},$$

$$\zeta(s;a) - \zeta(s;1-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{n+a}{|n+a|^{s+1}} - \frac{n+a}{((n+a)^2+u^2)^{\frac{s+1}{2}}}\right\}$$

$$+ \frac{4\pi^{\frac{s+1}{2}}\, u^{1-\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{s}{2}} K_{\frac{s}{2}-1}(2n\pi u)\sin 2\pi n a,$$

gültig für $\Re(u) > 0$ in der Halbebene $\sigma > -1$.

II. Die J_ν-Reihen.

Herr Watson hatte mir zu der eben bewiesenen Formel einen zweiten Beweis mitgeteilt; die von ihm hierbei angewandte schöne Methode benutze ich jetzt zum Beweise der Formel (4). Der Beweis der Formel (3), der in ganz ähnlicher Weise erfolgen kann, soll hier unterbleiben; aus ihr kann man durch Differenzieren nach β eine weitere erhalten. — Es sei zunächst $0 < w < \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < 1$ (oder $\alpha \not\equiv 0 \pmod 1$); $x \pm \beta$ sei immer nicht $\equiv 0 \pmod 1$, ich kann also den Abstand jeder der Zahlen $x \pm \beta$ von der bezüglich nächsten ganzen Zahl $\geqq \delta > 0$ annehmen. Dann ist:

$$J_w(ax)\cdot x^w = \frac{2^{w+1}\, a^{-w}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-w)} \int_1^{\infty} (y^2-1)^{-w-\frac{1}{2}} \sin a x y \cdot dy$$

für $a > 0$, $x > 0$, $-\frac{1}{2} < \Re(w) < \frac{1}{2}$ (folgt z. B. aus Formel (4. 1)).

$$x^w \cdot \sum_{n=-N}^{+N} J_w(2\pi x|n+\alpha|)\,|n+\alpha|^w e^{2\pi i n\beta} \cdot \operatorname{sign}(n+\alpha)$$

$$= \frac{2\pi^{-w-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-w)} \int_1^\infty \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n\beta} \cdot \sin 2\pi x y (n+\alpha) \cdot (y^2-1)^{-w-\frac{1}{2}}\, dy,$$

wobei $a = 2\pi|n+\alpha|$ gesetzt ist. Setzt man weiter $y = \frac{u}{x}$, so wird

$$\int_1^\infty \sum_{-N}^{N} = x^{2w} \cdot \int_x^\infty (u^2-x^2)^{-w-\frac{1}{2}}\, du \sum_{-N}^{N} \sin 2\pi u (n+\alpha) \cdot e^{2\pi i n\beta}.$$

Setzt man nun $f(u) = \dfrac{x^{2w}}{(u^2-x^2)^{w+\frac{1}{2}}}$ für $u > x$, $f(u) = -f(-u)$ für $u < -x$, $f(u) = 0$ für $-x \leqq u \leqq x$, so wird

$$\sum_{-N}^{N} = \frac{1}{2i}\left\{e^{2\pi i\alpha u} \cdot \frac{\sin\pi(u+\beta)(2N+1)}{\sin\pi(u+\beta)} - e^{-2\pi i\alpha u} \cdot \frac{\sin\pi(u-\beta)(2N+1)}{\sin\pi(u-\beta)}\right\},$$

$$\int_1^\infty = \frac{1}{2i}\int_x^\infty f(u)\, e^{2i\pi\alpha u} \frac{\sin\pi(u+\beta)(2N+1)}{\sin\pi(u+\beta)} \cdot du$$

$$- \frac{1}{2i}\int_x^\infty f(u)\, e^{-2i\pi\alpha u} \frac{\sin\pi(u-\beta)(2N+1)}{\sin\pi(u-\beta)}\, du$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{-x-\beta} f(-v-\beta)\, e^{-2\pi i\alpha(v+\beta)} \frac{\sin\pi v\,(2N+1)}{\sin\pi v}\, dv$$

$$- \frac{1}{2i}\int_{x-\beta}^{\infty} f(v+\beta)\, e^{-2\pi i\alpha(v+\beta)} \frac{\sin\pi v\,(2N+1)}{\sin\pi v}\, dv,$$

wobei im ersten Integral $u = -v-\beta$, im zweiten $u = v+\beta$ substituiert wird. Da aber für $v < -x-\beta$, also $v+\beta < -x$ doch $f(-v-\beta) = -f(v+\beta)$, für $-x-\beta < v < x-\beta$ aber $f(v+\beta) = 0$

$$\int_1^\infty = -\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f(v+\beta) \frac{\sin\pi v\,(2N+1)}{\sin\pi v}\, e^{-2\pi i\alpha(v+\beta)}\, dv$$

$$= -\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(v+\beta) \frac{\sin\pi v\,(2N+1)}{\sin\pi v}\, dv,$$

wobei $f_2(u) = e^{-2i\pi\alpha u} \cdot f(u)$ ist. Nun ist aber hier für $0 < w < \frac{1}{2}$, da die Unstetigkeit der Funktion f_2 an den Stellen $v = -\beta \pm x$ leicht

durch eine Abrundung dort zu beheben ist, die Dirichletsche Formel anwendbar

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2N+1)\pi u}{\sin\pi u}\,du\,f_3(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_3(n),$$

also folgt für $x>0$, $x\pm\beta$ reell, aber nicht $\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,1)$, $0<w<\frac{1}{2}$, $0<\alpha<1$, $f_3(u)=f_2(u+\beta)$

$$(4)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_w(2\pi x|n+\alpha|)\,|n+\alpha|^{w-1}(n+\alpha)\,e^{2\pi i n\beta}$$
$$=\frac{i\pi^{-w-\frac{1}{2}}x^w}{\Gamma(\frac{1}{2}-w)}\sum_{|n+\beta|>x}\frac{e^{-2\pi i\alpha(n+\beta)}\,\mathrm{sign}\,(n+\beta)}{((n+\beta)^2-x^2)^{w+\frac{1}{2}}}.$$

Die rechte Seite aber ist, da die Reihe für $\Re(w)>-\frac{1}{2}$ und sogar für $\Re(w)\geqq w_0>-\frac{1}{2}$ gleichmäßig in w konvergiert, eine für $\Re(w)>-\frac{1}{2}$ reguläre Funktion von w. Die Reihe auf der linken Seite konvergiert für $\Re(w)<\frac{1}{2}$, $x\pm\beta\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,1)$, wegen $J_w(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\left(w+\frac{1}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$ für $z>1$ bei $|w|<A$ und stellt eine für $\Re(w)<\frac{1}{2}$ reguläre Funktion dar. Also gilt die Gleichung (4) für $-\frac{1}{2}<\Re(w)<\frac{1}{2}$ und gibt zwei verschiedene Darstellungen für dieselbe ganze Funktion von w, eine für $\Re(w)<\frac{1}{2}$, eine für $\Re(w)>-\frac{1}{2}$.

Im Falle $\alpha=0$ — oder, was dasselbe ist, $\alpha\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,1)$ — muß man von vornherein das Glied $n=0$ (bzw. $n=-\alpha$) weglassen, und wir erhalten durch dieselbe Herleitung für $0<\Re(w)<\frac{1}{2}$

$$(4\,\mathrm{b})\qquad \sum_{n=1}^{\infty}J_w(2\pi n x)\,n^w\cdot\sin 2\pi n\beta$$
$$=\frac{\pi^{-w-\frac{1}{2}}x^w}{2\,\Gamma(\frac{1}{2}-w)}\left\{\sum_{n>x-\beta}((n+\beta)^2-x^2)^{-w-\frac{1}{2}}-\sum_{n<-x-\beta}((n+\beta)^2-x^2)^{-w-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Faßt man auf der rechten Seite für $|n|>x+|\beta|$ je die zwei Glieder mit absolut gleichem Werte von n zusammen, so erhält man auch hier eine für $-\frac{1}{2}<\Re(w)<\frac{1}{2}$ gültige Gleichung.

III. Reziprozitätsformeln.

Die Formel (2,1) (S. 610) von Watson gilt für $\Re(\nu)>-\frac{1}{2}$. Setzt man wieder statt ν die Größe w, $a=2\pi y_1$, $t=x_1$, $z=2\pi x_2$ in (2, 1) ein und dividiert man die Gleichung durch $\pi^w x_2^{2w}$, so folgt

$$2\int_0^{\infty}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^w K_w(2\pi x_1 x_2)\cos 2\pi x_1 y_1\cdot dx_1=\frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{2\pi^{w+\frac{1}{2}}}(x_2^2+y_1^2)^{-w-\frac{1}{2}}.$$

Vertauscht man x_1 mit y_2, x_2 mit y_1 und wendet man auf die so entstehende Gleichung Fouriers Umkehrungsformel an, so folgt:

$$\frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{\pi^{w+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{\cos 2\pi x_2 y_2 \cdot d x_2}{(x_2^2+y_1^2)^{w+\frac{1}{2}}} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^w K_w(2\pi y_1 y_2).$$

Folglich ist für $\Re(w) > -\frac{1}{2}$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, wenn man zuerst nach x_1 integriert:

$$(5,1)\quad 4\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^w K_w(2\pi x_1 x_2)\cos 2\pi x_1 y_1 \cdot \cos 2\pi x_2 y_2 \cdot d x_1 d x_2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^w K_w(2\pi y_1 y_2), \quad \text{q. e. d.}$$

Ersetzt man in dieser Formel w durch $-w$, vertauscht man x_1 mit x_2, y_1 mit y_2 und berücksichtigt, daß $K_{-w} = K_w$ ist, so erhält man dieselbe Formel, aber bei vertauschter Reihenfolge der Integrationen, und die 2. Bedingung $\Re(-w) > -\frac{1}{2}$ oder $\Re(w) < \frac{1}{2}$.

Zum Beweise der Formel (7,1) gehe ich von der Formel (3,1) aus, indem ich dort $x = 2\pi x_1 x_2$, $y = \frac{y_1}{x_2}$ setze und mit $(2\pi)^{w-1} x_2^{2w-1}$ multipliziere:

$$(7,2)\quad \int_0^\infty \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^w J_w(2\pi x_1 x_2)\cos 2\pi x_1 y_1 \cdot d x_1 = \frac{\pi^{w-\frac{1}{2}}}{2\Gamma(w+\frac{1}{2})}(x_2^2-y_1^2)^{w-\frac{1}{2}} \quad \text{für } y_1 < x_2,$$
$$= 0 \quad \text{für } y_1 > x_2.$$

In der Formel (4,1) setze ich $y = \frac{x_2}{y_1}$, $x = 2\pi y_1 y_2$, $d x = 2\pi y_1 \cdot d y_2$, multipliziere mit $y_1^{-2w-1} \cdot (2\pi)^{-1-w}$, so ist

$$(7,3)\quad \int_0^\infty \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^w J_w(2\pi y_1 y_2)\sin(2\pi y_2 x_2)\cdot d y_2 = \frac{\pi^{-w-\frac{1}{2}}}{2\Gamma(\frac{1}{2}-w)}(x_2^2-y_1^2)^{-w-\frac{1}{2}} \quad \text{für } x_2 > y_1,$$
$$= 0 \quad \text{für } x_2 < y_1.$$

Nun schreibe ich in der letzten Formel statt w jetzt $-w$ und wende die Fouriersche Sinus-Umkehrungsformel an, so folgt:

$$\frac{2\pi^{w-\frac{1}{2}}}{\Gamma(w+\frac{1}{2})}\int_{y_1}^\infty \frac{\sin 2\pi x_2 y_2}{(x_2^2-y_1^2)^{\frac{1}{2}-w}} d x_2 = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^w J_{-w}(2\pi y_1 y_2).$$

Wenn man jetzt (7,2) mit $4\sin 2\pi x_2 y_2$ multipliziert und nach x_2 von 0 bis ∞ integriert, folgt (7,1). Formel (3,1) gilt für $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, Formel (4,1) gilt für $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < \frac{1}{2}$, also ist der Satz für $|\Re(w)| < \frac{1}{2}$

bewiesen, aber nur, wenn man zuerst nach x_1, dann nach x_2 integriert. Um ihn auch bei Vertauschung der Integration zu beweisen, muß man entsprechend von (4, 1) ausgehen und (3, 1) durch die Fouriersche Cosinus-Formel umkehren, wobei in (3, 1) $v = -w$ zu setzen ist. Man erhält dieselbe Bedingung $|\Re(w)| < \frac{1}{2}$. Es soll noch einmal darauf hingewiesen werden, daß diese Reziprozitätssätze für die Beweise der jetzt folgenden Formeln nicht gebraucht werden, da der Poissonsche bzw. die Müntzschen Sätze hier nicht anwendbar sind, daß sie aber bei der Auffindung dieser Formeln, wie bereits oben gezeigt wurde, heuristischen Wert besitzen. Übrigens folgt allgemein formal, wenn

$$\begin{aligned} F(x \cdot y) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty f(u \cdot v) \cos 2\pi u x \cos 2\pi v y \, du \, dv \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty f(z) \cos 2\pi \frac{xz}{v} \cos 2\pi v y \frac{dv}{v} dz \qquad \left(u = \frac{z}{v}\right) \\ &= \int_0^\infty f(z) \, dz \, \tilde{\omega}(xyz), \end{aligned}$$

daß nach dem Fourierschen Umkehrungsprinzip entsprechend auch

$$f(z) = \int_0^\infty F(t) \, dt \, \tilde{\omega}(tz)$$

ist, wobei

$$\tilde{\omega}(xyz) = 4 \int_0^\infty \frac{dv}{v} \cos \frac{2\pi xz}{v} \cos 2\pi v y = 4 \int_0^\infty \frac{dv}{v} \cos 2\pi v \cdot \cos \frac{2\pi xyz}{v}$$

ist, daß daher

$$\tilde{\omega}(t) = 4 \int_0^\infty \frac{dv}{v} \cos 2\pi v \cdot \cos \frac{2\pi t}{v}$$

ein sogenannter „Fourier-Kern“ ist. Das gleiche Ergebnis gilt, wenn $|\Re(w)| < \frac{1}{2}$ ist, für die, bekanntlich durch Besselsche Funktionen darstellbare, Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(t) &= 4 t^{-w} \int_0^\infty \frac{dv}{v^{1-2w}} \cos 2\pi v \cdot \cos \frac{2\pi t}{v} \\ &= 4\pi^2 \sqrt{t} \int_0^\infty \frac{dv}{v} J_{-w-\frac{1}{2}}(2\pi v) J_{w-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi t}{v}\right), \end{aligned}$$

aus (5, 1) folgt schließlich, daß K_w in bezug auf diesen Kern eine „selbstreziproke“ Funktion ist. Folgender allgemeine Satz, den ich aber nicht streng, sondern nur formal beweisen kann, durch den viele bekannte

Kerne sich auf zwei einfachere zurückführen lassen (z. B. Hardy u. Titchmarsh, A class of Fourier kernels, Proceedings London M. S., **35**, S. 121 u. 122; Watson, l. c., S. 305, 308), liegt hier zugrunde: Wenn $\widetilde{\omega}_1(t)$ und $\widetilde{\omega}_2(t)$ Fourier-Kerne sind, ist auch $\widetilde{\omega}_3(t) = \int_0^\infty \frac{dv}{v}\,\widetilde{\omega}_1(v)\,\widetilde{\omega}_2\left(\frac{t}{v}\right)$ ein Fourier-Kern.

IV. Die doppelt unendlichen Reihen.

Ich setze in der Formel (2b), S. 614, die für $\Re(w) > 0$ gilt, statt u ein: mu, statt β: mv,

$$\sum_1^\infty K_w(2\pi m n u)\, n^w \cos 2\pi m n v$$

$$= -\frac{u^{-w}\Gamma(w)}{4\pi^w m^w} + \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})\,u^w m^w}{4\pi^{w+\frac{1}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{((n+mv)^2 + m^2u^2)^{w+\frac{1}{2}}}.$$

Ich dividiere durch m^w, schreibe links statt n, m jetzt m_1, m_2 und nehme $\Re(w) > \frac{1}{2}$ an; nun bilde ich die Summe über m_2 von $m_2 = 1$ bis $m_2 = \infty$.

$$\sum_{m_2=1}^\infty \sum_{m_1=1}^\infty \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^w K_w(2\pi m_1 m_2 u)\cos 2\pi v m_1 m_2 + \tfrac{1}{4} u^{-w}\frac{\Gamma(w)}{\pi^w}\zeta(2w)$$

$$= u^w \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{4\pi^{w+\frac{1}{2}}} \sum_{m_2=1}^\infty \sum_{m_1=-\infty}^\infty \frac{1}{((m_1+m_2 v)^2 + m_2^2 u^2)^{w+\frac{1}{2}}}.$$

Der Einfachheit halber sei $u > 0$, v beliebig reell angenommen. Die auf der linken Seite entstandene Doppelreihe ist in der ganzen w-Ebene im Endlichen — wegen $|K_w(2\pi z)| < c_w e^{-2\pi z}$ für $z > 1$ — absolut konvergent und außerdem gleichmäßig für $|\Re(w)| \leqq A$ bei beliebig gewähltem $A > 0$, weil bei reellem z

$$|K_w(z)| = \tfrac{1}{2}\left|\int_1^\infty e^{-\frac{z}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}(x^w + x^{-w})\frac{dx}{x}\right| \leqq K_A(z),$$

$$\left|\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^w\right| + \left|\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^w\right| \leqq \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^A + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^A,$$

also kann die Doppelreihe beliebig angeordnet werden und stellt eine ganze Funktion von w dar. Ebenso gilt von der Doppelreihe der rechten Seite, aber nur für $\Re(w) > \frac{1}{2}$, daß die Anordnung beliebig und daß sie in w dort regulär ist; ich setze $v = \frac{b}{a}$, $u^2 + v^2 = \frac{c}{a}$, wobei a beliebig > 0 angenommen ist, und schreibe daher die rechte Seite

$$u^w \cdot a^{w+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{8\pi^{w+\frac{1}{2}}} \sum{}'' (a m_1^2 + 2b m_1 m_2 + c m_2^2)^{-w-\frac{1}{2}},$$

wobei in Σ'' die Größe m_1 von $-\infty$ bis $+\infty$, m_2 von ± 1 bis $\pm\infty$ läuft. Nenne ich Σ' die Reihe, in der m_1 und m_2 alle ganzen Zahlen unabhängig durchlaufen und nur das Wertepaar $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ fehlt, so ist

$$\Sigma'' = \Sigma' - 2\,a^{-w-\frac{1}{2}}\,\zeta(2w+1)$$

Nun ist die Determinante der quadratischen Form (a, b, c)

$$D = b^2 - ac = -a^2u^2;$$

ich setze $\Delta = -D = a^2u^2$, so folgt schließlich

$$\text{(5a)}\quad \sum_{\substack{m_1=1\\ m_2=1}}^{\infty}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^w K_w(2\pi u m_1 m_2)\cos 2\pi v m_1 m_2$$

$$+\frac{1}{4}u^{-w}\frac{\Gamma(w)}{\pi^w}\zeta(2w) + \frac{1}{4}u^w\frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{\pi^{w+\frac{1}{2}}}\zeta(2w+1)$$

$$= u^{-\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{w}{2}+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{8\pi^{w+\frac{1}{2}}}\Sigma'(a m_1^2 + 2b m_1 m_2 + c m_2^2)^{-w-\frac{1}{2}}.$$

Auf der linken Seite steht die bereits oben (S. 612) eingeführte Funktion $\Theta(u, v, w)$. $\Sigma' = Z(a, b, c;\ 2w+1)$ ist die von Kronecker untersuchte Zetafunktion 2. Ordnung. Aus Gleichung (5a) folgt die Fortsetzbarkeit von Z über die ganze Ebene, aus $K_w = K_{-w}$ leicht die bekannte Funktionalgleichung von Z. Es seien nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier beliebige ganze Zahlen, die nur der Bedingung $\alpha\delta - \gamma\beta = \varepsilon = \pm 1$ genügen. Setzt man $m_1 = \alpha m_1' + \beta m_2'$, $m_2 = \gamma m_1' + \delta m_2'$, $z = v + iu$, $z^* = v + \varepsilon i u$,

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2;$$
$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta;$$
$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2,$$

so wird, wenn $\Delta' = a'c' - b'^2$ ist,

$$\Delta' = \Delta,\quad Z(a, b, c;\ 2w+1) = Z(a', b', c';\ 2w+1).$$

Setzt man nun

$$v^* = \frac{b'}{a'},\quad (u^*)^2\cdot a'^2 = \Delta'^2,\quad (u^*)^2 + (v^*)^2 = \frac{c'}{a'},$$

so ist entsprechend

$$\Theta(u^*, v^*, w) = (u^*)^{-\frac{1}{2}}\Delta'^{\frac{w}{2}+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{8\pi^{w+\frac{1}{2}}}Z(a', b', c';\quad 2w+1).$$

Setze ich in $v^* = \frac{b'}{a'}$ noch die Werte für b' und a' ein, berücksichtigt man weiterhin, daß $b = av$, $\Delta = a^2u^2$ ist u. s. f., so erhält man schließlich die Transformationsformeln des Satzes (5). Jede Transformation läßt

sich nun aus folgenden zusammensetzen, wenn jede mehrfach auftreten darf:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad u^* = u, \quad v^* = -v.$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad u^* = u, \quad v^* = v + 1.$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad u^* = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad v^* = \frac{v}{u^2 + v^2} \text{ oder } z z^* = 1.$$

Die ersten beiden sind der Eigenschaft der Cosinusfunktion wegen trivial; die dritte soll als die „reziproke" bezeichnet werden.

Im Falle $w = 0$ erhält man durch einen einfachen Grenzprozeß:

$$\Theta(u, v, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \cos 2\pi v n K_0(2\pi u n) + \frac{1}{4} \log \frac{u e^{\gamma}}{4\pi},$$

wobei $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n, γ die Eulersche Konstante ist.

Folgende einfache Beziehungen zur Riemannschen Zetafunktion bestehen:

Es sei $\sigma_a(n)$ die Summe der a. Potenzen der Teiler von n, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2w}(n)}{n^{s+w}} = \zeta(s + w)\zeta(s - w) = Z_w(s)$$

(siehe z. B. Titchmarsh, the theory of functions, Oxford 32, S. 315).

Setzt man

$${}_1\Theta(u, v, w) = \sum_{\substack{m_1=1\\ m_2=1}}^{\infty}\sum \cos 2\pi v m_1 m_2 K_w(2\pi u m_1 m_2)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^w$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2w}(n) n^{-w} \cos 2\pi v n K_w(2\pi u n),$$

so ist, da für $\sigma > |\Re(w)|$

$$\tfrac{1}{4}\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right) = \int_0^{\infty} du\, u^{s-1} K_w(2\pi u), \quad \text{für} \quad \sigma > 1 + |\Re(w)|$$

$$Z_w(s)\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right) = 4\int_0^{\infty} du \cdot u^{s-1}\, {}_1\Theta(u, 0, w),$$

und hieraus läßt sich durch Anwendung der „reziproken" Transformation für $v = 0$, $v^* = 0$, $u^* = u^{-1}$ nach dem klassischen, von Riemann bei der Zetafunktion unter Benutzung der reziproken ϑ-Transformation angewandten Verfahren [analog dem Verfahren bei Epstein, „Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen", Math. Annalen **56** (1903), S. 617 u. f.] die

Funktionalgleichung von $Z_w(s)$, die sonst elementar aus der von $\zeta(s+w)$ und von $\zeta(s-w)$ folgt, herleiten:

$$Z_w(s)\,\pi^{-s}\,\Gamma\left(\frac{s+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right) = f_w(s) = f_w(1-s).$$

Ebenso ist es möglich, umgekehrt aus dieser Funktionalgleichung die „reziproke" Transformation von $\Theta(u, v, w)$ im Spezialfalle $v = v^* = 0$ abzuleiten; aber auch den allgemeinen Fall kann man, von der Funktionalgleichung von $\zeta(s, \beta) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2i\pi\beta n}}{|n|^s}$ ausgehend, erhalten. Unsere Ausgangsformel (5a) kann man auch aus einer bei Epstein (S. 630) auftretenden wichtigen Formel, die Epstein zur Bestimmung von c_0 in der Reihenentwicklung

$$Z(a, b, c;\ s) = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}\,(s-2)} + c_0 + c_1(s-2)\ldots$$

aufstellt und benutzt, durch Einführung der Funktion K_w für gewisse bei Epstein auftretende Integrale erhalten.

Für $w = \pm\frac{1}{2}$ erhält man durch einen Grenzprozeß: die Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_1(n)}{n} \cos 2\pi v n \cdot e^{-2\pi u n} + \frac{\pi}{12}\,u - \frac{1}{4}\log u$$

bleibt durch die allgemeine Transformation $v^* = v^*(u, v)$, $u^* = u^*(u, v)$ des Satzes (5) ungeändert; es ist $\frac{\sigma_1(n)}{n} = \sigma_{-1}(n)$. Durch Differenzieren der so entstehenden Gleichung erhält man weitere Transformationsformeln. — Es soll nun noch eine ähnliche Funktion wie Θ betrachtet werden,

$$\Theta_2(u, v, w) = \sum_{\substack{m_1=1\\ m_2=1}}^{\infty}{}^{\infty} (-1)^{m_1 m_2} \cos \pi v m_1 m_2 \cdot K_w(\pi u m_1 m_2)\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^w$$

$$+ \frac{u^w\,\Gamma\left(w+\frac{1}{2}\right)\zeta(2w+1)}{2^{w+2}\pi^{w+\frac{1}{2}}} + \frac{u^{-w}\,\Gamma(w)\,\zeta(2w)}{\pi^w \cdot 2^{2-w}}. \tag{6}$$

Es ist auf Grund der Definitionsgleichung von Θ und (5a)

$$\Theta_2(u, v, w) = \Theta\left(\frac{u}{2},\ \frac{v+1}{2},\ w\right)$$

$$= u^{-\frac{1}{2}}\,\Delta^{\frac{w}{2}+\frac{1}{4}}\,\frac{\Gamma\left(w+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{w-2}}{\pi^{w+\frac{1}{2}}} \cdot \sum{}' \left(a m_{11}^2 + 2b m_{11} m_2 + c m_2^2\right)^{-w-\frac{1}{2}},$$

wobei die Summationsbuchstaben m_{11}, m_2 der Einschränkung unterliegen, daß $m_{11} - m_2$ stets eine gerade Zahl (oder 0) ist. Denn wenn man u durch $\frac{u}{2}$, v durch $\frac{v+1}{2}$ ersetzt, muß $\Delta = a^2 u^2$ durch $\frac{\Delta}{4}$ ersetzt werden,

$$a m_1^2 + 2b m_1 m_2 + c m_2^2 = a\left((m_1 + m_2 v)^2 + m_2^2 u^2\right)$$

durch

$$a\left((m_1+\tfrac{m_2}{2}\,v+\tfrac{m_2}{2})^2+m_2^2\,\frac{u^2}{4}\right)=\frac{a}{4}\left((m_{11}+m_2 v)^2+m_2^2 u^2\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(a m_{11}^2+2b m_{11} m_2+c m_2^2\right),$$

wobei $m_{11}=2m_1+m_2$ gesetzt ist, also $m_{11}-m_2$ stets gerade ist. Für die Transformation $\left(\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich hieraus leicht die Einschränkung, daß stets $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ gerade ist; dann ist auch

(6, 1) $$\sqrt{u}\,\Theta_2(u,v,w)=\sqrt{u^*}\,\Theta_2(u^*,v^*,w)$$

für jede Transformation $u^*=u^*(u,v)$, $v^*=v^*(u,v)$ des Satzes; für $w=\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sigma_{-1}(n)\cos\pi v n\cdot e^{-\pi u n}+\frac{\pi}{24}u-\frac{1}{4}\log u$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sigma_{-1}(n)\cos\pi v^* n\cdot e^{-\pi u^* n}+\frac{\pi}{24}u^*-\frac{1}{4}\log u^*.$$

Bezeichnet man die Doppelreihe in Θ_2 mit ${}_1\Theta_2(u,v,w)$, so ergibt sich nach einiger Rechnung noch eine weitere Beziehung zwischen ${}_1\Theta$ und ${}_1\Theta_2$ — also daraus auch zwischen Θ und Θ_2 —:

(6, 2) $${}_1\Theta_2(u,v,w)=(2^{1-w}+2^{1+w})\,{}_1\Theta(u,v,w)-{}_1\Theta\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2},w\right)$$
$$-2\cdot{}_1\Theta(2u,2v,w).$$

Es sei nun p eine Primzahl, es bedeute $\sigma'_{a,p}(n)$ den Wert $-\sigma_a(n)$ oder $(p-1)\sigma_a(n)$, je nachdem n durch p unteilbar oder teilbar ist.

Es sei allgemein

(6, 3) $$\Theta_p(u,v,w)=\frac{p-1}{4}\left(u^{-w}p^w\frac{\Gamma(w)\,\zeta(2w)}{\pi^w}+u^w p^{-w}\frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})\,\zeta(2w+1)}{\pi^{w+\frac{1}{2}}}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma'_{2w,p}(n)\cdot n^{-w}\cos\frac{2\pi v n}{p}\cdot K_w\left(\frac{2\pi u n}{p}\right),$$

es bedeute wieder hier ${}_1\Theta_p$ die Reihe $\sum_1^{\infty}$, dann ist entsprechend (6, 2)

(6, 4) $${}_1\Theta_p(u,v,w)=(p^{1-w}+p^{1+w})\,{}_1\Theta(u,v,w)-{}_1\Theta\left(\frac{u}{p},\frac{v}{p},w\right)$$
$$-p\cdot{}_1\Theta(pu,pv,w).$$

Hieraus und aus Gleichung (5a) läßt sich folgern:

(6a) $$\Theta_p(u,v,w)=u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Delta^{\frac{w}{2}+\frac{1}{4}}\,p^{w+1}\cdot\Gamma(w+\frac{1}{2})}{8\pi^{w+\frac{1}{2}}}$$
$$\cdot\left(\sum_1{}'(a m_1^2+2b m_1 m_2+c m_2^2)^{-w-\frac{1}{2}}+(p-1)\sum_{11}{}'\right),$$

wobei in $\sum_{\mathrm{I}}'$ die Größen m_1 und m_2 alle durch p unteilbaren, in $\sum_{\mathrm{II}}'$ alle durch p teilbaren Zahlen durchlaufen, ohne zugleich den Wert 0 anzunehmen. Wendet man hier wieder auf die quadratische Form (a, b, c) die zulässigen Transformationen an, die wieder Reihen von derselben Form entstehen lassen, so erhält man schließlich: Es ist

$$\sqrt{u}\,\Theta_p(u, v, w) = \sqrt{u^*}\,\Theta_p(u^*, v^*, w) \tag{6,11}$$

für alle Transformationen

$$u^* = \frac{u}{(\alpha + \gamma v)^2 + \gamma^2 u^2}, \quad v^* = \frac{(\alpha + v\gamma)(\beta + v\delta) + u^2\gamma\delta}{(\alpha + v\gamma)^2 + \gamma^2 u^2}, \quad \text{oder} \quad z^* = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \alpha},$$

wenn die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Bedingungen $\alpha\delta - \gamma\beta = \pm 1$, p ein gemeinschaftlicher Teiler entweder von α und δ oder von β und γ, genügen. — Die reziproke Transformation ist eine der zulässigen. Die Formel (6, 11) nimmt für $w = 0$, $w = \pm \frac{1}{2}$ wieder eine ganz einfache Gestalt an.

Die entsprechenden Untersuchungen bei J_ν-Reihen sollen hier unterbleiben; es treten anscheinend recht erhebliche Schwierigkeiten in der Frage der Konvergenz der Reihen auf.

(Eingegangen am 14. Juni 1934.)

Über den Mischalgorithmus bei analytischen Mittelwerten.

Von

Georg Aumann in München.

1. Einleitung. Die folgenden Bemerkungen haben den Zweck, die Untersuchungen von H. Geppert über die Iteration von analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen[1]), wie sie z. B. beim Gaußschen Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels zur Anwendung kommt[2]), in die allgemeine Theorie der analytischen Mittelwerte einzuordnen. Unter Benutzung der Ergebnisse meiner Arbeit über analytische Mittelwerte[3]), können wir mit ganz wenig Rechnung zeigen, daß der iterative Mischalgorithmus für n analytische Mittelwerte von n Argumenten stets konvergiert, und zwar sogar sehr rasch, und im Grenzwert wieder ein analytisches Mittel von n Argumenten liefert. Durch zwei Beispiele weisen wir dann noch auf das Problem hin, aus den analytischen Fortsetzungen und den Verzweigungen der gegebenen n analytischen Mittelwerte zu schließen auf die des durch den Mischalgorithmus entstehenden analytischen Mittelwertes.

2. Analytische Mittel. Ich erinnere kurz an die Definition und die wichtigsten Eigenschaften der analytischen Mittelwerte (siehe l. c.[3])).

Die in der Umgebung der Stelle $(a, \ldots, a)$ des Raumes der komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ reguläre, symmetrische Funktion $M(z_1, \ldots, z_n)$ heißt ein *analytisches Mittel in der Umgebung dieser Stelle*, wenn $M(z, \ldots, z) \equiv z$ ist.

Es gilt die Darstellung:

$$M(a+\zeta_1, \ldots, a+\zeta_n) = a + \frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{n} + \sum_{\nu<\mu} (\zeta_\nu - \zeta_\mu)^2 F(\zeta_\nu, \zeta_\mu; \zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu-1}, \zeta_{\nu+1}, \ldots, \zeta_{\mu-1}, \zeta_{\mu+1}, \ldots, \zeta_n), \tag{2, 1}$$

wobei $F(\zeta_1, \zeta_2; \zeta_3, \ldots, \zeta_n)$ eine in der Umgebung der Stelle $(0, \ldots, 0)$ reguläre, in ζ_1, ζ_2 für sich und in $\zeta_3, \ldots, \zeta_n$ für sich symmetrische Funktion ist.

---

[1]) H. Geppert, Über iterative Algorithmen I, Math. Annalen 107 (1933), S. 387—399; Über iterative Algorithmen II, Math. Annalen 108 (1933), S. 197—207).

[2]) L. v. Dávid, Arithmetisch-geometrisches Mittel und Modulfunktion, Journ. f. reine u. angew. Math. 159 (1928), S. 154—170; H. Geppert, Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels, Math. Annalen 99 (1928), S. 162—180.

[3]) G. Aumann, Grundlegung der Theorie der analytischen Mittelwerte, Sitz. Ber. Bay. Ak. 1934, S. 45—81.

Aus dieser Darstellung schließt man auf die Existenz einer Kreisscheibe $|z-a|<\varrho$ mit der Eigenschaft, daß für jedes System $z_1, \ldots, z_n$ mit $|z_\nu - a|<\varrho$ stets auch $|M(z_1, \ldots, z_n)-a|<\varrho$ gilt. Allgemein wollen wir ein schlichtes Gebiet G der z-Ebene ein *Grundgebiet von M* nennen, wenn mit jedem Satz $z_\nu < G$ auch der Punkt $z = M(z_1, \ldots, z_n)$ in G liegt. Man kann zeigen, daß jedes Grundgebiet eines analytischen Mittels *einfach zusammenhängend* ist. Da wir den Punkt $z = \infty$ niemals zum Grundgebiet rechnen wollen, so gibt es demnach zwei wesentlich verschiedene Typen von Grundgebieten: 1. das Grundgebiet ist mit dem Innern des Einheitskreises konform äquivalent (dann sprechen wir von einem *eigentlichen Grundgebiet*); 2. das Grundgebiet ist mit der ganzen (offenen) Ebene identisch (*uneigentliches Grundgebiet*). Mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas für analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen beweist man: Jede in einem kreisförmigen Grundgebiet von M enthaltene Kreisscheibe ist wieder Grundgebiet von M. Nach dieser und obiger Bemerkung besitzt jedes analytische Mittel unendlich viele, sogar unendlich viele kreisförmige Grundgebiete.

Beispiel: Für das arithmethische Mittel $\frac{z_1+\ldots+z_n}{n}$ ist jedes konvexe, echte Teilgebiet der z-Ebene (darunter die Kreisscheiben) eigentliches, die ganze (offene) z-Ebene uneigentliches Grundgebiet.

3. Der Mischalgorithmus. Nach diesen Vorbemerkungen beweise ich den

Satz 1. *$M_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, M_n(z_1, \ldots, z_n)$ seien n in der Umgebung der Stelle $(a, \ldots, a)$ analytische Mittel. Führt man den folgenden Algorithmus durch:*

$$z_\nu^{(0)} = z_\nu, \quad z_\nu^{(\lambda+1)} = M_\nu(z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_n^{(\lambda)}) \tag{3,1}$$

für

$$\nu = 1, \ldots, n; \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots,$$

so ist

$$\lim_{\lambda\to\infty} z_\nu^{(\lambda)} = M(z_1, \ldots, z_n) \tag{3, 2}$$

vorhanden, von ν unabhängig und stellt in der Umgebung der Stelle $(a, \ldots, a)$ ein analytisches Mittel dar.

In der Tat, nach 2. gibt es ein für alle M_ν gemeinsames kreisförmiges Grundgebiet $|z-a|<\varrho$. Setzt man dann gemäß einer Darstellung (2, 1) der M_ν

$$\alpha = 1 + \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,n} |F_\nu(0, \ldots, 0)|,$$

so läßt sich ein positives $\sigma < \frac{\varrho}{3}$ derart bestimmen, daß

$$(3, 3) \qquad \begin{cases} 2\sigma n(n-1)\alpha = \tau < 1 \\ \text{und } |F_\nu(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| < \alpha \end{cases}$$

gilt, sobald $|\zeta_\nu| < \sigma$ ist.

Für irgendein Wertsystem $z_1, \ldots, z_n$ mit $|z_\nu - a| < \sigma$ führen wir nun den Mischalgorithmus (3, 1) durch. Nach **2.** liegen dann alle $z_\nu^{(\lambda)}$ in $|z-a| < \sigma$. Für die Maximalabstände

$$\delta_\lambda = \operatorname*{Max}_{\mu,\, \nu = 1, \ldots, n} |z_\mu^{(\lambda)} - z_\nu^{(\lambda)}|$$

ergibt sich sofort $\delta_0 < 2\sigma$, allgemein aus (2, 1) und (3, 3)

$$\delta_{\lambda+1} < \delta_\lambda^2 \cdot 2 \cdot \binom{n}{2} \alpha = \delta_\lambda^2 \frac{\tau}{2\sigma},$$

woraus dann durch Induktion

$$(3, 4) \qquad \delta_\lambda < 2\sigma\tau^{2^\lambda - 1}$$

für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ folgt. Also ist wegen (3, 3)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \delta_\lambda = 0.$$

Bezeichnet K_λ die in $|z-a| < \varrho$ enthaltende Kreisscheibe $|z - z_1^{(\lambda)}| \leqq \delta_\lambda$, dann enthält K_λ die Punkte $z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_n^{(\lambda)}$, nach der schon des öfteren verwendeten Eigenschaft kreisförmiger Grundgebiete auch die Punkte $z_1^{(\lambda+1)}, \ldots, z_n^{(\lambda+1)}$, also auch $z_n^{(\lambda+2)}, \ldots, z_n^{(\lambda+2)}$ usw.; allgemein gilt für $\lambda_1 \leqq \lambda$, daß der Punktesatz $z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_n^{(\lambda)}$ im Durchschnitt D_{λ_1} der Kreisscheiben $K_0, \ldots, K_{\lambda_1}$ enthalten ist. Der Durchmesser von D_λ ist höchstens gleich $2\delta_\lambda$, konvergiert also gegen Null. Die absteigende Mengenfolge der D_λ hat daher einen einzigen gemeinsamen Punkt; dieser ist der Limes (3, 2), liegt in $|z-a| \leqq \sigma$ und ist unabhängig von ν. Wegen der beschränkten Konvergenz der Funktionenfolge $\{z_1^{(\lambda)}\}$ im Polyzylinder $|z_\nu - a| \leqq \sigma$ und wegen der Beschränktheit dieser Funktionen im Polyzylinder

$$(3, 5) \qquad |z_\nu - a| < \varrho, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

stellt der Limes (3, 2) eine in (3, 5) reguläre, symmetrische Funktion dar, für die offenbar $M(z, \ldots, z) \equiv z$ ist. Damit ist der Satz bewiesen; die Grenzfunktion $M(z_1, \ldots, z_n)$ nennen wir das *Mischmittel der Mittel* $M_1, \ldots, M_n$.

Aus (3, 4) geht unmittelbar hervor, daß die Konvergenz des Mischalgorithmus eine viel raschere ist, als die sogenannte geometrische Konvergenz.

4. Mittelabbildungen. Ist in der z-Ebene G gemeinsames eigentliches Grundgebiet von $M_1, \ldots, M_n$ (siehe **2.**), so kann man vermittels der Funktion $z = f(w)$ mit der Umkehrung $w = g(z)$ das Gebiet G schlicht und konform

auf $|w| < 1$ abbilden. Dann ist $|w| < 1$ gemeinsames Grundgebiet der analytischen Mittelwerte

$$N_\nu = g\left(M_\nu\left(f(w_1), \ldots, f(w_n)\right)\right),$$

der *Bildmittel* der $M_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$. Das Mischmittel N von $N_1, \ldots, N_n$ hat dann auch $|w| < 1$ als Grundgebiet. Rückabbildung von N ergibt

$$M = f\left(N\left(g(z_1), \ldots, g(z_n)\right)\right).$$

Eine einfache Überlegung lehrt, daß M identisch ist mit dem Mischmittel der $M_1, \ldots, M_n$, d. h., daß *Mittelmischung und Mittelabbildung vertauschbare Prozesse sind.* Wir haben damit den

Satz 2. *Ist G gemeinsames eigentliches Grundgebiet der analytischen Mittel $M_1, \ldots, M_n$ von n Argumenten, dann ist G auch Grundgebiet des zu $M_1, \ldots, M_n$ gehörigen, durch den Algorithmus* (3, 1), (3, 2) *definierten analytischen Mischmittels M.*

5. Funktionalgleichung. Aus dem Mischalgorithmus geht unmittelbar hervor, daß das Mischmittel die Funktionalgleichung

$$(5, 1) \qquad M(z_1, \ldots, z_n) = M\left(M_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, M_n(z_1, \ldots, z_n)\right)$$

erfüllt. Umgekehrt kommt man ausgehend von der Funktionalgleichung (5, 1) auf den Mischalgorithmus, von dem wir bereits wissen, daß er konvergiert, wenn die Funktionen $M_1, \ldots, M_n$ analytische Mittelwerte sind. Hieraus folgt der

Satz 3. *Ist G gemeinsames eigentliches Grundgebiet der analytischen Mittel $M_1, \ldots, M_n$, so gibt es genau ein analytisches Mittel $M(z_1, \ldots, z_n)$, das die Funktionalgleichung* (5, 1) *befriedigt; es ist das Mischmittel der Mittel $M_1, \ldots, M_n$ und hat G ebenfalls als Grundgebiet.*

6. Beispiele. 1. $\Re(z) > 0$ ist gemeinsames eigentliches Grundgebiet für das arithmetische Mittel $\frac{z_1 + z_2}{2}$ und das geometrische Mittel $\sqrt{z_1 z_2}$ (wobei man nur jenen Zweig betrachtet, für den $\sqrt{zz} = z$ ist). Das Mischmittel dieser beiden Mittel, das sogenannte arithmetisch-geometrische Mittel M besitzt dann nach Satz 2 ebenfalls $\Re(z) > 0$ als Grundgebiet. Der Zusammenhang von M mit der Modulfunktion ist bekannt[2]). Schon dieses Beispiel läßt erkennen, wie schwierig es im allgemeinen Fall sein dürfte, aus der Kenntnis der analytischen Fortsetzungen und Verzweigungen der Ausgangsmittel $M_1, \ldots, M_n$ zu schließen auf die des Mischmittels M.

2. Es wäre falsch zu glauben, die Transzendenz des Mischmittels M im Beispiel 1 rühre im wesentlichen von der Verzweigheit des geometrischen Mittels her. Nehmen wir z. B. die beiden Mittel

$$M_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad M_2 = \frac{z_1 + z_2}{2} + (z_1 - z_2)^2.$$

Offenbar ist die ganze (offene) Ebene gemeinsames uneigentliches Grundgebiet; eine leichte Rechnung ergibt, daß $|z| < \frac{1}{8}$ gemeinsames eigentliches Grundgebiet dieser beiden Mittel ist. Innerhalb dieses Kreises konvergiert also der Mischalgorithmus; man erhält das Mischmittel

$$M = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (z_1 - z_2)^{2^k}, \tag{6, 1}$$

das, wie man unmittelbar sieht, die Funktionalgleichung (5, 1) erfüllt. Für die Funktion (6, 1) ist aber bekanntlich $|z_1 - z_2| = 1$ natürliche Grenze; das Mischmittel ist also hochgradig transzendent, obwohl die beiden Ausgangsmittel ganze rationale Funktionen sind.

Das letzte Beispiel zeigt zugleich, daß in den Sätzen 2 und 3 die Voraussetzung, daß G ein *eigentliches* Grundgebiet ist, nicht zu entbehren ist.

(Eingegangen am 17. Juni 1934.)

Eine der Riemannschen verwandte Funktionalgleichung.

Von

Hermann Kober in Breslau.

Es sollen hier Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad F(s)\,\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-s} = F(1-s)\,\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-1}$$

ermittelt werden, wobei $s = \sigma + it$, $F(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ durch eine Dirichletsche Reihe $\Sigma A_n \cdot n^{-s}$ darstellbar, k ganz $\geqq 0$ ist. Hinreichende Bedingungen erhält man durch Lösung der Gleichung

$$(2) \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = C\,\varphi(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s-1}{2}}, \quad C \neq 0,$$

in der die Funktionen $f(s)$, $\varphi(s)$ folgenden Bedingungen genügen sollen: $f(s)$ darstellbar als absolut konvergente Reihe $\sum_1^\infty a_n n^{-s}$ für $\sigma > \sigma_1$, wobei $\sigma_1 < 2$, $\varphi(s) = \Sigma b_n n^{-s}$ für $\sigma > \sigma_2$, $f(s)$ sei Quotient aus einer ganzen Funktion von endlichem Geschlecht und einem Polynom. Dann ergibt sich aus Sätzen von Hamburger[1]) und Siegel[1]) als notwendig und hinreichend: Es muß für jedes $n \geqq 1$, jedes m, wenn $1 \leqq m < k$,

$$a_{n+k} = a_n, \quad a_m = a_{k-m}, \quad b_{n+k} = b_n, \quad b_m = b_{k-m}$$

sein, die a_n sind in diesem Spielraum völlig willkürlich wählbar, die b_n sind durch die a_n eindeutig bestimmt, $b_n = C^{-1} k^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \cos \frac{2n\nu\pi}{k}$.

Stellt man so irgendeine Funktion $f(s)$ dieser Art und die zugehörige $\varphi(s)$ her, so folgt aus (2) leicht, daß die Funktion — und ebenso jede Summe solcher Funktionen —

$$F(s) = f(s) \cdot \varphi(s),$$

also z. B.

$$F(s) = L(s, \chi) \cdot L(s, \bar{\chi})$$

eine Lösung von (1) ist; hierbei ist $\chi(n)$ irgendein eigentlicher Charakter mod $k > 2$, für den $\chi(-1) = \chi(+1) = 1$ ist, $\bar{\chi}(n)$ der konjugierte. Es

[1]) Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion, Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 240 u. f.; **11** (1921), S. 224 u. f.; **13** (1922), S. 283 u. f.; ferner Math. Annalen 85 (1922), S. 129 u. f.; Siegel, Bemerkungen dazu, Math. Annalen 86 (1922), S. 276 u. f.

sei nun k eine quadratfreie Zahl; dann läßt sich eine bestimmte Lösung dieser Art auf anderem Wege finden. So ist für $k = 2$ auch

$$F(s) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{d(n)}{n^s},$$

für $k = 3$ auch

$$F(s) = d(1) \cdot 1^{-s} + d(2) \cdot 2^{-s} - 2\,d(3) \cdot 3^{-s} + d(4) \cdot 4^{-s} \ldots$$

eine Lösung von (1). Denn bezeichnet man mit (α, n) den gemeinschaftlichen größten Teiler von α und n, mit φ die Eulersche, mit μ die Moebiussche Funktion, und schreibt man statt $\mu((\alpha, n))$, $\varphi((\alpha, n))$ einfacher $\mu(\alpha, n)$, $\varphi(\alpha, n)$, legt man den Funktionen $\mu(x)$, $\varphi(x)$, $d(x)$ für nicht ganzzahlige Werte von x den Wert 0 bei; so ist allgemeiner die Funktion

$$Z_k(s) = \sum_{n=1}^\infty \mu(n, k)\, \varphi(n, k)\, d(n)\, n^{-s} = \sum_{n=1}^\infty A_n \cdot n^{-s}$$

als Produkt zweier Funktionen $f(s)$ und $\varphi(s)$ darstellbar, welche jede durch eine für $\sigma > 1$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe darstellbar sind und zwischen denen Gleichung (2) besteht. Es sei also $k = p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_r$, $r \geqq 0$, alle p_r verschieden, dann ist

$$f(s) = \zeta(s) \prod_{m=1}^r (p_m^{\frac{1}{2}-s} - \sqrt{p_m} - \sqrt{p_m - 1}),$$

$$\varphi(s) = \zeta(s) \prod_{m=1}^r (p_m^{\frac{1}{2}-s} - \sqrt{p_m} + \sqrt{p_m - 1}),$$

$$F(s) = f(s) \cdot \varphi(s),$$

und es gilt (2).

Für $k = 1$ ist $r = 0$, $f(s) = \varphi(s) = \zeta(s)$, $F(s) = \varphi^2(s)$. Es braucht also nur gezeigt zu werden, daß der Satz, wenn er für eine quadratfreie Zahl k gilt, auch für $k \cdot p$ richtig ist, falls p irgendeine zu k teilerfremde Primzahl ist. Der Satz gelte also für k.

Aus Ramanujans Gleichung[2])

$$d(m \cdot n) = \sum_{\delta=1}^\infty \mu(\delta)\, d\left(\frac{m}{\delta}\right) d\left(\frac{n}{\delta}\right)$$

folgt leicht

$$d(n) - 2\,p\,d\left(\frac{n}{p}\right) + p\,d\left(\frac{n}{p^2}\right) = \mu(n, p)\, \varphi(n, p)\, d(n),$$

---

[2]) Collected Papers, Cambridge 27, S. 134.

da die rechte Seite $= d(n)$ oder $= (1-p)\,d(n)$ ist, je nachdem p in n nicht aufgeht oder aufgeht. Es ist ferner sicher, da $(k, p) = 1$,

$$\mu\left(\frac{n}{p^\alpha}, k\right)\cdot\varphi\left(\frac{n}{p^\alpha}, k\right) = \mu(n, kp)\cdot\varphi(n, kp)\cdot\frac{\mu(n, p)}{\varphi(n, p)} \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0,$$

falls $n\cdot p^{-\alpha}$ ganzzahlig ist, sonst $= 0$. Nun bilde ich die Funktion

$$\begin{aligned} &Z_k(s)\,(1 + p^{1-2s} - 2\,p^{1-s}) \\ &= \sum\frac{1}{n_s}\,(A_n + p\,A_{n/p^2} - 2\,p\,A_{n/p}) \\ &= \sum_1^\infty n^{-s}\left\{\mu(n, k)\,\varphi(n, k)\,d(n) + p\cdot\mu\left(\frac{n}{p^2}, k\right)\varphi\left(\frac{n}{p^2}, k\right)d\left(\frac{n}{p^2}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. - 2\,p\,\mu\left(\frac{n}{p}, k\right)\varphi\left(\frac{n}{p}, k\right)d\left(\frac{n}{p}\right)\right\} \\ &= \sum_1^\infty n^{-s}\,\mu(n, kp)\,\varphi(n, kp)\,\frac{\mu(n, p)}{\varphi(n, p)}\left\{d(n) + p\,d\left(\frac{n}{p^2}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. - 2\,p\,d\left(\frac{n}{p}\right)\right\} \\ &= \sum_1^\infty n^{-s}\,\mu(n, kp)\,\varphi(n, kp)\,d(n) = Z_{kp}(s). \end{aligned}$$

Hier bedeutete wieder für nichtganzzahliges a die Größe A_a den Wert 0. Nun ist aber

$$1 + p^{1-2s} - 2\,p^{1-s} = (p^{\frac{1}{2}-s} - \sqrt{p} - \sqrt{p-1})\,(p^{\frac{1}{2}-s} - \sqrt{p} + \sqrt{p-1}),$$

setzt man

$$f_1(s) = f(s)\,(p^{\frac{1}{2}-s} - \sqrt{p} - \sqrt{p-1}),\quad \varphi_1(s) = \varphi(s)\,(p^{\frac{1}{2}-s} - \sqrt{p} + \sqrt{p-1}),$$

so ist, da im Falle $k = 1$ die Funktionen $f(s)\cdot(s-1)$, $\varphi(s)\,(s-1)$ ganz sind, es auch die Funktionen $f_1(s)\,(s-1)$, $\varphi_1(s)\,(s-1)$, ferner sind f_1, φ_1 für $\sigma > 1$ durch absolut konvergente Dirichletsche Reihen darstellbar es ist

$$Z_{kp}(s) = f_1(s)\cdot\varphi_1(s)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \frac{f_1(s)}{\varphi_1(1-s)} &= \frac{f(s)}{\varphi(1-s)}\cdot\frac{p^{\frac{1}{2}-s} - \sqrt{p} - \sqrt{p-1}}{p^{s-\frac{1}{2}} - \sqrt{p} + \sqrt{p-1}} \\ &= \frac{f(s)}{\varphi(1-s)}\cdot p^{\frac{1}{2}-s}(-\sqrt{p} - \sqrt{p-1}) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}}\,p^{\frac{1}{2}-s}\cdot C_1 = \frac{C_1\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{kp}\right)^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{kp}\right)^{-\frac{s}{2}}} \end{aligned}$$

wobei $C_1 = -C(\sqrt{p} + \sqrt{p-1})$ ist, da ja zwischen $f(s)$ und $\varphi(1-s)$ die Gleichung (2) besteht.

Also ist $Z_{kp}(s)$ eine Lösung von (1) (für kp statt k) und hat die verlangte Eigenschaft, für $\sigma > \sigma_0 = 1$ durch eine Dirichletsche Reihe darstellbar zu sein. Bezeichnet man allgemeiner mit $Z_{k,w}(s)$ für beliebiges komplexes w und quadratfreies k die Funktion

$$Z_{k,w}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n,k)\,\varphi(n,k)\,\sigma_{2w}(n)\,n^{-s-w},$$

wobei $\sigma_\alpha(n)$ die Summe der α Potenzen der Teiler von n bedeutet, so ist die Funktion $Z_{k,w}(s)$ im Endlichen bis auf die einfachen Pole $s = 1 \pm w$ regulär und genügt der Funktionalgleichung

$$Z_{k,w}(s)\,\Gamma\left(\frac{s+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-s}$$
$$= Z_{k,w}(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s-w}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{s-1}.$$

Denn

$$Z_{1,w}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2w}(n)\,n^{-s} = \zeta(s+w)\cdot\zeta(s-w)\,[1]),$$

$$\sigma_{2w}(pn) = \sigma_{2w}(n)\,(1+p^{2w}) - p^{2w}\,\sigma_{2w}\left(\frac{n}{p}\right),$$

$$\sigma(n) - p\cdot\sigma\left(\frac{n}{p}\right)(1+p^{2w}) + p^{2w+1}\,\sigma\left(\frac{n}{p^2}\right) = \mu(n,p)\,\varphi(n,p)\,\sigma(n),$$

wenn $\sigma_{2w}(m)$ für nichtganzzahliges m den Wert 0 bedeutet; der weitere Beweis wird ganz ähnlich wie oben geführt.

---

[3]) Titchmarsh, Theory of functions, Oxford 32, S. 315.

(Eingegangen am 18. Juni 1934.)

Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen.

Von

Wolfgang Hahn in Berlin.

Unter einer „Kette" von Polynomen wollen wir ein System $p_0(x) = 1$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... von Polynomen der Grade 0, 1, 2, ... mit dem höchsten Koeffizienten 1 verstehen mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert eine im Intervall (r, s) definierte nichtnegative Funktion $\omega(x)$ derart, daß

$$\int_r^s \omega(x)\,dx > 0, \quad \int_r^s \omega(x)\,p_m(x)\,p_n(x)\,d(x) = 0 \qquad (m \neq n)$$

oder, was damit gleichbedeutend ist,

$$\int_r^s \omega(x)\,p_n(x)\,x^k\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Eigenschaften solcher Ketten — oft Systeme orthogonaler Polynome genannt — sind schon oft untersucht worden[1]). Man weiß, daß $p_n(x)$ lauter reelle, voneinander verschiedene Nullstellen hat, ferner, daß eine lineare dreigliedrige Rekursionsformel der Gestalt

$$p_n(x) = (x - a_n)\,p_{n-1}(x) - b_n\,p_{n-2}(x) \tag{1}$$

besteht. Wir wollen nun die Eigenschaften einer Kette untersuchen, die durch die Bedingung festgelegt ist, daß die normierten Ableitungen $\frac{1}{n}\,p_n'(x)$ wieder eine Kette unter Umständen mit abgeänderter Belegungsfunktion bilden. Es wird sich zeigen, daß die dadurch bestimmten Polynome bis auf lineare Transformationen entweder die sogenannten Jacobischen, die Laguerreschen oder die Hermiteschen Polynome sind. Es sind dies die interessantesten Kettenpolynome, die in vielen Arbeiten behandelt worden sind; sie lassen sich also durch eine scheinbar recht allgemeine rein formale Forderung kennzeichnen.

Da die normierten Ableitungen eine Kette bilden, tritt neben (1) die Formel

$$\frac{1}{n}\,p_n'(x) = (x - a_n')\,\frac{1}{n-1}\,p_{n-1}'(x) - \frac{b_n'}{n-2}\,p_{n-2}'(x). \tag{2}$$

[1]) Vgl. z. B. Courant-Hilbert, Methoden der math. Phys., Berlin 1924, S. 74; Abramesco, Les polynoms orthogonaux, Ann. Toulouse (3) 24 (1932); W. Hahn, Bericht über die Nullstellen der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome (erscheint im Jahresbericht der D. M.-V.), dort befinden sich weitere Literaturangaben.

Wir differenzieren (1) und erhalten unter Benutzung von (2) durch Elimination von $p'_{n-2}(x)$ bzw. $p'_n(x)$

$$\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n}\right)p'_n(x)=\left[\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\right)x-\frac{b'_n a_n}{n-2}+\frac{b_n a'_n}{n-1}\right]p'_{n-1}(x)+\frac{b'_n}{n-2}p_{n-1}(x), \tag{3}$$

$$\frac{1}{n}p_{n-1}(x)=\left(\frac{x}{(n-1)n}-\frac{a'_n}{n-1}+\frac{a_n}{n}\right)p'_{n-1}(x)-\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n}\right)p'_{n-2}(x). \tag{4}$$

Die letzte Formel, für $n+1$ angesetzt, ergibt

$$\frac{1}{n+1}p_n(x)=\left(\frac{x}{n(n+1)}-\frac{a'_{n+1}}{n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)p'_n(x)-\left(\frac{b'_{n+1}}{n-1}-\frac{b_{n+1}}{n+1}\right)p'_{n-1}(x). \tag{5}$$

Aus (3) und (5) eliminieren wir $p'_n(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n}\right)p_n(x)&=\left(\frac{x}{n(n+1)}-\frac{a'_{n+1}}{n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)\frac{b'_n}{n-2}p_{n-1}(x)\\&+\left[\left(\frac{x}{n(n+1)}-\frac{a'_{n+1}}{n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)\left(\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\right)x-\frac{b'_n a_n}{n-2}+\frac{b_n a'_n}{n-1}\right)\right.\\&\left.-\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n}\right)\left(\frac{b'_{n+1}}{n-1}-\frac{b_{n+1}}{n+1}\right)\right]p'_{n-1}(x).\end{aligned} \tag{6}$$

Wir differenzieren (6) und eliminieren $p'_n(x)$ mit Hilfe von (3); es folgt

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{x}{n(n+1)}-\frac{a'_{n+1}}{n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)\left(\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\right)x-\frac{b'_n a_n}{n-2}+\frac{b_n a'_n}{n-1}\right)\right.\\&\left.-\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n}\right)\left(\frac{b'_{n+1}}{n-1}-\frac{b_{n+1}}{n+1}\right)\right]p''_{n-1}(x)\\&+\left[\left(\frac{b'_n}{(n-2)n(n+1)}-\frac{n-2}{n(n+1)}\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\right)\right)x+\frac{n-1}{n(n+1)}\left(\frac{b'_n a_n}{n-2}-\frac{b_n a'_n}{n-1}\right)\right.\\&\left.+\left(\frac{2b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a'_{n+1}}{n}\right)\right]p'_{n-1}(x)-\frac{(n-1)b'_n}{(n-2)n(n+1)}p_{n-1}(x)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Aus (3) und (5) entfernen wir $p'_{n-1}(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\right)x-\frac{b'_n a_n}{n-2}+\frac{b_n a'_n}{n-1}\right]p_n(x)\\&=\frac{b'_n}{n-2}\left(\frac{b'_{n+1}}{n-1}-\frac{b_{n+1}}{n+1}\right)p_{n-1}(x)\\&+\left[\left(\frac{x}{n(n+1)}-\frac{a'_{n+1}}{n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)\left(\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\right)x-\frac{b'_n a_n}{n-2}+\frac{b_n a'_n}{n-1}\right)\right.\\&\left.-\left(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n}\right)\left(\frac{b'_{n+1}}{n-1}-\frac{b_{n+1}}{n+1}\right)\right]p'_n(x).\end{aligned} \tag{8}$$

Wir differenzieren (8) und entfernen $p'_{n-1}(x)$ mit Hilfe von (5), so daß

$$\begin{aligned}(9)\quad &\Big[\Big(\frac{x}{n(n+1)}-\frac{a'_{n+1}}{n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\Big)\Big(\Big(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\Big)x-\frac{b'_n a_n}{n-2}+\frac{b_n a'_n}{n-1}\Big)\\ &-\Big(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n}\Big)\Big(\frac{b'_{n+1}}{n-1}-\frac{b_{n+1}}{n+1}\Big)\Big]\,p''_n(x)\\ &+\Big[\Big(\frac{b'_n}{(n-2)n(n+1)}-\frac{n-2}{n(n+1)}\Big(\frac{b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\Big)\Big)x+\frac{n-1}{n(n+1)}\Big(\frac{b'_n a_n}{n-2}-\frac{b_n a'_n}{n-1}\Big)\\ &+\Big(\frac{2b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\Big)\Big(\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a'_{n+1}}{n}\Big)\Big]\,p'_n(x)-\Big(\frac{2b'_n}{n-2}-\frac{b_n}{n-1}\Big)\frac{p_n(x)}{n+1}=0\end{aligned}$$

entsteht. Wir erhalten also zwei lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(10)\quad \begin{aligned}&(c_{n1}x^2+c_{n2}x+c_{n3})\,p''_n(x)+(c_{n4}x+c_{n5})\,p'_n(x)+c_{n6}\,p_n(x)=0;\\ &(c_{n1}x^2+c_{n2}x+c_{n3})\,p''_{n-1}(x)+(c_{n4}x+c_{n5})\,p'_{n-1}(x)+c'_{n6}\,p_{n-1}(x)=0.\end{aligned}$$

Ebenso kann man zwei Differentialgleichungen

$$(11)\quad \begin{aligned}&(d_{n1}x^2+d_{n2}x+d_{n3})\,p''_{n+1}(x)+(d_{n4}x+d_{n5})\,p'_{n+1}(x)+d_{n6}\,p_{n+1}(x)=0;\\ &(d_{n1}x^2+d_{n2}x+d_{n3})\,p''_n(x)+(d_{n4}x+d_{n5})\,p'_n(x)+d'_{n6}\,p_n(x)=0\end{aligned}$$

ableiten. Hierbei bedeuten c_{nr} und d_{nr} Konstanten, ebenso auch c'_{n6} und d'_{n6}. Ist $n>3$, so können sich die beiden Gleichungen für $p_n(x)$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Genügte nämlich für irgendein festes n $p_n(x)$ zwei verschiedenen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}&\varphi_2(x)\,p''_n(x)+\varphi_1(x)\,p'_n(x)+\varphi_0(x)\,p_n(x)=0,\\ &\psi_2(x)\,p''_n(x)+\psi_1(x)\,p'_n(x)+\psi_0(x)\,p_n(x)=0\end{aligned}$$

(die Indizes sollen die Grade der Polynome andeuten), so wäre

$$[\varphi_1(x)\,\psi_2(x)-\varphi_2(x)\,\psi_1(x)]\,p'_n(x)+[\varphi_0(x)\,\psi_2(x)-\varphi_2(x)\,\psi_0(x)]\,p_n(x)=0.$$

Da $n>3$, hätten $p_n(x)$ und $p'_n(x)$ mindestens eine gemeinsame Nullstelle; $p_n(x)$ hat aber keine mehrfachen Nullstellen. Also genügen, unter Umständen nach Division durch einen gemeinsamen Faktor, die Polynome $p_{n+1}(x)$, $p_n(x)$, $p_{n-1}(x)$ Differentialgleichungen, die in den Koeffizienten der ersten und zweiten Ableitungen übereinstimmen. Da sich diese Betrachtung fortsetzen läßt, können diese Koeffizienten nach der erwähnten Division nicht mehr von n abhängen. Also genügt $p_n(x)$ einer Differentialgleichung

$$(12)\quad (c_1x^2+c_2x+c_3)\,p''_n(x)+(c_4x+c_5)\,p'_n(x)+c_6(n)\,p_n(x)=0,$$

in der nur noch $c_6(n)=-n((n-1)c_1+c_4)$ von n abhängt. Daß c_6 diese Gestalt haben muß, erkennt man auf Grund der Tatsache, daß p_n ein normiertes Polynom sein soll.

Wir unterscheiden jetzt mehrere Fälle. Zunächst sei $c_1\neq 0$, so daß wir die Gleichung auf die Gestalt

$$(13)\quad (x^2+d_1x+d_2)\,p''_n(x)+(d_3x+d_4)\,p'_n(x)+d_5(n)\,p_n(x)=0$$

bringen können. ε_1 und ε_2 seien die beiden Nullstellen von $x^2 + d_1 x + d_2$; wir nehmen sie vorläufig als verschieden an. Wir setzen

$$x = gz + h \quad \text{mit} \quad g = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}; \quad h = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} = -\frac{d_1}{2}; \quad p_n(x) = y_n(z),$$

so daß

$$(1 - x^2)\, y_n''(z) - (d_1' z + d_2')\, y_n(z) - d_5(n)\, y_n(z) \qquad \begin{pmatrix} d_1' = d_3 \\ d_2' = \frac{d_3 h + d_4}{g} \end{pmatrix}$$

entsteht. Das ist die Differentialgleichung des n-ten Jacobischen Polynoms mit den Parametern $\alpha = \frac{d_2' + d_1'}{2} - 1$, $\beta = \frac{d_2' - d_1'}{2} - 1$. Man sieht jetzt, daß die lineare Transformation $x = gz + h$ reell gewesen sein muß, daß also ε_1 und ε_2 reell sind. Als Polynom einer Kette hat nämlich $p_n(x)$ reelle Nullstellen. Wären nun ε_1 und ε_2 komplex, so wäre h reell, g rein imaginär. Die reellen Nullstellen von $p_n(x)$ würden in rein imaginäre Zahlen übergeführt, d. h. die Jacobischen Polynome hätten nur rein imaginäre Nullstellen. Das ist aber nicht möglich. Also sind ε_1 und ε_2 reell.

Weiterhin sei in (14) $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$. Die Betrachtung von (9) lehrt, daß dann $(n-1)\, b_n = (n-2)\, b_n$ sein muß und die Gleichung auf die Gestalt

$$n\, p_n(x) = (f_1 x + f_2)\, p_n''(x) + (x + f_3)\, p_n'(x)$$

$$\text{(14)} \qquad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= a_n' - a_n, \\ f_2 &= (n a_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}')(a_n' - a_n) - \frac{b_{n+1}}{n}, \\ f_3 &= n a_{n+1} - (n+1)\, a_{n+1}' - (n-1)(a_n' - a_n) \end{aligned} \right\}$$

gebracht werden kann. Die Konstanten rechts sind von n unabhängig. Wir setzen

$$f_1 x + f_2 = -f_1^2 z, \quad p_n(x) = \xi_n(z);$$

es entsteht

$$n\, \xi_n(z) = -z\, \xi_n''(z) + \left(z + \frac{f_2 - f_1 f_3}{f_1^2}\right) \xi_n'(z).$$

Diese Gleichung wird durch das n-te Laguerresche Polynom mit dem Parameter $\alpha = \frac{f_1 f_3 - f_2}{f_1^2} - 1$ befriedigt.

Ist schließlich $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$, so wird aus (12)

$$\text{(15)} \qquad n\, p_n(x) = g_1\, p_n''(x) + (x + g_2)\, p_n(x) \qquad \begin{pmatrix} g_1 = -\frac{b_{n+1}}{n} \\ g_2 = -a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Hierin müssen $g_1 = -\frac{b_{n+1}}{n}$ und $g_2 = -a_{n+1}$ von n unabhängig sein, so daß man die Transformation $x + g_2 = \sqrt{-g_1}\, z$ [2]) vornehmen kann und

$$n\, \eta_n(z) = -\eta_n''(z) + z\, \eta_n'(z) \qquad (\eta_n(z) = p_n(x))$$

erhält. Dieser Gleichung genügt das n-te Hermitesche Polynom.

---

[2]) Die b_n sind positiv; vgl. die Literatur unter [1]).

Es bleibt noch der Fall übrig, daß in (13) der erste Koeffizient $x^2 + d_1 x + d_2$ ein vollständiges Quadrat ist, d. h., daß $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. In diesem Falle kann man die Gleichung auf eine der beiden Gestalten

$$x^2 \vartheta_n''(x) + (k x + 1) \vartheta_n'(x) - n(n + k - 1) \vartheta_n(x) = 0 \qquad (k = d_3)$$

oder

$$x^2 \vartheta_n''(x) + l x \vartheta_n'(x) - n(n - 1 + l) \vartheta_n(x) = 0 \qquad (l = d_3)$$

bringen. Diese Gleichung wird nur im Falle $l = 1$ durch das triviale Polynom $\vartheta_n(x) = x^n$ befriedigt. Dieser Fall kann also bei Kettenpolynomen nicht eintreten. Der anderen Gleichung genügt, wie man leicht direkt ermittelt, das Polynom

$$\vartheta_n(x) = x^n L_n\left(\frac{1}{x}, \quad 1 - k - n\right).$$

($L_n(x, \alpha)$ ist das n-te Laguerresche Polynom mit dem Parameter α.) Die Belegungsfunktion ist hier $\omega(x) = e^{-\frac{1}{x}} x^{k-2}$ im Intervall $(0, \infty)$, vorausgesetzt, daß der Parameter $1 - k - n > -1$ ist. Da dies nur für endlich viele n gelten kann, liefert dieser Fall keine Kette.

(Eingegangen am 14. August 1934.)

Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten.

Von

L. Lichtenstein †[1]).

1. Diese Arbeit enthält eine neue Methode zur Bestimmung der Gleichgewichtsfiguren einer inkompressiblen *homogenen Flüssigkeit der Dichte* f in der Nachbarschaft einer als bekannt anzusehenden ebensolchen Gleichgewichtsfigur. Diese heiße T und möge der Einfachheit halber von einer einzigen Fläche S der Klasse $A\,h$ begrenzt sein, d. h. einer Fläche mit stetiger Normale, deren Richtungskosinus einer Hölderschen Bedingung genügen[2]). Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit der Ausgangsfigur und f ihre Dichte, also eine Konstante; $\varkappa$ sei die Gaußsche Gravitationskonstante.

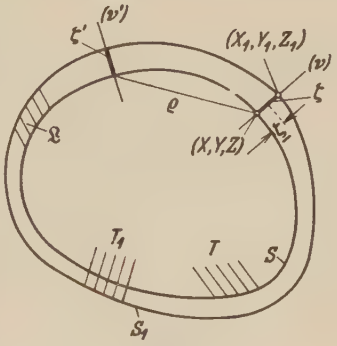


Fig. 1.

S läßt sich in bekannter Weise mit Systemen Gaußscher Parameter ξ, η überdecken derart, daß die rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z auf S als Funktionen von ξ, η stetige Ableitungen erster und, wie sich dann weiter zeigt, zweiter und

[1]) Diese Arbeit und eine zweite über die Gestalt des Weltmeeres sind von L. Lichtenstein hinterlassen worden; er beabsichtigte, darüber in Adorf am 2. 9. 33 vorzutragen. Die zweite Arbeit wird, von K. Maruhn herausgegeben, in dem dem Andenken Lichtensteins gewidmeten Bande der Prace Matematyczno - Fizyczne erscheinen.

Das mir von Frau Prof. Dr. St. Lichtenstein übergebene Manuskript enthält alle Formeln in definitiver Gestalt. Diese Formeln sind von mir mit Nummern versehen und dadurch für den Leser kenntlich gemacht worden. Die wenigen im Manuskript enthaltenen erläuternden Worte sind kursiv gedruckt worden. Der übrige Text, für den ich verantwortlich bin, sollte dem Leser auch alles das aus Lichtensteins Buch „Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten", Berlin 1933, (zitiert als „Glfig.") zusammenstellen, was zum Verständnis der vorliegenden Arbeit, die eine neue Grundlegung der Theorie enthält, nötig ist. Von den neun Bleistiftskizzen des Manuskripts habe ich drei reproduziert, welche die in Betracht kommenden Verhältnisse genügend illustrieren. Ernst Hölder

[2]) Vgl. Glfig., S. 36 ff.

höherer Ordnung besitzen. Weiter denken wir uns im Flächenpunkte (ξ, η) zu S die Außennormale (ν) mit den Richtungskosinus a, b, c gezogen und auf dieser eine Strecke ζ aufgetragen, nach außen positiv gerechnet. Solange $|\zeta|$ kleiner als eine angebbare Zahlgröße ist, etwa

$$|\zeta| \leqq \varepsilon_*,$$

gehört zu jedem Wertsystem ξ, η, ζ genau ein Punkt (x, y, z) des Raumes in einer Umgebung von S.

Bezüglich der gesuchten Gleichgewichtsfigur T_1, deren Dichte ebenfalls f, deren Winkelgeschwindigkeit aber ω_1 betragen soll, nehmen wir nun an, daß ihre Begrenzung S_1 eine Jordanfläche sei, deren Gleichung sich unter Zugrundelegung des Koordinatensystems ξ, η, ζ in der Form $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ darstellen läßt; hier ist $\zeta(\xi, \eta)$ eine stetige Funktion auf S und es gelte für

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Max} |\zeta| = \Omega \quad \Omega \leqq \varepsilon_0,$$

wo ε_0 ein später noch genügend klein zu machender Wert $\leqq \varepsilon_*$ ist.

Gegenüber den früheren Untersuchungen über Gleichgewichtsfiguren ist neu, daß die *Existenz der Ableitungen* $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ *nicht vorausgesetzt* wird.

Der (eindeutig bestimmte) Punkt (ξ, η, ζ), in dem S_1 von der Normalen (ν) des Punktes (ξ, η) auf S getroffen wird, hat die rechtwinkligen Koordinaten $X_1 = X + a\zeta$, $Y_1 = Y + b\zeta$, $Z_1 = Z + c\zeta$. Wir schreiben dafür kurz

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &(\xi, \eta, \zeta) = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \text{analog} \quad (\xi, \eta, 0) = (X, Y, Z); \\ &(\xi, \eta, \underline{\zeta}) = (\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}), \end{aligned}$$

wo $\underline{\zeta} = \vartheta\zeta$, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist, d. h. $\underline{X} = X + a\underline{\zeta}$, ... bezieht sich im gleichen Sinn auf einen nachher einzuführenden Zwischenpunkt auf (ν). Integrationspunkte und die auf sie bezüglichen Größen bezeichnen wir mit einem Akzent, z. B. hat im Punkte $(\xi', \eta', 0) = (X', Y', Z')$ auf S das zu S_1 führende Lot die Länge ζ', das Flächenelement in diesem Punkte von S ist $d\sigma'$.

Das Newtonsche Potential von T ist $V(x, y, z)$, das von T_1 hingegen $V_1(x, y, z)$; überhaupt sollen die auf T_1 bezüglichen Größen sämtlich den Index 1 tragen.

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = {} & V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X, Y, Z) \\ & + V_1(X, Y, Z) - V(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Rechts ist die erste Differenz

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X, Y, Z) = \int_0^{\zeta} \frac{\partial}{\partial \nu} V_1(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z})\, d\underline{\zeta}$$

(4)
$$= \int_0^{\zeta} \frac{\partial}{\partial \nu} V_1(X, Y, Z)\, d\underline{\zeta} + \int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} V_1(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}) - \frac{\partial}{\partial \nu} V_1(X, Y, Z)\right] d\underline{\zeta}$$
$$= \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} V_1(X, Y, Z) + R_1.$$

Nach Dini[3]) gilt dabei die Abschätzung

(5) $$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} V_1(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}) - \frac{\partial}{\partial \nu} V_1(X, Y, Z) \right| \leqq \alpha_1 |\underline{\zeta}| |\log \underline{\zeta}| \leqq \alpha_1 \Omega |\log \Omega|;$$

α_1 und die weiterhin einzuführenden Größen $\alpha_2, \ldots, \beta_1, \ldots$ sind Konstante. In (4) ist also

(6) $$|R_1| \leqq \alpha_1 \Omega^2 |\log \Omega|.$$

Weiter gilt

(7) $$\frac{\partial}{\partial \nu} V_1(X, Y, Z) = \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) + \frac{\partial}{\partial \nu} V_{\mathfrak{Q}}(X, Y, Z).$$

Hier ist $V_{\mathfrak{Q}}$ das Newtonsche Potential des „schalenförmigen" Körpers $\mathfrak{Q}$, der aus der Gesamtheit der auf S errichteten Lote von der Länge ζ' gebildet wird; dabei sind auf dem betreffenden Lot die Volumelemente positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem $\zeta' \gtrless 0$ ist.

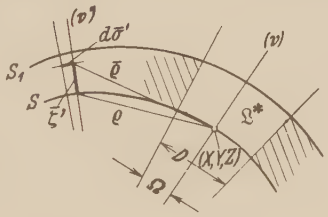


Fig. 2.

Wir grenzen nun um (X, Y, Z) auf S ein Flächenstück D ab durch den Kreiszylinder, der die Normale (ν) zur Achse und den Radius Ω besitzt[4]). Die in den Punkten (ξ', η') von D errichteten Lote der Länge ζ' bilden das zunächst aus $\mathfrak{Q}$ herauszuschneidende Gebiet $\mathfrak{Q}^*$.

Dann ist[5])

(8) $$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} V_{\mathfrak{Q}}(X, Y, Z) \right| \leqq \int_{\mathfrak{Q}} \frac{f'}{\bar{\varrho}^2} |d\bar{\tau}'| = \int_{\mathfrak{Q}^*} \frac{f'}{\bar{\varrho}^2} |d\bar{\tau}'| + \int_{\mathfrak{Q}} \frac{f'}{\bar{\varrho}^2} |d\bar{\tau}'| = J_1 + J_2.$$

$|d\bar{\tau}'|$ schreiben wir deutlicher für das positiv zu nehmende Volumelement im Integrationspunkt $(\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}')$, dessen Entfernung vom „darunterliegenden"

---

[3]) Vgl. Glfig., S. 2.

[4]) Im Manuskript wird hier der Radius ζ benutzt; dies habe ich zugunsten des weiter unten S. 646 benutzten Radius Ω abgeändert.

[5]) Beachte, daß $\mathfrak{Q}$ ganz in dem von den beiden (im Abstand $\pm \Omega$ von S gezogenen) Parallelflächen S' und S'' begrenzten Raum liegt; vgl. Glfig., S. 86 ff.

Punkt (X', Y', Z') mit $\bar{\zeta}'$ bezeichnet wird, wo $\bar{\zeta}' = \vartheta\zeta'$, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, mit Vorzeichen zu nehmen ist, während die Entfernung der Punkte $(\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}')$ und (X, Y, Z) mit $\bar{\varrho}$, speziell die der Punkte (X', Y', Z') und (X, Y, Z) mit ϱ bezeichnet wird. Obwohl die Dichte f konstant ist, deuten wir auch bei ihr an, daß sie im Integrationspunkt zu nehmen ist.

Unmittelbar erkennt man nun die Abschätzungen

$$J_1 \leqq \beta_1 \Omega \tag{9}$$

$$\begin{aligned} J_2 &\leqq \beta_2 \int_{S-D} d\sigma' \frac{f'}{\varrho^2} \int_0^{|\zeta'|} d\bar{\zeta}' \leqq \beta_3 \int_{S-D} d\sigma' \frac{f'}{\varrho^2} \int_0^{\Omega} d\bar{\zeta}' \\ &\leqq \beta_4 \Omega \int_{S-D} \frac{f'}{\varrho^2} d\sigma' \leqq \beta_5 \Omega |\log \Omega|. \end{aligned} \tag{10}$$

Somit ist

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} V_\varrho(X, Y, Z) \right| \leqq \beta_6 \Omega |\log \Omega|. \tag{11}$$

Der erste Term in (4) wird unter Berücksichtigung von (7) daher

$$\zeta \frac{\partial}{\partial \nu} V_1(X, Y, Z) = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) + R_2, \tag{12}$$

wo

$$|R_2| = \beta_6 \Omega^2 |\log \Omega| \tag{13}$$

ist. *Darum* gilt für den Ausdruck (4)

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X, Y, Z) = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) + R_1 + R_2 \tag{14}$$

mit

$$|R_1 + R_2| \leqq \beta_7 \Omega^2 |\log \Omega|. \tag{15}$$

Wir wenden uns zu der auf der rechten Seite von (3) auftretenden zweiten Differenz

$$\begin{aligned} V_1(X, Y, Z) - V(X, Y, Z) &= V_\varrho(X, Y, Z) \\ &= \int_S \zeta' \frac{f'}{\varrho} d\sigma' + \left(V_\varrho(X, Y, Z) - \int_S \zeta' \frac{f'}{\varrho} d\sigma' \right). \end{aligned} \tag{16}$$

Im Punkte $(\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}') = (\zeta', \eta', \bar{\zeta}')$ auf (ν') führen wir noch das Flächenelement $d\sigma'$ auf derjenigen *Parallelfläche* zur (stetig gekrümmten) Fläche S ein, die gerade den Wert $\bar{\zeta}'$ als konstanten Abstand von S hat; dann ist

$$\begin{aligned} V_\varrho(X, Y, Z) - \int_S \zeta' \frac{f'}{\varrho} d\sigma' &= \int_S d\sigma' \int_0^{\bar{\zeta}'} f' d\bar{\zeta}' \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} - \frac{1}{\varrho} \right) \\ &+ \int_S d\sigma' \int_0^{\bar{\zeta}'} \frac{f'}{\varrho} d\bar{\zeta}' \left(\frac{d\bar{\sigma}'}{d\sigma'} - 1 \right) \end{aligned} \tag{17}$$

Bekanntlich[6]) gilt nun

$$\left|\frac{d\bar{\sigma}'}{d\sigma'} - 1\right| \leqq \alpha_2 |\bar{\zeta}'| \leqq \alpha_2 \Omega, \tag{18}$$

so daß das zweite Integral in (17)

$$\left|\int_S d\sigma' \int_0^{\zeta'} \frac{f'}{\bar{\varrho}} d\bar{\zeta}' \left(\frac{d\sigma'}{d\bar{\sigma}'} - 1\right)\right| \leqq \alpha_2 \Omega \int_S d\sigma' \int_0^{\Omega} f' \frac{d\bar{\zeta}'}{\bar{\varrho}} \leqq \alpha_3 \Omega^2 \int_S \frac{d\sigma'}{\varrho} \leqq \alpha_4 \Omega^2 \tag{19}$$

wird[7]).

Um das erste Integral auf der rechten Seite von (17) abzuschätzen, zerlegen wir es in die beiden von D bzw. $S - D$ herrührenden Bestandteile[8]):

$$\left|\int_D d\sigma' \int_0^{\zeta'} f' d\zeta' \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} - \frac{1}{\varrho}\right)\right| \leqq \int_D d\sigma' \int_0^{\Omega} f' d\bar{\zeta}' \frac{1}{\bar{\varrho}} + \int_D d\sigma' \int_0^{\Omega} f' d\bar{\zeta}' \frac{1}{\varrho} \leqq \alpha_5 \Omega^2 \tag{20}$$

und

$$\left|\int_{S-D} d\sigma' \int_0^{\zeta'} f' d\zeta' \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} - \frac{1}{\varrho}\right)\right| \leqq \alpha_6 \int_{S-D} d\sigma' \int_0^{\Omega} f' d\bar{\zeta}' \frac{|\bar{\zeta}'|}{\varrho^2}$$

$$\leqq \alpha_7 \Omega^2 \int_{S-D} \frac{d\sigma'}{\varrho^2} \leqq \alpha_8 \Omega^2 |\log \Omega|. \tag{21}$$

Der Ausdruck (16) schreibt sich nunmehr

$$V_1(X, Y, Z) - V(X, Y, Z) = \int_S f' \frac{\zeta'}{\varrho} d\sigma' + R_3, \tag{22}$$

wo auf Grund von (17), (19), (20) und (21)

$$|R_3| \leqq \alpha_9 \Omega^2 |\log \Omega| \tag{23}$$

gilt. Dies Resultat gibt zusammen mit (14), (15) die gesuchte Entwicklung für den Ausdruck (3), nämlich

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) + \int_S f' \frac{\zeta'}{\varrho} d\sigma' + \Theta, \tag{24}$$

wo

$$|\Theta| \leqq \alpha_{10} \Omega^2 |\log \Omega| \tag{25}$$

gilt.

---

[6]) Glfig., S. 73, Formel (194).

[7]) Im zweiten Term der Formelzeile (19), ebenso nachher bei (20), müßte für ein Flächenelement $d\sigma'$ mit $\zeta' < 0$ genauer $\int_{-\Omega}^{0} f' \frac{d\bar{\zeta}'}{\bar{\varrho}}$ als Integrand stehen.

[8]) Vgl. Anmerkung [4])

2. Die *Integrodifferentialgleichung*[9]) für die gesuchte Gleichgewichtsfigur ergibt sich nunmehr aus der auf S geltenden Gleichgewichtsbedingung

$$\varkappa V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \frac{\omega_1^2}{2}(X_1^2 + Y_1^2) - \varkappa V(X, Y, Z) - \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) = \varkappa s, \tag{26}$$

in der s eine Konstante bedeutet. Mit der Abkürzung

$$\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa} = \lambda \tag{27}$$

gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned}\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(X_1^2 + Y_1^2) - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(X^2 + Y^2) &= \lambda R^2 + \frac{\omega^2}{\varkappa} R\tau\zeta + \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2 + b^2)\zeta^2 \\ &+ 2\lambda R\tau\zeta + (a^2 + b^2)\lambda\zeta^2,\end{aligned} \tag{28}$$

wo $R^2 = X^2 + Y^2$ und $R\tau = aX + bY$ ist. Weiter ist

$$\varkappa \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) + \omega^2 R\tau = \varkappa\psi \tag{29}$$

die (rücksichtlich der nach außen positiven Normalenrichtung (ν) mit Vorzeichen zu nehmende) *Intensität der Schwerkraft* auf S; aus unseren Voraussetzungen bezüglich S folgt $\psi < 0$, vgl. Glfig., S. 20. Damit lautet die Integralgleichung

$$\begin{aligned}\psi\zeta + \int_S f' \frac{\zeta'}{\varrho} d\sigma' &= s - R^2\lambda - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(a^2 + b^2)\zeta^2 - 2R\tau\lambda\zeta - (a^2 + b^2)\lambda\zeta^2 - \Theta\{\zeta\} \\ &= s - R^2\lambda + \Pi\{\lambda, \zeta\}.\end{aligned} \tag{30}$$

Ist nun

$$|s|, |\lambda| \leqq \Omega_1, \tag{31}$$

so gilt nach (30), (25)

$$|\Pi\{\lambda, \zeta\}| \leqq \mathsf{A}(\Omega, \Omega_1)\ (\Omega + \Omega_1). \tag{32}$$

Nach (30), (25) ist hier $\mathsf{A}(\Omega, \Omega_1)$ *für hinreichend kleine* Ω *und* Ω_1 *erklärt und stetig. Weiter konvergiert* $\mathsf{A} \to 0$ *für* $\Omega^2 + \Omega_1^2 \to 0$ *und es nimmt* A *bei festgehaltenem* Ω *in Abhängigkeit von* Ω_1, *sowie bei festgehaltenem* Ω_1 *in Abhängigkeit von* Ω *nicht ab*[10]).

3. Für den Fall, daß ξ eine ebenso wie ζ beschaffene Funktion ist (die also insbesondere der Ungleichheit (1) genügt) und darüber hinaus noch

$$|\zeta - \xi| \leqq \sigma \tag{33}$$

[9]) In Wirklichkeit ist es eine Integralgleichung.

[10]) Vgl. L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin 1931, S. 14.

gilt, wo $\bar{\sigma} \leqq 2\,\Omega$ ist, stellen wir neben die Ungleichheit (32) als zweiten Hauptpunkt der Betrachtung die Abschätzung der Differenz

$$\begin{aligned}\Theta\{\zeta\} - \Theta\{\dot{\zeta}\} &= \Big[V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) - \zeta \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) - \int_S f' \frac{\zeta'}{\varrho} d\sigma'\Big] \\ &\quad - \Big[\dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) - V(X, Y, Z) - \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) - \int_S f' \frac{\dot{\zeta}'}{\varrho} d\sigma'\Big] \\ &= V_1(X_1, Y_1, Z_1) - \dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) - (\zeta - \dot{\zeta}) \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) \\ &\quad - \int_S f' \frac{\zeta' - \dot{\zeta}'}{\varrho} d\sigma'.\end{aligned} \tag{34}$$

Dabei ist $\dot{X}_1 = X + a\dot{\zeta}, \ldots$. Für die erste Differenz rechts schreiben wir

$$\begin{aligned}&V_1(X_1, Y_1, Z_1) - \dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) \\ &= \dot{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - \dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) - (\dot{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X_1, Y_1, Z_1)).\end{aligned} \tag{35}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist hier zunächst

$$\dot{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - \dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) = (\zeta - \dot{\zeta}) \frac{\partial}{\partial \nu} \dot{V}_1(X_1 + \vartheta(\dot{X}_1 - X_1), \ldots), \quad 0 < \vartheta < 1. \tag{36}$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned}&(\zeta - \dot{\zeta}) \frac{\partial}{\partial \nu} \dot{V}_1(X_1 + \vartheta(\dot{X}_1 - X_1), \ldots) - (\zeta - \dot{\zeta}) \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z) \\ &= (\zeta - \dot{\zeta}) \Big[\frac{\partial}{\partial \nu} \dot{V}_1(X_1 + \vartheta(\dot{X}_1 - X_1), \ldots) - \frac{\partial}{\partial \nu} V(X_1 + \vartheta(\dot{X}_1 - X_1), \ldots)\Big] \\ &\quad + (\zeta - \dot{\zeta}) \Big[\frac{\partial}{\partial \nu} V(X_1 + \vartheta(\dot{X}_1 - X_1), \ldots) - \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z)\Big] \\ &= (\zeta - \dot{\zeta}) J_3 + (\zeta - \dot{\zeta}) J_4.\end{aligned} \tag{37}$$

Wie man sich überzeugt[11]), gilt

$$|J_3| \leqq \alpha_{11}\, \Omega\, |\log \Omega| \tag{38}$$

(vgl. Glfig., S. 84 ff.) und

$$|J_4| \leqq \alpha_{12}\, \Omega\, |\log \Omega|. \tag{39}$$

Also wird

$$\begin{aligned}&\Big|(\zeta - \dot{\zeta}) \frac{\partial}{\partial \nu} \dot{V}_1(X_1 + \vartheta(\dot{X}_1 - X_1), \ldots) - (\zeta - \dot{\zeta}) \frac{\partial}{\partial \nu} V(X, Y, Z)\Big| \\ &\qquad \leqq \alpha_{13}\, \bar{\sigma}\, \Omega\, |\log \Omega|.\end{aligned} \tag{40}$$

[11]) Die Formeln (38), (39) entsprechen (11), (5) oben und können ebenso bewiesen werden.

Die in der Klammer stehende Differenz auf der rechten Seite von (35) ist

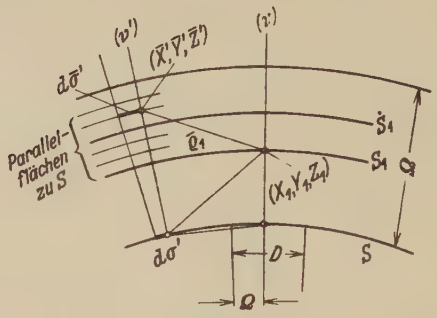


Fig. 3.

$$(41)\qquad \dot{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X_1, Y_1, Z_1) = \int_S f' \, d\sigma' \int_{\zeta'}^{\dot{\zeta}'} d\bar{\zeta}' \cdot \frac{d\bar{\sigma}'}{d\sigma'} \cdot \frac{1}{\bar{\varrho}_1},$$

wo $\bar{\varrho}_1$ die Entfernung der Punkte $(\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}')$ und (X_1, Y_1, Z_1) ist. Hieraus folgt

$$(42)\qquad \begin{aligned} &\dot{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \int_S f' \frac{\zeta' - \dot{\zeta}'}{\varrho} \, d\sigma' \\ &= \int_S f' \, d\sigma' \int_{\zeta'}^{\dot{\zeta}'} d\bar{\zeta}' \left(\frac{d\bar{\sigma}'}{d\sigma'} - 1\right) \frac{1}{\bar{\varrho}_1} + \int_S f' \, d\sigma' \int_{\zeta'}^{\dot{\zeta}'} d\bar{\zeta}' \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} - \frac{1}{\varrho}\right) = J_5 + J_6. \end{aligned}$$

Wieder gilt[12])

$$(43)\qquad \left|\frac{d\bar{\sigma}'}{d\sigma'} - 1\right| \leqq \alpha_{14} \Omega$$

und darum

$$(44)\qquad |J_5| \leqq \alpha_{15} \Omega \int_S \frac{f' \, d\sigma'}{\varrho} \int_{\zeta'}^{\dot{\zeta}'} |d\bar{\zeta}'| \leqq \alpha_{16} \Omega \mathfrak{V},$$

vgl. Glfig., S. 86.

Das zweite Integral auf der rechten Seite von (42) zerlegen wir

$$(45)\qquad J_6 = \int_D f' \, d\sigma' \int_{\zeta'}^{\dot{\zeta}'} d\bar{\zeta}' \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} - \frac{1}{\varrho}\right) + \int_{S-D} f' \, d\sigma' \int_{\zeta'}^{\dot{\zeta}'} d\bar{\zeta}' \left(\frac{1}{\bar{\varrho}_1} - \frac{1}{\varrho}\right) = J_7 + J_8.$$

Nun überzeugt man sich von den Abschätzungen:

$$(46)\qquad |J_7| \leqq \alpha_{17} \Omega \mathfrak{V}$$

---

[12]) $d\bar{\sigma}'$ ist wieder das Flächenelement auf der im Abstand $\bar{\zeta}'$ gezogenen *Parallelfläche zu S.*

und, wegen[13])

$$\left|\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right| \leqq \alpha_{18}\frac{\Omega}{\varrho^2}, \tag{47}$$

$$|J_8| \leqq \alpha_{19}\int_{S-D} f' d\sigma' \frac{1}{\varrho^2}\mathcal{O}\Omega \leqq \alpha_{20}\Omega\,|\log\Omega|\cdot\mathcal{O}. \tag{48}$$

Insgesamt bekommen wir so für (34)

$$|\Theta\{\zeta\}-\Theta\{\dot{\zeta}\}| \leqq \alpha_{21}\Omega\,|\log\Omega|\,\mathcal{O}. \tag{49}$$

Demnach ist mit Rücksicht auf (31)

$$|\Pi\{\lambda,\zeta\}-\Pi\{\lambda,\dot{\zeta}\}| \leqq (\alpha_{22}\Omega\,|\log\Omega| + \alpha_{23}\Omega_1)\,\mathcal{O}; \tag{50}$$

diese Ungleichheit hat die Gestalt

$$|\Pi\{\lambda,\zeta\}-\Pi\{\lambda,\dot{\zeta}\}| \leqq \mathsf{B}(\Omega,\Omega_1)\cdot\mathcal{O}, \tag{51}$$

wo die Funktion $\mathsf{B}(\Omega,\Omega_1)$ ganz ebenso wie $\mathsf{A}(\Omega,\Omega_1)$ in (32) beschaffen ist.

Nach Sicherstellung der beiden grundlegenden Ungleichheiten (32) und (51) verläuft die Auflösung der Integralgleichung (30) in der üblichen Weise; vgl. L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nicht linearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen[14]), insbesondere S. 14, wo gerade lediglich Ungleichheiten von der Form (32), (51) vorausgesetzt sind. Der weitere Verlauf der Betrachtung[15]) sei daher nur angedeutet. Für die homogene lineare Integralgleichung

$$\psi\zeta + \int_S f'\frac{\zeta'}{\varrho}d\sigma' = 0 \tag{52}$$

sei $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ein System von normierten und orthogonalisierten Nullösungen, d. h.

$$\int_S \psi u_k u_l d\sigma = \begin{cases} -1, & l=k \\ 0, & l\neq k \end{cases} \qquad (k,l=1,\ldots,m).$$

Die Kernzerspaltung

$$\frac{1}{\varrho} = \mathfrak{N}(\sigma,\sigma') + \sum_{l=1}^{m}\psi\psi' u_l u_l' \tag{53}$$

gibt dann die neue Integralgleichung

$$\psi\zeta + \int_S f'\mathfrak{N}(\sigma,\sigma')\zeta' d\sigma' = s - R^2\lambda + \Pi\{\lambda,\zeta\} + \sum_{l=1}^{m}\psi r_l u_l, \tag{54}$$

---

[13]) Unter Zwischenschaltung der Entfernung ϱ_1 von (X', Y', Z') und (X_1, Y_1, Z_1) ist ja

$$\left|\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right| \leqq \left|\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_1}\right| + \left|\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right|$$

[14]) Vgl. Fußnote[10]).

[15]) Glfig., S. 53 ff.

in der

$$r_l = -\int_S f' \psi' u_l \zeta' \, d\sigma' \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{55}$$

zunächst als unbestimmte Parameter aufzufassen sind. Dann läßt sich zeigen, daß die Integralgleichung (54) für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werte von $\lambda, s, r_1, \ldots, r_m$ eine und nur eine stetige Lösung ζ hat, die der Beziehung $|\zeta| \leqq \varepsilon^* < \varepsilon_0$ genügt. Schließlich sucht man die Parameter $r_1, \ldots, r_m$ so zu bestimmen, daß die Verzweigungsgleichungen (55) erfüllt sind. Ist dies möglich, so haben wir in ζ eine Lösung der fundamentalen Integralgleichung (30) und damit eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft der gegebenem.

Nachträglich zeigt sich, daß $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ *vorhanden sind und einer Hölderschen Bedingung auf S genügen.*

Damit sind in neuer und einfacher Weise genau diejenigen Lösungen des Problems zurückgewonnen, die den Gegenstand der früheren Abhandlungen[16]) über Gleichgewichtsfiguren gebildet haben.

---

[16]) Vgl. Glfig., S. 36, Fußnote 42.

(Eingegangen am 15. August 1934.)

Über einige Dirichletsche Reihen, die meromorphe Funktionen darstellen.

Von

Arnold Walfisz in Radość (Polen).

---

1. Wir stellen uns zunächst zur Aufgabe, die für $\sigma > 1 + \frac{1}{k}$ $(s = \sigma + it;\ k = 2, 3, \ldots)$ absolut konvergenten Dirichletschen Reihen

$$Z_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sqrt[k]{n}]}{n^s}$$

in die ganze s-Ebene fortzusetzen.

Es wird sich herausstellen: *$Z_k(s)$ ist eine meromorphe Funktion, die für*

$$s = 1 + \frac{1}{k},\ 1,\ \frac{1}{k};\ -1 + \frac{1}{k},\ -3 + \frac{1}{k},\ -5 + \frac{1}{k}, \ldots$$

je einen Pol erster Ordnung mit genau angebbarem Residuum besitzt, und sonst regulär ist.

Bei ganzzahligen a, b wird

$$\sum_{|a|+|b|^k=n} 1 = \begin{cases} 4[\sqrt[k]{n}] + 2 & \text{für} \quad n \neq q^k \\ 4[\sqrt[k]{n}] & \text{„} \quad n = q^k \end{cases} \qquad (q \text{ ganz}),$$

und daher

$$\left(\sigma > 1 + \frac{1}{k}\right) \qquad Z_k(s) = \tfrac{1}{4} \Sigma' (|a| + |b|^k)^{-s} - \tfrac{1}{2}\zeta(s) + \tfrac{1}{2}\zeta(ks)$$

$$(1) \qquad = \tfrac{1}{4} \Sigma' (|a| + |b|^k)^{-s} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2k\left(s - \frac{1}{k}\right)} + G(s),$$

wobei a, b in Σ' alle ganzen Zahlen, mit Ausnahme des Wertepaares $a = 0,\ b = 0$, durchlaufen und $G(s)$ allgemein eine ganze transzendente Funktion bedeutet, die von Formel zu Formel eine andere sein kann.

Wegen

$$(y, \sigma > 0) \qquad y^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-yu} u^{s-1}\, du$$

ergibt sich aus (1) weiter

$$\left(\sigma > 1 + \frac{1}{k}\right) \qquad Z_k(s) = \frac{1}{4\Gamma(s)} \int_0^\infty u^{s-1} \sum{}' e^{-(|a|+|b|^k)u}\, du$$

$$- \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2k\left(s-\frac{1}{k}\right)} + G(s)$$

$$= \frac{1}{4\Gamma(s)} \int_0^1 u^{s-1} \sum{}' e^{-(|a|+|b|^k)u}\, du - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2k\left(s-\frac{1}{k}\right)} + G(s)$$

$$(2) \qquad = \frac{1}{4\Gamma(s)} \int_0^1 u^{s-1} \sum e^{-(|a|+|b|^k)u}\, du - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2k\left(s-\frac{1}{k}\right)} + G(s),$$

wo nunmehr über *alle* a, b zu summieren ist.

Eine Fourierentwicklung liefert uns

$$(u > 0) \qquad \sum_{b=-\infty}^{\infty} e^{-|b|^k u} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|^k u + 2q\pi i x}\, dx$$

$$(3) \qquad = \frac{2\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\sqrt[k]{u}} + 4 \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-x^k u} \cos 2q\pi x\, dx.$$

Für ganzes $r \geqq 1$ werde jedes hier auftretende Integral $2rk$-mal partiell integriert. Es folgt

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-x^k u} \cos 2q\pi x\, dx = \sum_{p=1}^{2r-1} \frac{\alpha_p u^p}{q^{pk+1}}$$

$$+ \frac{u^{2r}}{q^{2rk}} \sum_{p=0}^{2rk} \beta_{r,p} u^p \int_0^\infty e^{-x^k u} x^{kp} \cos 2q\pi x\, dx.$$

Hierbei bedeuten die α und β gewisse, von x, u, q unabhängige reelle Größen, auf deren Wert es nicht ankommt (analog später die γ, δ, ε).

Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$\left| u^p \int_0^\infty e^{-x^k u} x^{kp} \cos 2q\pi x\, dx \right| \leqq p^p,$$

woraus, in Verbindung mit (3) und (4), resultiert

$$(5) \qquad (u > 0,\ u \to 0) \qquad \sum_{b=-\infty}^{\infty} e^{-|b|^k u} = \frac{2\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\sqrt[k]{u}} + \sum_{p=1}^{2r-1} \gamma_p u^p + O(u^{2r}).$$

Wir ziehen jetzt die bekannte Laurentreihe

$$(6) \qquad (|u| < 2\pi,\ u \neq 0) \qquad \sum_{a=-\infty}^{\infty} e^{-|a|u} = \frac{2}{u} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} u^{2n-1}$$

hinzu und erhalten aus (5)

$$(u > 0,\ u \to 0) \qquad \sum e^{-(|a|+|b|^k)u} = 4\,\Gamma\Big(1+\frac{1}{k}\Big)u^{-1-\frac{1}{k}}$$

$$+ 8\,\Gamma\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n+1}\frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}u^{2n-1-\frac{1}{k}} + \sum_{n=0}^{2r-2}\delta_{r,n}u^n + O(u^{2r-1}).$$

Setzt man dies in (2) ein und integriert aus, so kommt

$$Z_k(s) = \frac{\Gamma\Big(1+\frac{1}{k}\Big)}{\Gamma(s)}\frac{1}{s-1-\frac{1}{k}} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2k\Big(s-\frac{1}{k}\Big)}$$

$$+ \frac{2\,\Gamma\Big(1+\frac{1}{k}\Big)}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n+1}\frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}\frac{1}{s+2n-1-\frac{1}{k}}$$

$$+ \frac{1}{4\,\Gamma(s)}\sum_{n=0}^{2r-2}\delta_{r,n}\frac{1}{s+n} + f_1(s)$$

$$(7) \quad = \frac{1}{s-1-\frac{1}{k}} - \frac{1}{2(s-1)}$$

$$+ \frac{1}{2k\Big(s-\frac{1}{k}\Big)} + \frac{2\,\Gamma\Big(1+\frac{1}{k}\Big)}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n+1}\frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}\frac{1}{s+2n-1-\frac{1}{k}} + f_2(s),$$

wobei f_1 und f_2 für $\sigma > \frac{1}{k} - 2r - 1$ regulär sind.

(7) setzt bereits den meromorphen Charakter von $Z_k(s)$ sowie Lage und Residuum eines jeden Poles in Evidenz. Es sei aber noch auf die Darstellung von $Z_k(s)$ hingewiesen, die aus (7) durch den Übergang $r \to \infty$ folgt, nämlich

$$Z_k(s) = \frac{1}{s-1-\frac{1}{k}} - \frac{1}{2(s-1)}$$

$$+ \frac{1}{2k\Big(s-\frac{1}{k}\Big)} + \frac{2\,\Gamma\Big(1+\frac{1}{k}\Big)}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}\frac{1}{s+2n-1-\frac{1}{k}} + G(s).$$

Dieser Grenzübergang ist gestattet, da die unendliche Reihe in jedem großen Kreis der s-Ebene, aus dem die ihm eventuell angehörigen Pole durch kleine Kreise herausgeschnitten sind, gleichmäßig konvergiert.

2. Es sei jetzt

$$Q = Q(b_1, \ldots, b_m) = \sum_{p,q=1}^{m} a_{pq}b_pb_q \quad (m \geqq 2,\ a_{pq} = a_{qp})$$

eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante $D = |a_{pq}|$. Bezeichnet $w(n)$ die Anzahl der Gitterpunkte *auf der Oberfläche* des m-dimensionalen Ellipsoides $Q \leqq n$, so stellt die für $\sigma > \frac{m}{2}$ absolut konvergente D. R.

$$E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w(n)}{n^s}$$

nach P. Epstein[1]) eine bis auf den einfachen Pol $s = \frac{m}{2}$ mit dem Residuum

$$\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

reguläre Funktion dar (die sogar überdies einer Funktionalgleichung vom Typus der Riemannschen bei $\zeta(s)$ genügt).

Bezeichnet ferner $w^*(n)$ die Anzahl der Gitterpunkte *im Innern und auf der Oberfläche* des Ellipsoides, so konvergiert die zugehörige D. R.

$$E^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^*(n)}{n^s}$$

für $\sigma > \frac{m}{2} + 1$ absolut. Wir wollen $E^*(s)$ fortsetzen.

Nach Definition ist

$$w(n) = \sum_{Q=n} 1, \quad w^*(n) = \sum_{Q \leqq n} 1.$$

Mithin wird

$$\sum_{|a|+Q=n} 1 = 2\,w^*(n) - w(n),$$

und daher für $\sigma > \frac{m}{2} + 1$

$$E^*(s) = \frac{1}{2} E(s) + \frac{1}{2} \sum{}' (|a| + Q)^{-s},$$

wo in der Summe das Wertsystem $a = 0,\ b_1 = 0,\ \ldots,\ b_m = 0$ auszulassen ist. Es folgt

$$\left(\sigma > \frac{m}{2} + 1\right) \qquad E^*(s) = \frac{1}{2} E(s) + \frac{1}{2\,\Gamma(s)} \int_0^{\infty} u^{s-1} \sum{}' e^{-(|a|+Q)u}\, du$$

$$= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{s - \frac{m}{2}} + \frac{1}{2\,\Gamma(s)} \int_0^{1} u^{s-1} \sum{}' e^{-(|a|+Q)u}\, du + G(s)$$

---

[1]) P. Epstein, *Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen*, Math. Annalen **56** (1903), S. 615—644.

$$(8) \quad = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{s-\frac{m}{2}} + \frac{1}{2\,\Gamma(s)} \int_0^1 u^{s-1} \sum e^{-(|a|+Q)u}\, du + G(s),$$

wobei nunmehr die *volle* Summe zu nehmen ist.

Eine bekannte Transformationsformel der Thetafunktionen lautet

$$(u > 0) \qquad \sum e^{-Qu} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}\,u^{\frac{m}{2}}} \sum e^{-\frac{\pi^2 \bar{Q}}{u}} \qquad (\bar{Q} \text{ zu } Q \text{ invers}).$$

Es gibt also ein nur von Q abhängiges $\omega > 0$, so daß

$$(u > 0,\ u \to 0) \qquad \sum e^{-Qu} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}\,u^{\frac{m}{2}}} + O\left(e^{-\frac{2\omega}{u}}\right).$$

In Verbindung mit (6) ergibt dies

$$(9) \qquad (u > 0,\ u \to 0) \qquad \sum e^{-(|a|+Q)u} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}} u^{-\frac{m}{2}-1} + \frac{4\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} u^{2n-\frac{m}{2}-1} + O\left(e^{-\frac{\omega}{u}}\right).$$

Substituirt man (9) in (8) und führt die Integrationen aus, so folgt

$$(10) \qquad E^*(s) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \frac{1}{s-\frac{m}{2}-1} + \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{s-\frac{m}{2}} + \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{s+2n-\frac{m}{2}-1} + G(s).$$

Für *gerades* m erhält man hieraus

$$E^*(s) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}\,\frac{m}{2}!} \frac{1}{s-\frac{m}{2}-1} + \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2\sqrt{D}\left(\frac{m}{2}-1\right)!} \frac{1}{s-\frac{m}{2}} + \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{4}\right]} \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{m}{2}-2n\right)!} \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{s+2n-\frac{m}{2}-1} + G(s),$$

wobei für $m = 2$ die Summe Null bedeutet. $E^*(s)$ hat also nur endlichviele Pole, und zwar

$$s = 1, 3, \ldots, \frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1 \quad \text{für} \quad m \equiv 0 \pmod 4;$$

$$s = 2, 4, \ldots, \frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1 \quad \text{für} \quad m \equiv 2 \pmod 4.$$

Insbesondere für $m = 2$ bleiben lediglich $s = 1$ und $s = 2$.

Ist dagegen m *ungerade*, so läßt sich (10) nicht mehr entsprechend reduzieren. $E^*(s)$ hat dann unendlichviele Pole.

3. Wir nehmen jetzt statt des Ellipsoides den konvexen, kugelartigen Körper

(k, m ganz und $\geqq 2$) $$R = R(b_1, \ldots, b_m) = |b_1|^k + \cdots + |b_m|^k \leqq n.$$

Es mögen $l(n)$ und $l^*(n)$ die Anzahl der Gitterpunkte *auf der Oberfläche*, bzw. *im Innern und auf der Oberfläche* dieses Körpers bedeuten. Die zugehörigen D. R. sind dann

$$\left(\sigma > \frac{m}{k}\right) \qquad L(s) = L_{k,m}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(n)}{n^s},$$

$$\left(\sigma > \frac{m}{k} + 1\right) \qquad L^*(s) = L^*_{k,m}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^*(n)}{n^s}.$$

Zunächst sei k *gerade*. Man sieht unschwer, daß alle γ in (5) verschwinden. Somit wird

$$(11) \qquad \begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 u^{s-1} \Big(\sum_{b=-\infty}^{\infty} e^{-|b|^k u} \Big)^m du + G(s) \\ &= \frac{2^m \Gamma^m\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{k}\right)} \frac{1}{s - \frac{m}{k}} + G(s) \end{aligned}$$

$L(s)$ ist also bis auf einen Pol erster Ordnung für $s = \frac{m}{k}$ überall regulär.

Da andererseits nach Definition

$$l^*(n) = \frac{1}{2} l(n) + \frac{1}{2} \sum_{|a|+R=n} 1,$$

so ist nach (11) für $\sigma > \frac{m}{k} + 1$

$$\begin{aligned} L^*(s) &= \frac{1}{2} L(s) + \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^1 u^{s-1} \sum e^{-(|a|+R)u} du + G(s) \\ &= \frac{2^m \Gamma^m\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{m}{k}\right)} \frac{1}{s - \frac{m}{k} - 1} + \frac{2^{m-1} \Gamma^m\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{k}\right)} \frac{1}{s - \frac{m}{k}} \\ &\quad + \frac{2^{m+1} \Gamma^m\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{s + 2n - \frac{m}{k} - 1} + G(s). \end{aligned}$$

Diese Formel zeigt uns Lage und Residuum eines jeden Poles. Für $m \not\equiv 0 \pmod k$ gibt es deren unendlich viele, andernfalls kann man eine ähnliche Reduktion wie bei (10) vornehmen.

Für *ungerades* k läßt sich mit den bisherigen Mitteln nachweisen, daß L und L^* meromorph sind und lediglich auf der Abszissenachse gelegene Pole erster Ordnung besitzen. Indessen verschwinden hier nur die γ (aus (5)) mit geradem Index. Die Residuen nehmen daher allgemein eine so komplizierte Form an, daß man mit einfachen Mitteln kaum ihr Nichtverschwinden nachweisen kann. Es soll deshalb nur die Reihe

$$\left(\sigma > \frac{2}{k}\right) \qquad L_{k,2}(s) = \Sigma'(|b_1|^k + |b_2|^k)^{-s} \qquad (k \textit{ ungerade})$$

betrachtet werden.

Hier ist es wesentlich, den genauen Wert der Konstanten γ anzugeben, was auf folgendem Wege geschehen kann.

Mittels der Mellinschen Integraldarstellung der Exponentialfunktion

$$(y > 0) \qquad e^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} y^{-z}\Gamma(z)\,dz$$

läßt sich die linke Seite von (5) in die Gestalt

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} e^{-|b|^k u} = 1 + 2\sum_{b=1}^{\infty} e^{-b^k u} = 1 + 2\,\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} u^{-z}\zeta(kz)\Gamma(z)\,dz$$

setzen. Nach bekannten Eigenschaften der Γ- und ζ-Funktion folgt hieraus durch Verschiebung des Intgrationsweges auf die Gerade $\sigma = -2r$

$$(12) \qquad (u > 0,\ u \to 0) \quad \sum_{b=-\infty}^{\infty} e^{-|b|^k u} = \frac{2\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\sqrt[k]{u}} - 2\sum_{\substack{p=1 \\ p \equiv 1 \pmod 2}}^{2r-1} \frac{1}{p!}\,\zeta(-kp)\,u^p + O(u^{2r}).$$

Durch Quadrieren ergibt sich weiter

$$(13) \qquad (u > 0,\ u \to 0) \quad \left(\sum_{b=-\infty}^{\infty} e^{-|b|^k u}\right)^2 = 4\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)u^{-\frac{2}{k}} - 8\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\sum_{\substack{p=1 \\ p \equiv 1 \pmod 2}}^{2r-1} \frac{1}{p!}\,\zeta(-kp)\,u^{p-\frac{1}{k}} + \sum_{p=1}^{2r-1} \varepsilon_{r,p}\,u^p + O(u^{2r}).$$

Wegen

$$\left(\sigma > \frac{2}{k}\right) \qquad L_{k,2}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 u^{s-1}\left(\sum_{b=-\infty}^{\infty} e^{-|b|^k u}\right)^2 du + G(s)$$

folgt durch Einsetzen von (13) und Ausintegrieren

$$(14) \qquad L_{k,2}(s) = \frac{4\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)} \frac{1}{s-\frac{2}{k}} - \frac{8\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod 2}}^{2r-1} \frac{1}{n!}\zeta(-kn) \frac{1}{s+n-\frac{1}{k}} + f_3(s),$$

wo f_3 für $\sigma > \frac{1}{k} - 2r - 1$ regulär ist. $L_{k,2}$ verhält sich also ganz anders als im Falle eines geraden k. In (14) kann man übrigens nicht zur Grenze $r \to \infty$ übergehen, da die unendliche Reihe alsdann für jedes s entweder sinnlos ist oder divergiert. Um dies einzusehen braucht man nur aus der Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ die Werte $\zeta(-kn)$ einzusetzen.

Schreibt man (14) in der Form

$$L_{k,2}(s) = \frac{4\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)} \frac{1}{s-\frac{2}{k}} + \frac{8\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{\substack{n=1 \\ kn \not\equiv 0 \pmod 2}}^{2r-1} \frac{(-1)^n}{n!}\zeta(-kn) \frac{1}{s+n-\frac{1}{k}} + f_3(s),$$

so bleibt diese Beziehung, wie sich durch eine unwesentliche Modifikation von (12) ergibt, auch für beliebige *nichtganze* $k > 0$ gültig. Aus dem oben erwähnten Grunde kann man auch hier nicht allgemein zur Grenze $r \to \infty$ übergehen. Wohl wird dies aber für $k < 1$ möglich. Wir haben daher

$$(0 < k < 1) \qquad L_{k,2}(s) = \frac{4\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)} \frac{1}{s-\frac{2}{k}} + \frac{8\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{\substack{n=1 \\ kn \not\equiv (\mathrm{mod}\ 2)}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\zeta(-kn) \frac{1}{s+n-\frac{1}{k}} + G(s).$$

4. Die Reihen des ersten und dritten Paragraphen lassen sich ohne Schwierigkeit auf beliebige algebraische Zahlkörper übertragen. Es sei K ein solcher Körper, g sein Grad, $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal. Die zugeordnete Dedekindsche Zetafunktion $\zeta_K(s)$ wird für $\sigma > 1$ durch die absolut konvergente Reihe

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

dargestellt. Hierbei durchläuft $\mathfrak{a}$ alle Ideale von K (desgleichen später $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$).

Wie von E. Hecke nachgewiesen wurde[2]), ist $\zeta_K(s)$ bis auf einen Pol erster Ordnung für $s = 1$ (dessen Residuum mit $\varrho = \varrho_K$ bezeichnet sei) in der ganzen Ebene regulär und erfüllt überdies eine Funktionalgleichung, die der Riemannschen bei $\zeta(s)$ analog ist.

Unter Hinzuziehung der hieraus folgenden Eigenschaften von $\zeta_K(s)$ läßt sich für ganzes positives k mittels der Mellinschen Integralformel, wie oben

$$(15) \qquad (u > 0,\ u \to 0) \quad \sum_{\mathfrak{a}} e^{-N\mathfrak{a}^k u} = \frac{\varrho\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\sqrt[k]{u}} + \sum_{p=0}^{2r-1} \frac{(-1)^p}{p!}\, \zeta_K(-kp)\, u^p + O(u^{2r})$$

nachweisen. Hierbei ist folgendes zu beachten. In der Reihe der zu K konjugierten Körper

$$K,\ K^{(1)},\ \ldots,\ K^{(g-1)}$$

mögen r_1 reell, $2r_2$ imaginär sein — so daß also $r_1 + 2r_2 = g$. Dann ist

für	$r_1 + r_2 = 1$	$\xi_K(0) \neq 0$;	
„	$r_1 + r_2 > 1$	$\xi_K(0) = 0$;	
„	beliebige r_1, r_2	$\xi_K(-2n) = 0$	$(n = 1, 2, 3, \ldots)$;
„	$r_2 = 0$	$\xi_K(-2n+1) \neq 0$	„ ;
„	$r_2 > 0$	$\xi_K(-2n+1) = 0$	„ .

Mit anderen Worten: für *gerades* k fallen alle Glieder der Summe (15) weg, bis auf eventuell das erste, welches beim rationalen und imaginärquadratischen Körper bleibt; für *ungerades* k bleiben nur bei total reellen Körpern die ungeraden p, andernfalls fallen auch sie weg.

Die derart interpretierte Formel (15) spielt bei den in Frage stehenden Verallgemeinerungen eine ähnliche Rolle, wie vordem (5) und (12).

Wir haben zunächst für alle Körper und ganzes positives k — die linke Seite konvergiert für $\sigma > 1 + \frac{1}{k}$ —

---

[2]) E. Hecke, *Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper*, Nachr. v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1917, S. 77—89.

Eine Darstellung der fundamentalen Eigenschaften von $\zeta_K(s)$ gibt, ohne Spezialkenntnisse vorauszusetzen, E. Landau in seinem Buche *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner (1918, 2. Aufl. 1927).

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{N\mathfrak{a}^k \leqq n} 1 = \frac{\varrho}{s-1-\frac{1}{k}} + \frac{\zeta_K(0)}{s-1} + \frac{\varrho}{2k\left(s-\frac{1}{k}\right)}$$

$$+ \frac{2\varrho\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{s+2n-1-\frac{1}{k}} + G(s).$$

Für $k = 1$ reduziert sich dies zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{N\mathfrak{a} \leqq n} 1 = \frac{\varrho}{s-2} + \left(\zeta_K(0) + \frac{\varrho}{2}\right) \frac{1}{s-1} + G(s).$$

In der Folge sollen, der einfachen Formulierung halber, nur diejenigen Körper betrachtet werden, bei denen — sowohl für gerades, wie ungerades k — alle Glieder der Summe (15) verschwinden. Der Leser mag sich dann die allgemeiner für alle K gültigen Beziehungen, soweit sie den bisher abgeleiteten analog sind, selbst überlegen.

Es sei also K ein *nichttotalreeller Zahlkörper vom Grade* $g \geqq 3$. Dann ist — die D. R. konvergieren für $\sigma > \frac{m}{k}$, $\sigma > \frac{m}{k} + 1 -$

$$\sum_{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m} (N\mathfrak{a}_1{}^k + \ldots + N\mathfrak{a}_m{}^k)^{-s} = \frac{\varrho^m \Gamma^m\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{k}\right)} \frac{1}{s-\frac{m}{k}} + G(s),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{N\mathfrak{a}_1{}^k + \ldots + N\mathfrak{a}_m{}^k \leqq n} 1 = \frac{\varrho^m \Gamma^m\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{m}{k}\right)} \frac{1}{s-\frac{m}{k}-1}$$

$$+ \frac{\varrho^m \Gamma^m\left(1+\frac{1}{k}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m}{k}\right)} \frac{1}{s-\frac{m}{k}}$$

$$+ \frac{2\varrho^m \Gamma^m\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{s+2n-\frac{m}{k}-1} + G(s).$$

Man kann auch die Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ durch m beliebige Körper $K_1, \ldots, K_m$ der oben erwähnten Art laufen lassen und überdies jedem der letzteren einen besonderen k-Exponenten zuweisen. Dann folgt

$$\sum_{\mathfrak{a}_1 | K_1, \ldots, \mathfrak{a}_m | K_m} (N\mathfrak{a}_1{}^{k_1} + \ldots + N\mathfrak{a}_m{}^{k_m})^{-s}$$

$$= \frac{\varrho_{K_1} \cdots \varrho_{K_m} \Gamma\left(1+\frac{1}{k_1}\right) \ldots \Gamma\left(1+\frac{1}{k_m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_m}\right)} \frac{1}{s-\frac{1}{k_1} - \ldots - \frac{1}{k_m}} + G(s),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{\substack{N\mathfrak{a}_1^{k_1}+\ldots+N\mathfrak{a}_m^{k_m}\leqq n \\ \mathfrak{a}_1 \mid K_1,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m \mid K_m}} 1$$

$$= \frac{\varrho_{K_1}\cdots\varrho_{K_m}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\ldots\Gamma\left(1+\frac{1}{k_m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)} \frac{1}{s-1-\frac{1}{k_1}-\ldots-\frac{1}{k_m}}$$

$$+ \frac{\varrho_{K_1}\cdots\varrho_{K_m}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\ldots\Gamma\left(1+\frac{1}{k_m}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)} \frac{1}{s-\frac{1}{k_1}-\ldots-\frac{1}{k_m}}$$

$$+ \frac{2\,\varrho_{K_1}\cdots\varrho_{K_m}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\ldots\Gamma\left(1+\frac{1}{k_m}\right)}{\Gamma(s)}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}} \frac{1}{s+2n-1-\frac{1}{k_1}-\ldots-\frac{1}{k_m}} + G(s).$$

Die betreffenden D. R. konvergieren für

$$\sigma > \frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m},\quad \sigma > 1+\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}.$$

(Eingegangen am 20. August 1934.)

Über die Teilsummen beschränkter Potenzreihen.

Von

Paul Heuser in Darmstadt.

Die vorliegende Arbeit will einen Beitrag liefern zur Frage der Abschätzbarkeit der Teilsummen beschränkter Potenzreihen.

Rogosinski[1]) leitet unter anderen das folgende Resultat her:

Konvergiert die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit den Teilsummen

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

für $|z| < 1$, *und ist daselbst*

$$|f(z)| \leqq 1,$$

so ist für $|z| \leqq \frac{1}{2}$

$$|s_n(z)| \leqq 1.$$

Die Schranke ist scharf.

Im § 2 ergeben sich Schranken für $|s_n(z)|$, die vom Radius r des Kreises abhängen, auf dessen Inneres die Veränderliche z beschränkt wird. Für eine etwas speziellere Funktionenklasse als die obige (es tritt noch die Voraussetzung $f(0) = 0$ hinzu), sind sie zum Teil erheblich schärfer als die Rogosinskische Schranke. Sie folgen aus einem im § 1 enthaltenen Satz über die Teilsummen aller Reihen mit vorgegebener Summe S und vorgegebener Absolutsumme $\mathfrak{S}$. Seines einfachen geometrischen Beweises wegen ist dieser Satz auch an sich interessant.

§ 1.

Wir betrachten eine absolut konvergente Reihe, die aus konstanten Gliedern gebildet ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = S. \tag{1}$$

Für die Reihe der absoluten Beträge gelte

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = \mathfrak{S}. \tag{2}$$

[1]) W. Rogosinski, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 260—276. Ferner: J. Schur und G. Szegö, Über die Abschnitte einer im Einheitskreise beschränkten Potenzreihe. Sitz.-Ber. der Ak. d. Wiss., Berlin XXX (1925), Phys.-math Klasse. S. 545—560.

In der Ebene der komplexen Zahlen können wir ein Bild der Reihe (1) entwerfen, indem wir die die Zahlen c_n darstellenden Vektoren c_n in der Reihenfolge ihrer Indizes aneinandersetzen. So entsteht ein Polygonzug, der im Koordinatenanfang beginnt und im Bildpunkt S der Zahl S endigt. Seine Länge beträgt $\mathfrak{S}$. Die Ecken des Polygonzuges sind die Bildpunkte der Teilsummen

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

unserer Reihe.

Da die Summe der von 0 und S nach s_n gehenden Fahrstrahlen $\leqq \mathfrak{S}$ ist, liegen alle Punkte s_n im Inneren einer Ellipse, die die Punkte 0 und S zu Brennpunkten und die Länge $\mathfrak{S}$ zur großen Achse hat. Damit haben wir den Satz:

Die Teilsummen aller Reihen mit der Summe S und der Absolutsumme $\mathfrak{S}$ liegen im abgeschlossenen Inneren einer Ellipse mit den Brennpunkten 0 und S und der großen Achse $\mathfrak{S}$.

§ 2.

Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3}$$

sei für $|z| < 1$ konvergent. Wir bezeichnen mit $M(r)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf dem Kreis $|z| = r < 1$ und mit $\mathfrak{M}(r)$ das Maximum von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

auf demselben Kreis. Bedeutet nun z_0 einen beliebigen Punkt des Kreises $|z| = r < 1$, so liegen nach dem Satz des vorigen Paragraphen die Teilsummen der Reihe

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

alle im Inneren einer Ellipse mit den Brennpunkten 0 und $f(z_0)$ und der großen Achse

$$\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n|.$$

Führen wir die Bestimmung dieser Ellipse für jeden Punkt von $|z| = r$ durch, so liegen alle so erhaltenen Ellipsen im Inneren eines Kreises um den Nullpunkt vom Radius

$$\tfrac{1}{2}(M(r) + \mathfrak{M}(r)).$$

Wir haben damit den Satz:

Konvergiert die Potenzreihe

$$f(z) = \Sigma a_n z^n$$

absolut für $|z| = r$, *so ist auch für* $|z| \leqq r$ *und alle* n

$$|s_n(z)| \leqq \tfrac{1}{2}(M(r) + \mathfrak{M}(r)).$$

Dieser Satz ist vieler Anwendungen fähig, wenn man die für spezielle Funktionenklassen geltenden Abschätzungen von $M(r)$ und $\mathfrak{M}(r)$, sowie die zwischen beiden Größen bestehenden Beziehungen berücksichtigt.

1. Betrachtet man z. B. die Klasse der für $|z| < 1$ regulären und daselbst gleichmäßig beschränkten Funktionen

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n & (|z| < 1) \\ |f(z)| \leqq 1, \end{cases}$$

so ergibt sich ohne weiteres unter Berücksichtigung von $|a_n| \leqq 1$ für $|z| = r < 1$ und alle n

$$\text{(5)} \qquad |s_n(z)| < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-r}\right) = \frac{2-r}{2(1-r)}.$$

Wie man sieht, ist diese Schranke für $|z| = \frac{1}{2}$ weniger gut als das Resultat von Rogosinski, dafür gilt sie aber auch noch für $\frac{1}{2} < r < 1$.

2. Bekanntlich[2]) ist für jede Potenzreihe

$$\mathfrak{M}(r) \leqq M(3r),$$

wenn $3r$ kleiner als der Konvergenzradius ϱ der Reihe ist. Demnach wird für $|z| = r < \frac{\varrho}{3}$

$$\text{(6)} \qquad |s_n(z)| \leqq \tfrac{1}{2}(M(r) + M(3r)).$$

Schätzt man ganz roh weiter ab

$$M(r) \leqq M(3r),$$

so wird für $|z| = r < \frac{\varrho}{3}$,

$$\text{(7)} \qquad |s_n(z)| \leqq M(3r).$$

Für die Potenzreihen (4) ist diese Abschätzung immerhin im Gebiet $|z| < \frac{1}{3}$ mit der Rogosinskischen Schranke identisch.

3. Wir betrachten nunmehr solche Potenzreihen (4), für die

$$f(0) = 0$$

ist. Nach dem Schwarzschen Lemma ist dann

$$M(r) \leqq r.$$

Wegen $|a_n| \leqq 1$ ist weiter

$$\mathfrak{M}(r) \leqq \frac{r}{1-r}.$$

Demnach wird für $|z| \leqq r$

$$\text{(8)} \qquad |s_n(z)| \leqq \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{r}{1-r}\right) = \frac{r(2-r)}{2(1-r)}.$$

Diese Schranke ist bereits für $r = \frac{1}{2}$ besser als die Rogosinskische.

[2]) H. Bohr, A Theorem concerning Power Series. Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, 13, S. 1—5; 1914.

(Eingegangen am 15. September 1934.)

Elliptische Funktionen und Kegelschnittbüschel.

Von

Kurt Heegner in Berlin.

Vor einiger Zeit habe ich folgenden Satz über elliptische Funktionen mitgeteilt[1]):

Gegeben sei ein elliptisches Integral erster Gattung von der allgemeinen Form

$$(1) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{F_4(\xi)}} \quad (F_4 \text{ Polynom vierten Grades})$$

mit beliebiger aber fest gegebener unterer Grenze. Die Umkehrungsfunktion sei $\varphi(u)$. Ferner seien u_1, u_2, u_3, u_4 vier voneinander unabhängige Argumente und s ihre halbe Summe. Sodann sind die nachstehenden Doppelverhältnisse einander gleich:

$$(2) \qquad (\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3), \varphi(u_4)) = (\varphi(s-u_1), \varphi(s-u_2), \varphi(s-u_3), \varphi(s-u_4)).$$

Das Auftreten von Doppelverhältnissen deutet darauf hin, daß der Satz mit der Geometrie in Beziehung steht, und die Darlegung dieses Zusammenhanges bildet den Gegenstand dieser Notiz. Zunächst wird in Abschnitt a) der in der genannten Abhandlung angedeutete Beweis aus der Theorie der elliptischen Funktionen gegeben. Die geometrische Untersuchung knüpft an das Ponceletsche Schließungsproblem an [Abschnitt b)]. Eine Doppelverhältnisrelation wird hergeleitet, vermittelst deren in Abschnitt c) die in vier unabhängigen Variablen aufgestellte Gleichung (2) für eine dichtliegende Wertemenge der vier Variablen bewiesen wird. Sodann gilt die Gleichung als analytische Beziehung für alle Argumente. Die Beweisführung ergibt eine geometrische Deutung des Satzes am Kegelschnittbüschel [Abschnitt d)]. Es folgt eine Anwendung des Satzes auf die Sieben- und Elfteilung der einzelnen Periode der elliptischen Funktionen [Abschnitt e)].

a) Beweis des Satzes.

Die durch (1) definierte Funktion $\varphi(u)$ ist die allgemeinste zweiwertige doppelperiodische Funktion. Ihre Beziehung zur Weierstraßschen $\wp$-Funktion ist durch eine lineare gebrochene Substitution gegeben, sobald die untere Grenze des Integrals in (1) in eine Nullstelle von F_4 gelegt

[1]) Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 457; Abschnitt b).

wird. Eine spezielle Annahme über den Ursprung der Funktion $\varphi(u)$ ist jedoch gestattet, da bei Vermehrung der Argumente u_1, u_2, u_3, u_4 um dieselbe Konstante auch $(s-u_1), (s-u_2), (s-u_3), (s-u_4)$ um diese Konstante wachsen. Somit genügt es, den Beweis für $\wp(u)$ zu führen. Wir schreiben die Gleichung (2) für diese Funktion ausführlich hin:

$$(3)\qquad \frac{\wp(u_1)-\wp(u_3)}{\wp(u_2)-\wp(u_3)}\cdot\frac{\wp(u_1)-\wp(u_4)}{\wp(u_2)-\wp(u_4)} = \frac{\wp(s-u_1)-\wp(s-u_3)}{\wp(s-u_2)-\wp(s-u_3)}:\frac{\wp(s-u_1)-\wp(s-u_4)}{\wp(s-u_2)-\wp(s-u_4)}.$$

Die Beziehung zur Sigmafunktion ergibt

$$(4)\qquad \begin{aligned}\wp(u_1)-\wp(u_3) &= -\frac{\sigma(u_1+u_3)\,\sigma(u_1-u_3)}{\sigma(u_1)^2\cdot\sigma(u_3)^2}\ \text{u. s. f.},\\ \wp(s-u_1)-\wp(s-u_3) &= +\frac{\sigma(u_2+u_4)\cdot\sigma(u_1-u_3)}{\sigma(s-u_1)^2\cdot\sigma(s-u_3)^2}\ \text{u. s. f.}\end{aligned}$$

Werden diese Ausdrücke in (3) eingesetzt, so läßt sich durch Umordnen der Faktoren leicht feststellen, daß die Gleichung in eine Identität übergeführt wird. Hiermit ist der Satz bewiesen. In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, daß Weierstraß beim Beweise der dreigliedrigen Sigmarelation von der Identität

$$(5)\qquad (\wp(u_1), \wp(u_3), \wp(u_2), \wp(u_4)) = 1-(\wp(u_1), \wp(u_2), \wp(u_3), \wp(u_4))$$

ausging.

b) Das Ponceletsche Schließungsproblem.

Den formulierten Satz habe ich im Jahre 1915 bei der Beschäftigung mit dem Ponceletschen Schließungsproblem gewonnen. Diese Betrachtungen geben eine elementar-arithmetische Begründung des Schließungssatzes. Es sei

(6 a) 1, 2, 3, 4, ...

ein Linienzug, der einem Kegelschnitt einbeschrieben ist und einem anderen Kegelschnitt umbeschrieben ist (Fig. 1), und

(6 b) 1′, 2′, 3′, 4′, ...

ein Linienzug, der denselben Kegelschnitten ein- und umbeschrieben ist. Sodann bilden die Geraden 1 2, 2 3, 3 4, 4′ 3′, 3′ 2′, 2′ 1′ ein Brianchonsches Sechseck und die Schnittpunkte der Geraden 1 2 und 1′ 2′, 2 3′ und 2′ 3, 3 4 und 3′ 4′ liegen auf einer Geraden (Fig. 1). Ferner folgt aus

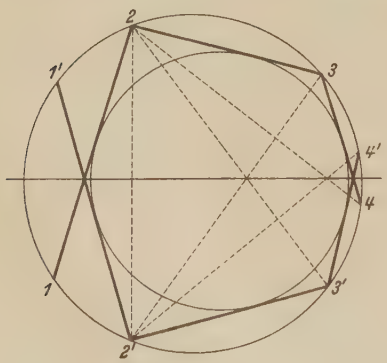


Fig. 1.

dem Pascalschen Lehrsatze, daß auch der Schnittpunkt der Geraden 2 4 und 2′ 4′ auf dieser Geraden liegt. Es befinden sich daher die vom Zentrum 2′ nach 1′, 2, 3, 4′ ausgehenden Strahlen mit den vom Zentrum 2 nach 1, 2′, 3′, 4 ausgehenden Strahlen in perspektiver Lage, so daß die durch die vier Elemente bestimmten Doppelverhältnisse einander gleich sind:

$$(1', 2, 3, 4') = (1, 2', 3', 4). \tag{7}$$

Der so erhaltene Satz läßt sich ersichtlich umkehren. Liegen auf einem Kegelschnitt die Punkte 1′ 2 3 4′ mit den Punkten 1 2′ 3′ 4 projektiv, so gibt es einen Kegelschnitt, der sowohl dem Linienzug 1, 2, 3, 4 als auch dem Linienzug 1′, 2′, 3′, 4′ einbeschrieben ist. Die geometrische Figur findet in der synthetischen Geometrie bei Bestimmung der Doppelelemente zweier auf demselben Träger befindlichen projektiven Punktreihen Verwendung. Die Gerade, welche durch die Schnittpunkte der Geraden 1 2 und 1′ 2′ und der Geraden 2 3′ und 2′ 3 hindurchzieht, schneidet die Doppelelemente der durch 1′, 2, 3 und 1, 2′, 3′ bestimmten Punktreihen auf dem umschriebenen Kegelschnitt aus. Indem nunmehr Linienzüge betrachtet werden, die einem Kegelschnitt umbeschrieben und einem anderen einbeschrieben sind, läßt sich durch wiederholte Anwendung der Beziehung (7) diese Figur für die elliptischen Funktionen verwerten.

Fallen in Fig. 1 die Punkte 1 und 4 zusammen, so koinzidieren zufolge (7) auch 1′ und 4′, so daß der Ponceletsche Schließungssatz allgemein für Dreiecke bewiesen ist. Es besteht die Aufgabe, die Beziehung (7) so zu verallgemeinern, daß der Satz für jedes n-Eck folgt. Fügen wir den beiden Punktfolgen in (6) einen fünften Punkt hinzu, so läßt sich der Satz (7) viermal anwenden. Wir schreiben diese Gleichungen in der Form:

$$\begin{aligned} (1, 4, 2', 3') &= (1', 4', 2, 3), \\ (1, 4, 3', 4') &= (2', 5', 2, 3), \\ (2, 5, 2', 3') &= (1', 4', 3, 4), \\ (2, 5, 3', 4') &= (2', 5', 3, 4). \end{aligned} \tag{8}$$

Durch Multiplikation beider Seiten gelingt vermittelst

$$(m, n, a, b)\,(m, n, b, c) = (m, n, a, c) \tag{9}$$

die Elimination von 3 und 3′. Es ergibt sich

$$(1, 4, 2', 4')\,(2, 5, 2', 4') = (1', 4', 2, 4)\,(2', 5', 2, 4). \tag{10}$$

Nunmehr ist identisch

$$(4, 2, 2', 4') = (4', 2', 2, 4) \tag{11}$$

und die Multiplikation ergibt nach (9) das Resultat

$$(1, 5, 2', 4') = (1', 5', 2, 4). \tag{12}$$

Wenn wir allgemein zeigen, daß

$$(1, n+1, 2', n') = (1', n+1', 2, n) \tag{13}$$

gilt, ist der Ponceletsche Schließungssatz für das n-Eck bei allen hierbei möglichen Lagen der Kegelschnitte bewiesen. Besteht der Linienzug aus n Seiten, so gibt es $(n-2)^2$ Relationen (7). Die Multiplikation ergibt Produkte wie

$$(1, 4, 2', 3')\,(1, 4, 3', 4') \ldots (1, 4, n-1', n') = (1, 4, 2', n') \tag{14}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}&(1, 4, 2', n')\,(2, 5, 2', n')\,(3, 6, 2', n') \ldots (n-2, n+1, 2', n')\\ &= (1', 4', 2, n)\,(2', 5', 2, n)\,(3', 6', 2, n) \ldots (n-2', n+1', 2, n).\end{aligned} \tag{15}$$

Die vorderen Elementziffern schreiten um je eine Einheit fort, während ihre Differenz drei beträgt. Somit läßt sich jede Seite auf drei Doppelverhältnisse reduzieren. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned}n &= 0 \pmod 3 \quad (1, n+1, 2'\, n')\,(2, n-1, 2', n')\,(3, n, 2', n') = \ldots,\\ n &= 1 \pmod 3 \quad (1, n, 2', n')\,(2, n+1, 2'\, n')\,(3, n-1, 2', n') = \ldots,\\ n &= 2 \pmod 3 \quad (1, n-1, 2', n')\,(2, n, 2', n')\,(3, n+1, 2', n') = \ldots.\end{aligned} \tag{16}$$

Sodann ist identisch

$$(n, 2, 2', n') = (n', 2', 2, n). \tag{17}$$

Ferner kann angenommen werden, daß der Satz für $n-2$ schon bewiesen ist, also

$$(n-1, 3, 2', n') = (n-1', 3', 2, n). \tag{18}$$

Die Multiplikation von (16), (17), (18) gibt in allen Fällen das Resultat (13).

c) Einführung der elliptischen Funktionen.

Die Schließungssätze an algebraischen Kurven finden ihre naturgemäße Erklärung in den Perioden der Integrale der zugehörigen algebraischen Funktionen. In der vorstehenden Ableitung wurde eine solche Periode nicht verwendet, vielmehr beruht der Beweis auf der Doppelverhältnisrelation (13), von der nunmehr zu zeigen ist, daß sie im wesentlichen mit dem eingangs formulierten Satz über elliptische Funktionen identisch ist.

Der dem Linienzug umschriebene Kegelschnitt sei durch die Gleichung in Punktkoordinaten

$$x_2^2 - 4\, x_1\, x_3 = 0 \tag{19}$$

gegeben. Eine Parameterdarstellung ist sodann

$$x_1 : x_2 : x_3 = \xi^2 : 2\xi : 1 \tag{20}$$

und die Gleichung der Sekante, die die Punkte der Parameterwerte ξ und ξ' miteinander verbindet, ist

$$x_1 - \tfrac{1}{2}(\xi + \xi')\, x_2 + \xi\, \xi'\, x_3 = 0. \tag{21}$$

Die Gleichung des einbeschriebenen Kegelschnitts sei in Linienkoordinaten in der allgemeinen Form

$$g(y_1, y_2, y_3) = 0 \tag{22}$$

gegeben. Die Sekante in (21) berührt den Kegelschnitt, wenn

$$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : -\tfrac{1}{2}(\xi + \xi') : \xi\, \xi' \tag{23}$$

ist und y_1, y_2, y_3 die Gleichung (22) erfüllen. Dies ergibt eine zweizweideutige in ξ und ξ' symmetrische Verwandtschaft

$$g(1, -\tfrac{1}{2}(\xi + \xi'), \xi\, \xi') = 0 \tag{24}$$

vom Geschlecht Eins. Die Ausrechnung nach ξ oder ξ' ergibt unter der Quadratwurzel das bereits in (1) verwendete Verzweigungspolynom F_4. Die Nullstellen dieses Polynoms ergeben die Parameterwerte derjenigen Punkte, in denen der Kegelschnitt (22) den Kegelschnitt (19) schneidet. Wie in Fig. 1 werde angenommen, daß diese vier Punkte paarweise konjugiert imaginär sind. Bedeuten ξ_0 und ξ_0' die Parameter einer beliebigen aber festen Sekante und ξ_1 und ξ_1' die Parameter einer veränderlichen Sekante, so erhält man zufolge der Symmetrie in ξ und ξ' für das Integral erster Gattung

$$u = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\,\xi}{\sqrt{F_4(\xi)}} = \int_{\xi_0'}^{\xi_1'} \frac{d\,\xi}{\sqrt{F_4(\xi)}} = \int_{\xi_0}^{\xi_1'} - \int_{\xi_0}^{\xi_0'}. \tag{25}$$

Indem aber

$$u' = \int_{\xi_0}^{\xi_1'} = u + \int_{\xi_0}^{\xi_0'} = u + c \tag{26}$$

wird, wächst das Argument vom Anfangspunkt (ξ_1) bis zum Endpunkt (ξ_1') der Sekante um die Konstante c. Somit sind einem Linienzug $1, 2, 3, \ldots, n$ die Argumente

$$u,\ u + c,\ u + 2c,\ \ldots,\ u + (n-1)c \tag{27}$$

zugeordnet. Einem zweiten Linienzug $1', 2', 3', \ldots, n'$, dessen Anfangspunkt von dem ersten unabhängig ist, sind die Argumente

$$v,\ v + c,\ v + 2c, \ldots, v + (n-1)c \tag{28}$$

zugeordnet. In der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Gleichung

$$(1, 2', n', n + 1) = (1', 2, n, n + 1') \tag{29}$$

sind daher den Elementen der Doppelverhältnisse folgende Argumente zugeordnet:

$$(30)\qquad \begin{matrix} u, & v+c, & v-c+nc, & u+nc, \\ v, & u+c, & u-c+nc, & v+nc. \end{matrix}$$

Bedeutet ω_r die reelle Periode der elliptischen Funktion, so kann nc durch $nc - m\omega_r$ ersetzt werden. Durch Wahl der ganzen Zahlen m und n kann man sich sodann jeder vorgeschriebenen reellen Größe beliebig nähern. Wird aber c' für nc gesetzt, so sind die Argumente in der einzelnen Reihe voneinander unabhängige Größen. Bezeichnen wir also die Größen der oberen Zeile mit u_1, u_2, u_3, u_4 und die halbe Summe mit s, so berechnen sich die Argumente der zweiten Zeile zu $s - u_4$, $s - u_3$, $s - u_2$, $s - u_1$. Hiermit ist der Satz bewiesen.

d) Geometrische Deutung des Satzes am Kegelschnittbüschel.

Die beiden Kegelschnitte, welchen der Linienzug um- und einbeschrieben ist, definieren ein Kegelschnittbüschel. Dieses Büschel soll nunmehr in den Kreis der Betrachtungen gezogen werden in der Weise, daß der umschriebene Kegelschnitt, auf welchem der Parameter ξ eingeführt wurde, festbleibt, jedoch der einbeschriebene Kegelschnitt durch andere Kegelschnitte des Büschels ersetzt wird. Diese Kegelschnitte erzeugen eine zwei-zweideutige Verwandtschaft (24) mit demselben Verzweigungspolynom F_4. Denn die Nullstellen von F_4 sind durch die Werte des Parameters ξ gegeben, welche dieser auf dem umschriebenen Kegelschnitt in den Grundpunkten des Büschels annimmt. Hingegen ändert das in (26) mit c bezeichnete bestimmte Integral seinen Wert. Jedem Kegelschnitt sind zwei durch das Vorzeichen unterschiedene Werte $\pm c$ zugeordnet, und zwar ist je nach der Richtung, in der der durch den Kegelschnitt definierte Linienzug durchlaufen wird, $+c$ oder $-c$ zu wählen. Für den umbeschriebenen Kegelschnitt ist $c = 0$. Betrachtet man drei Kegelschnitte des Büschels mit den zugeordneten Werten $0, c_1, c_2$ und konstruiert zwei Linienzüge 1, 2, 3, 4 und 4′, 3′, 2′, 1′ nach Fig. 2, deren Punkte die Argumente

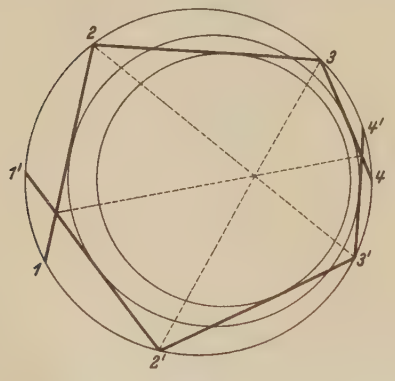


Fig. 2.

$$(31)\qquad \begin{matrix} u, & u+c_1, & u+c_1+c_2, & u+2c_1+c_2, \\ v, & v+c_1, & v+c_1+c_2, & v+2c_1+c_2 \end{matrix}$$

zugeordnet sind, so ergibt sich der Satz, daß die Seiten der Linienzüge ein Brianchonsches Sechseck bilden. Diese Deutung läßt folgende Umkehrung zu. Einem Kegelschnitt werden zwei Linienzüge 1, 2, 3, 4 und $1', 2', 3', 4'$ einbeschrieben, deren Seiten ein Brianchonsches Sechseck bilden. Aus der Schar der Kegelschnitte, die die Geraden 12, 34, $1'2'$, $3'4'$ berühren, wählen wir einen beliebigen Kegelschnitt aus. Dieser und der umbeschriebene Kegelschnitt definieren ein Kegelschnittbüschel. In diesem Büschel gibt es einen Kegelschnitt, der nicht nur die Gerade 23 sondern auch die Gerade $2'3'$ berührt.

Erwähnt sei, daß die Weierstraßsche Funktion den Zusammenhang zwischen dem Parameter des Kegelschnittbüschels und der Konstanten c vermittelt. Das Kegelschnittbüschel ist in der Gestalt

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 (x_2^2 + 2x_1 x_3) + 2a_3 x_2 x_3 + a_4 x_3^2 + \wp(c)(x_2^2 - 4x_1 x_3) = 0 \tag{32}$$

anzusetzen. Das Verzweigungspolynom F_4, dessen Nullstellen die Grundpunkte des Büschels liefern, berechnet sich nach Einführung von ξ nach (20) zu $F_4 = (a\,\xi)^4$. Die Diskriminante der ternären Form (32) ergibt in $\wp(c)$ die kubische Resolvente von F_4

$$-4\,\wp^3(c) + g_2\,\wp(c) + g_3. \tag{33}$$

Die Kontravariante der ternären Form, welche den Übergang zu Linienkoordinaten vermittelt, enthält den Parameter $\wp(c)$ bis zum zweiten Grade. Werden nunmehr ξ und ξ' nach (23) eingeführt, so ergibt die Ausrechnung nach $\wp(c)$

$$\wp(c) = \frac{(a\,\xi)^2 (a\,\xi')^2 + \sqrt{(a\,\xi)^4 (a\,\xi')^4}}{2(\xi\,\xi')^2} \tag{34}$$

In dieser Formel, die eine Verallgemeinerung des Additionstheorems darstellt[2]), ist der Quadratwurzel das positive Zeichen zu geben, da bei $\xi = \xi'$ die Konstante c den Wert 0 annehmen soll. Sind den Punkten ξ und ξ' die Argumente u und u' zugeordnet, so ist $u' - u = c$ und hiermit ist gezeigt, daß $\wp(c)$ der Parameter des Büschels ist.

e) Anwendung des Satzes auf die Teilwerte der elliptischen Funktionen.

Auf Grund des Satzes lassen sich bemerkenswerte Eigenschaften der Teilungsgleichungen für die Perioden ableiten. Eine Anwendung auf die Drei- und Vierteilungsgleichung wurde in der oben[1]) genannten Arbeit

[2]) F. Klein, Math. Annalen 27 (1886); E. Study, Monatsh. f. Math. u. Phys. 35 (1928), S. 249 (Schlußbemerkung).

gemacht. Im folgenden werde eine Bemerkung über die Siebenteilung und Elfteilung gegeben.

Die Anwendung auf den einzelnen Linienzug ergibt zunächst

$$(35) \qquad (1, 4, 5, 6) = (7, 4, 3, 2).$$

Bei Hinzunahme eines achten Punktes werden zwei weitere Relationen erhalten:

$$(36) \qquad \begin{aligned} (2, 5, 6, 7) &= (8, 5, 4, 3), \\ (1, 4, 6, 7) &= (8, 5, 3, 2). \end{aligned}$$

Diese drei Relationen sind voneinander abhängig, und die Elimination der 8 aus (36) führt auf (35) zurück. Fällt nunmehr 8 und 1 zusammen, so wird ein Siebeneck erhalten, das einem Kegelschnitt einbeschrieben und einem anderen umbeschrieben ist. Sämtliche Relationen werden erhalten, sobald in (35) die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 zyklisch vertauscht werden. Aber nur zwei Relationen sind voneinander unabhängig. Verschieben wir in (35) die Zahlenfolge um 1 und 5 modulo 7, so ergibt sich

$$(37) \qquad \begin{aligned} (2, 5, 6, 7) &= (1, 5, 4, 3), \\ (6, 2, 3, 4) &= (5, 2, 1, 7). \end{aligned}$$

Durch Division läßt sich 7 eliminieren, und die Ausrechnung der Doppelverhältnisse ergibt

$$(38) \quad (1\,3)\,(3\,2)\,(2\,6)\,(6\,4)\,(4\,5)\,(5\,1) = (1\,2)\,(2\,4)\,(4\,1)\cdot(3\,6)\,(6\,5)\,(5\,3).$$

Die Gleichung geht bei zyklischer Vertauschung der durch die Potenzreste von 3 modulo 7 gegebenen Zahlenfolge in sich über. Diese Eigenschaft ist darin begründet, daß auch die Diagonalpolygone, bei denen die gleiche Anzahl Ecken übersprungen werden, Siebenecke darstellen, die einem Kegelschnitt einbeschrieben und einem anderen umbeschrieben sind. Erwähnt sei, daß das algebraische Gebilde noch andere Transformationen in sich zuläßt, die eine zweite Gruppenerweiterung zur Folge haben.

Nimmt der Linienzug von einem gemeinsamen Punkt der Kegelschnitte seinen Anfang oder enthält er eine gemeinsame Tangente der Kegelschnitte, so verläuft die Zahlenfolge nach beiden Richtungen hin symmetrisch. Wiederholt sich ein solches Vorkommnis, so stellt die Zahlenfolge Teilwerte einer Periode dar. Für die Periodenelfteilung ergibt sich der Ansatz:

$$(39) \qquad \begin{aligned} &\ldots\ldots\ldots 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, \ldots\ldots\ldots, \\ &2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, \ldots\ldots\ldots. \end{aligned}$$

In der unteren Zeile ist eine Verschiebung um vier Stellen vorgenommen, und die Anwendung des speziellen Satzes (7) ergibt

$$(40) \qquad \begin{aligned} (2, 1, 0, 5) &= (2, 3, 4, 1), \\ (3, 0, 1, 5) &= (1, 4, 5, 2). \end{aligned}$$

Die Elimination des Elementes 0 ergibt das Resultat

$$(41) \qquad (1\,2)\,(2\,4)\,(4\,3)\,(3\,5)\,(5\,1) = (1\,4)\,(4\,5)\,(5\,2)\,(2\,3)\,(3\,1).$$

Die Gleichung geht bei zyklischer Vertauschung von 1, 2, 4, 3, 5 in sich über. Diese Zahlenfolge ist durch die absolut kleinsten Potenzreste von 2 modulo 11 gegeben. (41) führt auf ein algebraisches Gebilde vom Geschlecht Eins, daß auf Grund der angegebenen zyklischen Vertauschungen eine rationale Periodenfünfteilung besitzt und in diesem Zusammenhang durch Transformation fünften Grades in das elliptische Gebilde des elften Transformationsgrades der elliptischen Funktionen übergeht.

(Eingegangen am 4. September 1934.)

Abhängigkeit von Funktionen und Rang der Funktionalmatrix.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Definition 1: Die Funktionen

$$u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_q), \ldots, u_p = u_p(x_1, \ldots, x_q), \tag{1}$$

von denen nur vorausgesetzt wird, daß sie in einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_q)$ des $x_1, \ldots, x_q$-Raumes definiert sind, heißen in $\mathfrak{B}$ voneinander abhängig, wenn es eine Funktion $F(u_1, \ldots, u_p)$ mit folgenden drei Eigenschaften gibt:

a) F ist in dem ganzen $u_1, \ldots, u_p$-Raum definiert und mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen;

b) F verschwindet in keinem Teilgebiet des $u_1, \ldots, u_p$-Raumes identisch;

c) für die Punkte von $\mathfrak{B}$ ist

$$\Phi(x_1, \ldots, x_q) = F(u_1(x_1, \ldots, x_q), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_q)) = 0.$$

Definition 2: Die Funktionen (1) heißen in einem offenen Gebiet $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_q)$, in dem sie definiert sind, voneinander abhängig, wenn sie in jeder beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{G}$ nach der Definition 1 voneinander abhängig sind.

Weiter bedeute die

Voraussetzung V: Die Funktionen (1) haben in $\mathfrak{G}$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Dann besteht der

Satz 1: *Ist $p = q = n$, so sind die Funktionen* (1) *unter der Voraussetzung* V *genau dann in $\mathfrak{G}$ voneinander abhängig, wenn die Funktionaldeterminante (Jacobische Determinante)*

$$J(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

in $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_n)$ identisch verschwindet.

Die angeführte exakte Definition der Abhängigkeit der Funktionen und den ersten wirklichen Beweis des Satzes 1 verdankt man den Herren Knopp und R. Schmidt[1]).

Ist $p > q$, so sind die Funktionen (1) unter der Voraussetzung V in $\mathfrak{G}$ immer voneinander abhängig. Das folgt unmittelbar aus Satz 1[2]).

Ist $p < q$, so besteht, wie sehr leicht zu sehen ist[3]), unter der Voraussetzung V eine notwendige Bedingung für die Abhängigkeit der Funktionen (1) in $\mathfrak{G}$ darin, daß die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_1}{\partial x_q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \end{pmatrix} \tag{2}$$

an jeder Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}$ höchstens den Rang $p-1$ hat. Über die Umkehrung dieses Satzes ist folgendes bekannt:

Wird der Punkt P des Gebiets $\mathfrak{G}$ regulär genannt, wenn in jedem Punkt einer passend gewählten Umgebung von P der Rang der Matrix (2) höchstens gleich dem Rang an der Stelle P ist, so gilt auf Grund älterer Beweise der

Satz 2: *Unter der Voraussetzung* V *sind die Funktionen* (1) *in* $\mathfrak{G}$ *voneinander abhängig, wenn die Matrix* (2) *in* $\mathfrak{G}$ *höchstens den Rang* $p-1$ *hat und* $\mathfrak{G}$ *nur reguläre Punkte aufweist*[4]).

Herr Doetsch[5]) hat diesen Satz verallgemeinert zu dem

Satz 3: *Unter der Voraussetzung* V *sind die Funktionen* (1) *in* $\mathfrak{G}$ *voneinander abhängig, wenn die Matrix* (2) *in* $\mathfrak{G}$ *höchstens den Rang* $p-1$ *hat und die nicht-regulären Punkte jeder beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von* $\mathfrak{G}$ *durch die Abbildung* (1) *in eine Nullmenge des* $u_1, \ldots, u_p$*-Raumes übergeführt werden.*

Bei diesem Satz sowie einigen aus ihm durch Herrn Doetsch gezogenen Folgerungen ist die besondere Voraussetzung über die nicht-regulären Punkte lästig. Für die Anwendung in der Theorie der linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen[6]) ist vor allem der Fall $q = p+1$ von Bedeutung, und in diesem Falle kann diese lästige Voraussetzung durch eine handlichere Voraussetzung ersetzt werden. Es besteht nämlich der

[1]) Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 373—381. Vgl. auch Ostrowski, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 36 (1927), S. 129—134; Doetsch, Math. Annalen 99 (1928), S. 590—601; Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 302 ff.

[2]) Vgl. z. B. Doetsch, a. a. O., Satz III; Kamke, a. a. O., S. 309.

[3]) Doetsch, Satz IV; Kamke, S. 310.

[4]) Doetsch, Satz V.

[5]) a. a. O., Satz VI.

[6]) Vgl. z. B. Kamke, a. a. O., S. 323.

Satz 4: *Besitzen die Funktionen*

$$u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_{n+1}), \ldots, u_n = u_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) \tag{3}$$

in $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, so sind die Funktionen in* $\mathfrak{G}$ *voneinander abhängig, wenn die Matrix*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x_{n+1}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_{n+1}} \end{pmatrix} \tag{4}$$

in $\mathfrak{G}$ *höchstens den Rang* $n-1$ *hat.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{B}$ irgendeine beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{G}$. Die nicht-regulären Punkte von $\mathfrak{B}$ gehören zu der Teilmenge $\mathfrak{M}$ der Punkte von $\mathfrak{B}$, in denen die Matrix (4) einen Rang $\leqq n-2$ hat. Nach Satz 3 ist daher Satz 4 bewiesen, sobald gezeigt ist, daß die Menge $\mathfrak{M}$ durch die Funktionen (3) auf eine Menge $\mathfrak{M}'$ des $u_1, \ldots, u_n$-Raumes abgebildet wird, die das Maß 0 hat. Übrigens wird sich sogar ergeben, daß $\mathfrak{M}'$ den Peano-Jordanschen Inhalt 0 hat.

Es gibt eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{G}$, so daß für ein passend gewähltes $\varrho > 0$ die abgeschlossene würfelförmige ϱ-Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{B}$, und damit auch $\mathfrak{B}$ selber ein Teil von $\overline{\mathfrak{B}}$ ist. Weiter gibt es ein $K > 0$, so daß

$$\left|\frac{\partial u_r}{\partial x_s}\right| < K, \quad \left|\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_s \partial x_t}\right| < K \qquad (r = 1, \ldots, n;\ s, t = 1, \ldots, n+1) \tag{5}$$

für die Punkte von $\overline{\mathfrak{B}}$ gilt. Für jeden Punkt $y_1, \ldots, y_{n+1}$ von $\mathfrak{M}$ und

$$|x_1 - y_1| \leqq l, \ldots, |x_{n+1} - y_{n+1}| \leqq l, \quad l \leqq \varrho \tag{6}$$

folgt dann aus dem Taylorschen Satz für $\nu = 1, \ldots, n$

$$u_\nu(x_1, \ldots, x_{n+1}) - u_\nu(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum_{\lambda=1}^{n+1} (x_\lambda - y_\lambda)\, u'_{\nu(x_\lambda)}(y_1, \ldots, y_{n+1}) + \delta_\nu, \tag{7}$$

wobei $u'_{\nu(x_\lambda)}$ die partielle Ableitung von u_ν nach x_λ bezeichnet und

$$|\delta_\nu| < K l^2 (n+1)^2 \tag{8}$$

ist. Schließlich wird noch ein abgeschlossener achsenparalleler Würfel $\mathfrak{W}_0$ gewählt, der $\overline{\mathfrak{B}}$ enthält. Die Kantenlänge von $\mathfrak{W}_0$ sei L.

Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. $\mathfrak{W}_0$ wird in abgeschlossene, untereinander kongruente Teilwürfel mit einer Kantenlänge $l \leqq \mathrm{Min}(\varepsilon, \varrho)$ aufgeteilt. Die Punkte der abgeschlossenen Teilwürfel $\mathfrak{w}$, die mindestens einen Punkt von $\mathfrak{M}$ im Innern oder auf dem Rande enthalten, werden zu einer Menge $\mathfrak{W}$ zusammengefaßt. $\mathfrak{W}$ ist Teilmenge von $\overline{\mathfrak{B}}$. Für jeden

zu $\mathfrak{M}$ gehörigen unserer abgeschlossenen Teilwürfel $\mathfrak{w}$ wird ein zu $\mathfrak{w}$ gehöriger Punkt $y_1, \ldots, y_{n+1}$ von $\mathfrak{M}$ ausgewählt und weiterhin festgehalten. Es sei nun $\mathfrak{w}$ ein beliebiger dieser Teilwürfel. In diesem werden n Punkte

$$x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n+1} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

beliebig gewählt. Wird

$$v_1 = u_1(y_1, \ldots, y_{n+1}), \ldots, v_n = u_n(y_1, \ldots, y_{n+1})$$

und für $\nu = 1, \ldots, n$

$$u_{\nu,1} = u_1(x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n+1}), \ldots, u_{\nu,n} = u_n(x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n+1})$$

gesetzt, so ist der Inhalt I des durch diese $n+1$ Punkte als Eckpunkte bestimmten Parallelepipeds im $u_1, \ldots, u_n$-Raum bei passender Wahl des Vorzeichens

$$\pm I = \begin{vmatrix} u_{11} - v_1, & \ldots, & u_{1n} - v_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} - v_1, & \ldots, & u_{nn} - v_n \end{vmatrix},$$

also wegen (7)

$$\pm I = \begin{vmatrix} \sum_{\lambda=1}^{n+1} (x_{1\lambda} - y_\lambda)\, u'_{1(x_\lambda)} + \delta_{11}, & \ldots, & \sum_{\lambda=1}^{n+1} (x_{1\lambda} - y_\lambda)\, u'_{n(x_\lambda)} + \delta_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{\lambda=1}^{n+1} (x_{n\lambda} - y_\lambda)\, u'_{1(x_\lambda)} + \delta_{n1}, & \ldots, & \sum_{\lambda=1}^{+1} (x_{n\lambda} - y_\lambda)\, u_{n(x_\lambda)} + \delta_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei in den Ableitungen als Argumente $y_1, \ldots, y_{n+1}$ einzutragen sind und wegen (8)

(9) $$\text{jedes } |\delta_{rs}| < K l^2 (n+1)^2$$

ist. Wird der erste Teil des Elements, dessen zweiter Teil δ_{rs} ist, kurz mit Σ_{rs} bezeichnet, so ergibt sich durch Aufspalten der Elemente der einzelnen Spalten

(10) $$\pm I = \sum \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei jede Spalte $a_{1r}, \ldots, a_{nr}$ entweder aus den Elementen $\Sigma_{1r}, \ldots, \Sigma_{nr}$ oder den Elementen $\delta_{1r}, \ldots, \delta_{nr}$ besteht. Die Summe enthält demnach 2^n Glieder. Unter den Gliedern befindet sich z. B. die Determinante

(11) $$\begin{vmatrix} \Sigma_{1,1}, & \ldots, & \Sigma_{1,n-1}, & \delta_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{n,1}, & \ldots, & \Sigma_{n,n-1}, & \delta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man diese nach den Elementen der Spalte, welche die δ enthält, so erhält man eine Summe, in der z. B. δ_{nn} den Faktor

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{1,1}, & \ldots, & \Sigma_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_{n-1,1}, & \ldots, & \Sigma_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

enthält. Dieser Faktor ist aber[7]) gleich einer Summe, deren Glieder man erhält, wenn man jede der $(n-1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} - y_1, & \dots, & x_{1,n+1} - y_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1,1} - y_1, & \dots, & x_{n-1,n+1} - y_{n+1} \end{pmatrix}$$

mit jeder der $(n-1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} u'_{1(x_1)}, & \dots, & u'_{1(x_{n+1})} \\ \dots & \dots & \dots \\ u'_{n-1(x_1)}, & \dots, & u'_{n-1(x_{n+1})} \end{pmatrix}$$

multipliziert. Da die Matrix (4) in $\mathfrak{M}$ einen Rang $\leqq n-2$ hat, ist jede der zuletzt genannten Determinanten Null. Daher ist in (11) der Koeffizient von δ_{nn} gleich 0. Ebenso ergibt sich, daß auch die übrigen δ_{rn} in (11) verschwindende Koeffizienten besitzen, also die Determinante (11) den Wert 0 hat. In gleicher Weise ergibt sich, daß jede Determinante von (10), die nur in höchstens einer Spalte Elemente δ_{rs} enthält, Null ist. Jede übrigbleibende Determinante von (10) enthält also in mindestens zwei Spalten Glieder δ_{rs}. Entwickelt man diese Determinanten, so findet man demnach wegen (9) und des ersten Teiles von (5) durch primitivste Abschätzung bei Berücksichtigung von $l \leqq \varepsilon$

$$\begin{aligned} I &\leqq 2^n n!\, K^2 l^4 (n+1)^4 K^{n-2} l^{n-2} (n+1)^{n-2} \\ &\leqq \varepsilon \cdot 2^n n!\, (n+1)^{n+2} K^n l^{n+1} \end{aligned}$$

Nach bekanntem Muster[8]) kann hieraus geschlossen werden, daß alle Bildpunkte des Würfels $\mathfrak{w}$ in dem $u_1, \dots, u_n$-Raum einem Parallelepiped mit dem Inhalt $\varepsilon \cdot 2^{2n} n!\, (n+1)^{n+2} K^n l^{n+1}$ angehören. Die Gesamtheit der Bildpunkte von $\mathfrak{W}$, und damit insbesondere die Gesamtheit der Bildpunkte von $\mathfrak{M}$ liegt also in der Summe der endlich vielen Parallelepipede, die sich für die endlich vielen Teilwürfel $\mathfrak{w}$ vom $\mathfrak{W}$ ergeben. Der Gesamtinhalt dieser Parallelepipede ist demnach

$$\leqq \varepsilon \cdot 2^{2n} n!\, (n+1)^{n+2} K^n L^{n+1}.$$

Da K und L von ε nicht abhängen, ist damit in der Tat bewiesen, daß die Menge der Bildpunkte von $\mathfrak{M}$ den Peano-Jordanschen Inhalt 0 hat.

[7]) Vgl. z. B. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, S. 72.

[8]) Vgl. die bei Kamke, a. a. O. stehende Modifikation des Knopp-Schmidtschen Beweises.

(Eingegangen am 21. September 1934.)

Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic functions.

By

G. H. Hardy, E. Landau, J. E. Littlewood.

1. This paper originates from a theorem (Theorem 2 below) which was stated in a less precise form, and without proof, in **5**. This theorem suggests a considerable number of analogues and generalisations, two of which (Theorems 1 and 4) we work out here. The proofs are interesting and embody new applications, of two different types, of the maximal theorems of **4**.

Sections 2, 3 and 4 of the paper are in the main independent, though the ideas are similar, and in places the contents overlap. In each section we are content to prove the theorems which result most naturally from the method employed; it is plain that there are many theorems of the same general type, but we have not attempted to work them out systematically.

Liouville integrals of an analytic function.

2. 1. Suppose that

$$f(z) = f(re^{i\vartheta}) = \Sigma a_n z^n$$

is regular in the unit circle $r < 1$, and that α is positive. Then, following Liouville and Hadamard[1]), we define $f_\alpha(z)$, the integral of $f(z)$ of order α, by

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-u)^{\alpha-1} f(u)\, du = \sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} a_n z^{n+\alpha},$$

the path of integration being rectilinear. When $\alpha = 0$, we define $f_\alpha(z)$ as $f(z)$.

If α is a negative integer $-N$, we define $f_\alpha(z)$ as the N-th derivative $f^{(N)}(z)$ of $f(z)$. Finally, if

$$-N < \alpha < -N+1,$$

we define $f_\alpha(z)$ as

$$(f^{(N)}(z))_{N+\alpha}.$$

[1]) References and further details will be found in **6**.

We have then in all circumstances

$$f_\alpha(z) = \sum_N^\infty \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} a_n z^{n+\alpha},$$

where N is the least integer for which $N + \alpha \geqq 0$.

If $\beta > \alpha$ then

$$\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^z (z-u)^{\beta-\alpha-1} f_\alpha(u)\, du = \sum_N^\infty \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\beta)} a_n z^{n+\beta}.$$

Hence

$$f_\beta(z) = (f_\alpha(z))_{\beta-\alpha}, \tag{2.1.1}$$

provided either that there are no integers n for which

$$n + \alpha < 0 \leqq n + \beta,$$

or that, if there are such integers, the corresponding a_n vanish. In either of these circumstances we say that f_α and f_β are *normally related*. In particular, f_α and f_β are normally related when $0 \leqq \alpha \leqq \beta$.

We define the mean $\mathfrak{M}_p(\psi)$, of any real or complex function $\psi(re^{i\vartheta})$, and for any positive p, by

$$\mathfrak{M}_p(\psi) = \mathfrak{M}_p(\psi, r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(re^{i\vartheta})|^p\, d\vartheta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

We may include the value ∞ of p if we interpret $\mathfrak{M}_\infty(\psi)$ as the maximum modulus of ψ.

Theorem 1. *If $\alpha < \beta < \gamma$, $\gamma - \alpha < L$, and f_β and f_γ are normally related to f_α, then*

$$\mathfrak{M}_p(f_\beta) \leqq K (\mathfrak{M}_p(f_\alpha))^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} (\mathfrak{M}_p(f_\gamma))^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}},$$

where $K = K(p, L)$ depends only on p and L.

It is to be observed that

$$f_\alpha(z) = z^{N+\alpha} g_\alpha(z),$$

where $g_\alpha(z)$ is regular in the unit circle[2]). The means of $f_\alpha, \ldots$ and $g_\alpha, \ldots$ are equivalent for the purposes of the theorem.

2.2. The proof of Theorem 1 depends on two known theorems, which we state as lemmas, and two other lemmas of a more trivial character.

---

[2]) g_α is not the α-th integral of g.

Lemma A[3]). *If* (i) $h(x)$ *is a real integrable function of the real variable* x; (ii) $0 < \alpha < 1$; (iii) $h_\alpha(x)$ *is the Liouville integral of* $h(x)$, *of order* α, *with origin* 0; *and* (iv) $0 < \xi < x$; *then*

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\xi (x-t)^{\alpha-1} h(t)\, dt \right| \leqq \operatorname*{Max}_{0 < t \leqq x} |h_\alpha(t)|.$$

Lemma B[4]). *If* $h(z)$ *is regular for* $r < 1$, p *is positive, and*

$$H(z) = H(r, \theta) = \operatorname*{Max}_{\varrho \leqq r} |h(\varrho e^{i\theta})|,$$

then

$$\mathfrak{M}_p(H) \leqq K\, \mathfrak{M}_p(h),$$

where $K = K(p)$.

Lemma C. *The conclusion of Lemma B is still true if*

$$h(z) = z^\sigma w(z),$$

where σ *is positive and* $w(z)$ *is regular for* $r < 1$.

For in this case, if W is related to w as H is to h, we have

$$H(z) = \operatorname*{Max}_{\varrho \leqq r} \varrho^\sigma |w(\varrho e^{i\theta})| \leqq r^\sigma W(z),$$

$$\mathfrak{M}_p(H) \leqq r^\sigma \mathfrak{M}_p(W) \leqq K r\ \mathfrak{M}_p(w) = K \mathfrak{M}_p(h).$$

Lemma D. *If* $\Phi(x)$ *satisfies*

$$\Phi(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \Phi(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Phi(x_2) + R, \tag{2.2.1}$$

with $R = C$, *for* $x_1 < x < x_2 < x_1 + 1$, *then it satisfies* (2.2.1), *with* $R = CK(L)$, *for* $x_1 < x < x_2 < x_1 + L$.

It is enough to prove that, if (2.2.1) holds for $x_2 < x_1 + d$ with $C = D$, then it holds for $x_2 < x_1 + 2d$ with $C = 5D$.

Write x_0, x_4 for x_1, x_2, and denote now by x_1, x_2, x_3 the three points of quadrisection of (x_0, x_4). Then x lies in one of (x_0, x_2), (x_2, x_4), say in the latter, and (x_1, x_3), (x_0, x_2) and (x_2, x_4) are all less than d. Hence we deduce successively

$$\begin{aligned}
\Phi(x_2) &< \tfrac{1}{2}\Phi(x_1) + \tfrac{1}{2}\Phi(x_3) + D \\
&< \tfrac{1}{4}\Phi(x_0) + \tfrac{1}{2}\Phi(x_2) + \tfrac{1}{4}\Phi(x_4) + 2D, \\
\Phi(x_2) &< \tfrac{1}{2}\Phi(x_0) + \tfrac{1}{2}\Phi(x_4) + 4D, \\
\Phi(x) &< \frac{x_4 - x}{x_4 - x_2}\Phi(x_2) + \frac{x - x_2}{x_4 - x_2}\Phi(x_4) + D \\
&< \frac{x_4 - x}{2(x_4 - x_2)}\Phi(x_0) + \left(\frac{x_4 - x}{2(x_4 - x_2)} + \frac{x - x_2}{x_4 - x_2}\right)\Phi(x_4) + 5D \\
&= \frac{x_4 - x}{x_4 - x_0}\Phi(x_0) + \frac{x - x_0}{x_4 - x_0}\Phi(x_4) + 5D,
\end{aligned}$$

the inequality required.

[3]) M. Riesz (11). Bosanquet and Linfoot (2) supply some necessary complements to the proof.

[4]) Hardy and Littlewood (4, Theorem 27).

2.3. We prove Theorem 1 first under the restriction $\gamma < \alpha + 1$. We have then

$$f_\beta(z) = \frac{e^{(\beta-\alpha)i\theta}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^r (r-\varrho)^{\beta-\alpha-1} f_\alpha(\varrho e^{i\theta})\, d\varrho,$$

$$(2.3.1) \qquad f_\beta(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\Big(\int_0^{r-\zeta} + \int_{r-\zeta}^{r}\Big)(r-\varrho)^{\beta-\alpha-1} f_\alpha(\varrho e^{i\theta})\, d\varrho = J_1 + J_2,$$

say; here ζ is a function of θ, subject to $0 < \zeta < r$, which will be chosen later.

We write

$$(2.3.2) \qquad F_\alpha = F_\alpha(r, \theta) = \operatorname*{Max}_{\varrho \leqq r} |f_\alpha(\varrho e^{i\theta})|$$

[in conformity with the notation of Lemma B, and with a similar notation for suffixes other than α[5])]. Then

$$(2.3.3) \qquad |J_2| \leqq \frac{F_\alpha}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_{r-\zeta}^{r} (r-\varrho)^{\beta-\alpha-1}\, d\varrho = \frac{\zeta^{\beta-\alpha} F_\alpha}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} < 2\,\zeta^{\beta-\alpha} F_\alpha\ [6]).$$

In J_1 we write

$$f_\alpha(\varrho e^{i\theta}) = u(\varrho) + i v(\varrho),$$

so that

$$(2.3.4) \qquad J_1 = J_u + J_v,$$

where J_u and J_v are the parts of J_1 arising from u and v respectively. Then

$$|J_u| = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left| \int_0^{r-\zeta} (r-\varrho)^{\beta-\gamma} (r-\varrho)^{\gamma-\alpha-1} u(\varrho)\, d\varrho \right|$$

$$= \frac{\zeta^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left| \int_{r-\zeta'}^{r-\zeta} (r-\varrho)^{\gamma-\alpha-1} u(\varrho)\, d\varrho \right|,$$

where $0 < \zeta < \zeta' < r$. Hence, by Lemma A,

---

[5]) F_α is not the α-th integral of F. F_α is positive for $r > 0$ except when $f = 0$, a case which we exclude.

[6]) If $1 < a < 2$ then $\dfrac{1}{\Gamma(a)} = \dfrac{a}{\Gamma(a+1)} < 2$. This is true also for $0 < a \leqq 1$ and for $a \geqq 2$, and therefore for all positive a. Actually $\Gamma(a)$ has a minimum 0,88 ... for $a = 1{,}46$ ....

$$(2.3.5)\qquad |J_u| \leqq \frac{2\zeta^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left| \operatorname*{Max}_{\varrho \leqq r} \int_0^{\varrho} (\varrho - t)^{\gamma-\alpha-1} u(t)\, dt \right|$$

$$\leqq \frac{2\zeta^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left| \operatorname*{Max}_{\varrho \leqq r} \int_0^{\varrho} (\varrho - t)^{\gamma-\alpha-1} f_\alpha(t e^{i\theta})\, dt \right|$$

$$= 2\zeta^{\beta-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \operatorname*{Max}_{\varrho \leqq r} |f_\gamma(\varrho e^{i\theta})|$$

$$= 2\zeta^{\beta-\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} F_\gamma \leqq 4\zeta^{\beta-\gamma} F_\gamma \text{ [7]}.$$

There is a similar inequality for $|J_v|$, and when we combine these with (2.3.1), (2.3.3), and (2.3.4), we obtain

$$(2.3.6)\qquad |f_\beta| \leqq 8(\zeta^{\beta-\alpha} F_\alpha + \zeta^{\beta-\gamma} F_\gamma).$$

2.4. We now distinguish two cases.

(i) If

$$F_\gamma < r^{\gamma-\alpha} F_\alpha,$$

we choose ζ so that

$$\zeta^{-\alpha} F_\alpha = \zeta^{-\gamma} F_\gamma.$$

Then $0 < \zeta < r$, and (2.3.6) gives

$$|f_\beta| \leqq 16 F_\alpha^{\eta} F_\gamma^{1-\eta},$$

where

$$\eta = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}, \quad 0 < \eta < 1.$$

(ii) If

$$F_\gamma \geqq r^{\gamma-\alpha} F_\alpha,$$

we take $\zeta = \frac{1}{2} r$. Then

$$|f_\beta| \leqq 8(\tfrac{1}{2}r)^{\beta-\gamma}\left((\tfrac{1}{2}r)^{\gamma-\alpha} F_\alpha + F_\gamma\right)$$
$$\leqq 16(\tfrac{1}{2}r)^{\beta-\gamma} F_\gamma = 16(\tfrac{1}{2}r)^{\beta-\gamma} F_\gamma^{\eta} F_\gamma^{1-\eta}.$$

But

$$F_\gamma \leqq \frac{F_\alpha}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^r (r-\varrho)^{\gamma-\alpha-1}\, d\varrho = \frac{r^{\gamma-\alpha} F_\alpha}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} \leqq 2 r^{\gamma-\alpha} F_\alpha.$$

Hence

$$(2.4.1)\qquad |f_\beta| \leqq 16(\tfrac{1}{2})^{\beta-\gamma} 2^{\eta} F_\alpha^{\eta} F_\gamma^{1-\eta} \leqq 64 F_\alpha^{\eta} F_\gamma^{1-\eta},$$

and this inequality is true in any case.

---

[7]) If $0 < a < b < 1$ then

$$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} = \frac{a}{b} \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+1)} < \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a+1)} = a + 1 < 2.$$

Finally, from (2.4.1), Hölder's inequality, and Lemma C, we derive

$$\mathfrak{M}_p(f_\beta) \leqq 64\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_\alpha^{\eta p} F_\gamma^{(1-\eta)p}\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4.2}$$

$$\leqq 64\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_\alpha^p\, d\theta\right)^{\frac{\eta}{p}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_\gamma^p\, d\theta\right)^{\frac{1-\eta}{p}}$$

$$\leqq K\,\mathfrak{M}_p^{\eta}(f_\alpha)\,\mathfrak{M}_p^{1-\eta}(f_\gamma),$$

where $K = K(p)$. This is the result of Theorem 1, with $\gamma < \alpha + 1$ and a K independent of L.

If we write

$$\Phi(\alpha) = \log \mathfrak{M}_p(f_\alpha)$$

then (2.4.2) takes the form

$$\Phi(\beta) < \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\Phi(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\Phi(\gamma) + R, \tag{2.4.3}$$

with $\gamma < \alpha + 1$ and $R = R(p)$. It then follows from Lemma D that (2.4.3) holds for $\gamma < \alpha + L$ and $R = R(p, L)$, and this completes the proof.

2.5. We can translate Theorem 1 into the language of derivatives, but some precautions are needed. Suppose for example, to fix our ideas, that $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, and

$$f_2(z) = \int_0^z (z-u) f(u)\, du = g(z).$$

Then Theorem 1 gives

$$\mathfrak{M}_p^2(g') \leqq K\,\mathfrak{M}_p(g)\,\mathfrak{M}_p(g''), \tag{2.5.1}$$

with $K = K(p)$; and this inequality is true for any $g(z)$ which is regular in the circle and has a double zero at the origin. It is not true generally without this restriction; thus it is plainly false when $g(z) = z$.

Ordinary derivatives of a real function.

3.1. Theorem 2. *Suppose that $p \geqq 1$, that $y(x)$ is real, that $y'(x)$ is an integral of $y''(x)$, and that $y(x)$ and $y''(x)$ belong to the class $L^p(0, \infty)$*[8]. *Then $y'(x)$ belongs to the same class.*

[8]) $f(x)$ belongs to $L^p(a, b)$ if $f(x)$ is measurable and $|f(x)|^p$ integrable over (a, b).

If

$$J_\nu = \Big(\int_0^\infty |y^{(\nu)}(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (\nu = 0, 1, 2), \tag{3.1.1}$$

then

$$J_1^2 \leqq K J_0 J_2, \tag{3.1.2}$$

where K depends on p only.

Finally, if $K = K(p)$ has its best possible value in (3.1.2), *then*

$$K(p) \leqq 4 \tag{3.1.3}$$

and

$$\lim_{p\to\infty} K(p) = 4. \tag{3.1.4}$$

This is the theorem to which we referred in § 1. There are two cases in which the best possible value of $K(p)$ is known.

(i) When $p = \infty$, we interpret J_ν as the upper bound of $|y^{(\nu)}(x)|$. It was proved by Landau[9]) that in this case $K = 4$. Landau indeed proved more, viz. that if

$$|y| \leqq 1, \quad |y''| \leqq 1$$

in any interval (a, b) of length not less than 2, then

$$|y'| \leqq 2,$$

and that this is the best possible result.

(ii) Hardy and Littlewood[10]) have shown that $K = 2$ when $p = 2$. Their proof (though it can be translated into an elementary form) depends upon the ideas of the calculus of variations; there is a maximal function which is a solution of an Euler equation. They also state, without proof, a part of Theorem 2.

3.2. In proving (3.1.3) we begin by observing two simple corollaries of Hölder's inequality. If $a_\nu \geqq 0$, $b_\nu \geqq 0$ then

$$(\Sigma a_\nu^{\frac{p-1}{p}} b_\nu)^p \leqq (\Sigma a_\nu)^{p-1} \Sigma b_\nu^p; \tag{3.2.1}$$

and if $a(t) \geqq 0$, $b(t) \geqq 0$ then

$$\Big(\int a(t)\,b(t)\,dt\Big)^p \leqq \Big(\int a(t)\,dt\Big)^{p-1} \int a(t)\,b^p(t)\,dt. \tag{3.2.2}$$

The ranges of summation and integration in (3.2.1) and (3.2.2) are arbitrary.

---

[9]) Landau (8, 9).

[10]) Hardy and Littlewood (5). See also Hardy, Littlewood and Pólya (7, Ch. 7).

If $x \geqq 0$, $h > 0$ we have

$$h\,y'(x) = y(x+h) - y(x) - \int_x^{x+h} (x+h-t)\,y''(t)\,dt,$$

$$h\,|y'(x)| \leqq 1\cdot|y(x+h)| + 1\cdot|y(x)| + 2^{\frac{p-1}{p}}\cdot 2^{\frac{1-p}{p}} \int_x^{x+h} (x+h-t)\,|y''(t)|\,dt.$$

Hence, by (3.2.1),

$$h^p\,|y'(x)|^p \leqq (1+1+2)^{p-1}\Big(|y(x+h)|^p + |y(x)|^p + 2^{1-p}\Big(\int_x^{x+h} (x+h-t)\,|y''(t)|\,dt\Big)^p\Big).$$

But, by (3.2.2),

$$\Big(\int_x^{x+h} (x+h-t)\,|y''(t)|\,dt\Big)^p \leqq \Big(\int_x^{x+h} (x+h-t)\,dt\Big)^{p-1} \int_x^{x+h} (x+h-t)\,|y''(t)|^p\,dt$$

$$= 2^{1-p} h^{2p-2} \int_x^{x+h} (x+h-t)\,|y''(t)|^p\,dt;$$

so that

$$h^p\,|y'(x)|^p \leqq 4^{p-1}\Big(|y(x+h)|^p + |y(x)|^p + 4^{1-p} h^{2p-2} \int_x^{x+h} (x+h-t)\,|y''(t)|^p\,dt\Big). \tag{3.2.3}$$

If we integrate (3.2.3) from $x = 0$ to $x = \infty$, we obtain

$$h^p J_p^p \leqq 4^{p-1}\Big(2J_0^p + 4^{1-p} h^{2p-2} \int_0^\infty dx \int_x^{x+h} (x+h-t)\,|y''(t)|^p\,dt\Big).$$

But

$$\int_0^\infty dx \int_x^{x+h} (x+h-t)\,|y''(t)|^p\,dt = \int_0^\infty |y''(t)|^p\,dt \int_{\mathrm{Max}\,(0,\,t-h)}^{t} (x+h-t)\,dx \leqq \frac{1}{2} h^2 J_2^p;$$

and therefore

$$J_1^p \leqq 2\cdot 4^{p-1} h^{-p} J_0^p + \frac{1}{2} h^p J_2^p.$$

If $A \geqq 0$, $B \geqq 0$ are fixed and $\lambda > 0$, then $A\lambda^{-1} + B\lambda$ has the lower bound $2\sqrt{AB}$. Hence

$$J^p \leqq 2^{p-1}\Big(\Big(\frac{2}{h}\Big)^p J_0^p + \Big(\frac{h}{2}\Big)^p J^p\Big) \leqq 2^p (J_0 J_2)^{\frac{1}{2}p},$$

$$J_1^2 \leqq 4 J_0 J_2.$$

3.3. It remains to prove that

$$\underline{\lim}\; K(p) \geqq 4.$$

It is enough to prove the existence, for every p, of a y for which

$$J_1^{2p} \geqq L J_0^p J_2^p > 0,$$
$$L = L(p) = 4^{p+o(p)}.$$

We shall prove that there is in fact such a y independent of p.

We consider, as plainly we may, integrals over (c, ∞), where

$$c = -3^{-\frac{1}{2}},$$

instead of over $(0, \infty)$. We define y by

$$12y = -1 + 6x^2 \qquad (x \leqq 0),$$
$$12y = -1 + 6x^2 - 8x^3 + 3x^4 \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$
$$12y = 0 \qquad (x \geqq 1).$$

Then

$$12y'' = 12 \qquad (x \leqq 0),$$
$$12y'' = 12(1-x)(1-3x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$
$$12y'' = 0 \qquad (x \geqq 1).$$

Since

$$|(1-x)(1-3x)| = |(1-2x)^2 - x^2| \leqq 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

$|y''| \leqq 1$ for $c \leqq x \leqq 1$, and

$$J_2^p = \int_c^1 |y''|^p \, dx \leqq 1 - c. \tag{3.3.1}$$

Next, since

$$y' = x \quad (x \leqq 0), \qquad y' = x(1-x)^2 \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

y assumes its greatest and least values, in $c \leqq x \leqq 1$, at $x = c$ and $x = 0$, where it is $\frac{1}{12}$ and $-\frac{1}{12}$ respectively. Hence

$$J_0^p = \int_c^1 |y|^p \, dx \leqq \frac{1-c}{12^p}. \tag{3.3.2}$$

Finally, since $y' = x$ for $c \leqq x \leqq 0$,

$$J_1^p = \int_c^1 |y'|^p \, dx \geqq \int_c^0 |x|^p \, dx = \frac{|c|^{p+1}}{p+1}. \tag{3.3.3}$$

From (3.3.1), (3.3.2) and (3.3.3) we deduce

$$\frac{J_1^{2p}}{J_0^p J_2^p} \geqq \frac{|c|^{2p+2}}{(p+1)^2} \frac{12^p}{(1-c)^2} = \frac{c^2}{(p+1)^2(1-c)^2} 4^p = 4^{p+o(p)}.$$

This completes the proof of Theorem 2.

3.4. If J_ν is defined by

$$J_\nu = \Big(\int_a^b |y^{(\nu)}(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.4.1}$$

with arbitrary a and $b > a$, then (3.1.2), and even the weaker inequality

$$J_1^p \leqq K(p)\,(J_0^p + J_2^p), \tag{3.4.2}$$

are no longer true without restriction. Thus if

$$a = 0, \quad b > 0, \quad p = 2, \quad y(x) = x,$$

then

$$J_0^2 = \tfrac{1}{3}b^3, \quad J_1^2 = b, \quad J_2 = 0,$$

and (3.4.2) is false, whatever be K, for sufficiently small b. If a and b are to be unrestricted, we must impose a restriction on y.

Theorem 3. *If J_ν is defined by* (3.4.1), *with $p \geqq 1$, and $y'(x) = 0$ for some x of (a, b), then* (3.1.2) *is true, with a $K = K(p)$ independent of y, a, b.*

We describe the inequality (3.4.2), when J_ν is defined by (3.4.1), as $P(a, b)$. We have already proved $P(0, \infty)$, and $P(a, \infty)$ and $P(-\infty, b)$ follow by trivial transformations. It is also plain that $P(a, c)$ and $P(c, b)$, where $a < c < b$, imply $P(a, b)$. Hence we may suppose that a and b are finite, and that $y'(x)$ vanishes at a or b, say at a. Then

$$-\infty < a < b < \infty, \quad y'(a) = 0.$$

Suppose first that $b - a > 2$. In this case the condition on y' is not required. As in § 3.2, we have

$$|y'(x)|^p \leqq K\{|y(x+1)|^p + |y(x)|^p + \int_x^{x+1} |y''(t)|^p\,dt\},$$

with $K = K(p)$, for $a \leqq x \leqq b - 1$: we are not now concerned with the actual value of K, and take $h = 1$. The argument of § 3.2 shows that

$$\int_a^{b-1} |y'(x)|^p\,dx \leqq K(J_0^p + J_2^p). \tag{3.4.3}$$

Similarly, if $a + 1 \leqq x \leqq b$,

$$|y'(x)|^p \leqq K\{|y(x-1)|^p + |y(x)|^p + \int_{x-1}^{x} |y''(t)|^p\,dt\},$$

$$\int_{a+1}^{b} |y'(x)|^p\,dx \leqq K(J_0^p + J_2^p); \tag{3.4.4}$$

and (3.4.2) follows from (3.4.3) and (3.4.4).

On the other hand, if $b-a \leqq 2$, we have

$$y'(x) = \int_a^x y''(t)\,dt,$$

$$|y'(x)|^p \leqq K \int_a^x |y''(t)|^p\,dt \leqq K J_2^p,$$

$$J_1^p \leqq K J_2^p \leqq K (J_0^p + J_2^p).$$

Hence (3.4.2) is true in any case.

Finally, if we write $z(x) = y(\lambda x)$, where $\lambda > 0$, we have

$$J_\nu^p(z) = \int_a^b |z^{(\nu)}(x)|^p\,dx = \int^b |\lambda^\nu y^{(\nu)}(\lambda x)|^p\,dx$$

$$= \lambda^{\nu p - 1} \int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{b}{\lambda}} |y^{(\nu)}(u)|^p\,du = \lambda^{\nu p - 1} J_\nu^p(y)$$

where $\nu = 0, 1, 2$ and J_ν refers to an interval $\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right)$. Applying what we have proved already to J_ν, and dividing by λ^{1-p}, we obtain

$$J_1^p(z) \leqq K(p)\{\lambda^p J_0^p(z) + \lambda^{-p} J_2^p(z)\};$$

and hence (3.1.2).

Weyl integrals of derivatives of a real function.

4.1. Our final theorem is a generalisation of Theorem 2 for integrals of arbitrary order, but the generalisation is not complete, since the case $p = 1$ is excluded. We use Weyl's modification of Liouville's definition, in which the 'origin of integration' is at infinity[11]).

We suppose for simplicity that $f(x)$ is indefinitely differentiable, and that

$$x^{a-1} f(x) \to 0,$$

when $x \to \infty$, for every a. Then

$$\int^\infty (t-x)^{a-1} f(t)\,dt$$

is absolutely convergent for every a

We define $f_a(x)$ by

$$f_0(x) = f(x),$$

$$f_a(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)\,dt \qquad (\alpha > 0),$$

[11]) See (3) and (6) for fuller explanations of the significance of Weyl's definition, particularly in the theory of Fourier series.

and

$$f_{\alpha-n}(x) = (-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n f_\alpha(x)$$

if n is a positive integer. In these circumstances $f_\alpha(x)$ is continuous for every α and all x, $x^{\alpha-1} f_\alpha(x) \to 0$ for every α and a, and

$$(f_\alpha)_\beta = (f_\beta)_\alpha = f_{\alpha+\beta} \tag{4.1.1}$$

for all α and β[12]).

Theorem 4. *If*

$$p > 1, \quad -L' < \alpha < \beta < \gamma < L,$$

$$J_p^p(f_\alpha) = \int_0^\infty |f_\alpha(x)|^p \, dx,$$

then

$$J_p(f_\beta) \leqq K \left(J_p(f_\alpha)\right)^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \left(J_p(f_\gamma)\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}},$$

where

$$K = K(p, L, L').$$

4.2. We observe first that there is no possibility of a direct extension of the argument of § 3.4. It is not true, for example, with $0 < \beta < 1$, that

$$\int_c^{c+1} |f_\beta|^p \, dx \leqq K \Big(\int_c^{c+1} |f|^p \, dx + \int_c^{c+1} |f_1|^p \, dx \Big)$$

For we may suppose

$$f(x) = 0 \ \ (c \leqq x \leqq c+1), \quad \int_{c+1}^\infty f(t) \, dt = 0,$$

when f and f_1 vanish throughout $(c, c+1)$ but f_β generally does not.

We shall use another known theorem, which we again state as a lemma.

Lemma E[13]). *If $p > 1$ and f belongs to $L^p(0, \infty)$, and*

$$F(x) = \operatorname*{Max}_{X \geqq x} \frac{1}{X-x} \int_x^X |f(t)| \, dt,$$

---

[12]) Bosanquet (1) proves (4.1.1) when $\alpha > 0$, $\beta > 0$, for much more general $f(x)$; here $f(x)$ is very regular, and the inversions on which Bosanquet's proof depends become trivial. The extension to negative values of α and β follows almost immediately from the definitions. Incidentally (4.1.1) settles the questions of 'consistency' raised by the definitions.

[13]) Hardy and Littlewood (4, Theorem 9). The simplest proof is that given by F. Riesz (10), and reproduced by Hardy, Littlewood and Pólya (7, Theorem 385). As is remarked by Riesz, the proof applies equally to an infinite interval.

Lemma E is used in the proof of Lemma B: see Hardy and Littlewood (4).

hen $F(x)$ belongs to $L^p(0, \infty)$, and

$$\int_0^\infty F^p(x)\,dx \leqq K(p) \int_0^\infty |f(x)|^p\,dx.$$

4.3. We suppose first that

(4.3.1) $$\gamma < \alpha + 1.$$

After (4.1.1), we have

$$f_\alpha = (f_{\gamma-1})_{\alpha+1-\gamma}, \quad f_\beta = (f_{\gamma-1})_{\beta+1-\gamma}, \quad f_\gamma = (f_{\gamma-1})_1,$$

and we may argue with

$$f_{\gamma-1}, \quad \alpha+1-\gamma, \quad \beta+1-\gamma, \quad 1$$

in place of

$$f, \alpha, \beta, \gamma.$$

In other words we may, after an appropriate change of notation, suppose

(4.3.2) $$0 < \alpha < \beta < \gamma = 1.$$

We define $F_\alpha = F_\alpha(x)$ and $F_1 = F_1(x)$ in terms of f_α and f_1 as F is defined in terms of f in Lemma E[14]), and we suppose that ξ is positive. If

$$\Phi(x, \xi) = \Phi(x) = \Phi$$

satisfies an inequality

$$|\Phi| \leqq A(\xi^{\beta-\alpha} F_\alpha + \xi^{\beta-1} F_1),$$

where A is an absolute constant, we write

$$\Phi = R,$$

and our first object is to prove that

(4.3.3) $$f_\beta(x) = R.$$

The value of ξ, which is fixed in (4.10.1), will be the same in every R which occurs in the course of the argument, so that the sum of two R is an R.

4.4. We write

(4.4.1) $$f_\beta(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (t-x)^{\beta-1} f(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^{x+\xi} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{x+\xi}^\infty = J_1 + J_2,$$

say.

We consider J_2 first. Writing

$$g(t) = g(t, x) = \int_x^t f_1(u)\,du,$$

[14]) Again, F_α is not the α-th integral of F.

so that $f(t) = -f_1'(t) = -g''(t)$, and integrating twice by parts, we obtain

$$(4.4.2)\quad J_2 = \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(x+\xi) + \frac{(1-\beta)\,\xi^{\beta-2}}{\Gamma(\beta)} g(x+\xi) - \frac{(1-\beta)(2-\beta)}{\Gamma(\beta)} \int_{x+\xi}^{\infty} (t-x)^{\beta-3} g(t)\, dt$$

$$= \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(x+\xi) + J_3 + J_4.$$

Here

$$(4.4.3)\quad |J_3| \leqq \frac{(1-\beta)\,\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{\xi} \int_{x}^{x+\xi} |f_1(t)|\, dt \leqq 2\,\xi^{\beta-1} F_1(x)\ [15]),$$

$$(4.4.4)\quad |J_4| \leqq \frac{(1-\beta)(2-\beta)}{\Gamma(\beta)} \int_{x+\xi}^{\infty} (t-x)^{\beta-2} \left(\frac{1}{t-x} \int_{x}^{t} |f_1(u)|\, du \right) dt$$

$$\leqq \frac{(1-\beta)(2-\beta)}{\Gamma(\beta)} F_1(x) \int_{x+\xi}^{\infty} (t-x)^{\beta-2}\, dt$$

$$= \frac{(2-\beta)\,\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} F_1(x) \leqq 4\,\xi^{\beta-1} F_1(x).$$

From (4.4.2) – (4.4.4) we obtain

$$(4.4.5)\quad J_2 = \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(x+\xi) + R.$$

4.5. Since

$$f(t) = (f_{\alpha-1}(t))_{1-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t}^{\infty} (u-t)^{-\alpha} f_{\alpha-1}(u)\, du,$$

we have

$$(4.5.1)\quad J_1 = \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_{x}^{x+\xi} (t-x)^{\beta-1} dt \int_{t}^{\infty} (u-t)^{-\alpha} f_{\alpha-1}(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_{x}^{x+\xi} f_{\alpha-1}(u)\, du \int_{x}^{u} (t-x)^{\beta-1} (u-t)^{-\alpha} dt$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_{x+\xi}^{\infty} f_{\alpha-1}(u)\, du \int_{x}^{x+\xi} (t-x)^{\beta-1} (u-t)^{-\alpha} dt$$

$$= J_5 + J_6.\ [16])$$

---

[15]) See f. n. [6]), p. 680.

[16]) The inversion of the order of integration is trivial, since

$$\int_{x}^{x+\xi} (t-x)^{\beta-1} dt \int_{t}^{\infty} (u-t)^{-\alpha} |f_{\alpha-1}(u)|\, du < \infty.$$

Here

$$J_5 = \frac{1}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} \int_x^{x+\xi} (u-x)^{\beta-\alpha} f_{\alpha-1}(u)\, du. \tag{4.5.2}$$

If we write

$$g_\alpha(u) = \int_x^u f_\alpha(w)\, dw\,^{17}), \tag{4.5.3}$$

and transform J_5 by two partial integrations, we obtain

$$\begin{aligned} J_5 &= -\frac{\xi^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} f_\alpha(x+\xi) + \frac{\xi^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} g_\alpha(x+\xi) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha-1)} \int_x^{x+\xi} (u-x)^{\beta-\alpha-2} g_\alpha(u)\, du \\ &= -\frac{\xi^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} f_\alpha(x+\xi) + J_7 + J_8. \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Now

$$|J_7| \leqq 2\,\xi^{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{\xi} \int_x^{x+\xi} |f_\alpha(w)|\, dw \leqq 2\,\xi^{\beta-\alpha} F_\alpha(x),$$

$$\begin{aligned} |J_8| &\leqq \frac{1}{|\Gamma(\beta-\alpha-1)|} \int_x^{x+\xi} (u-x)^{\beta-\alpha-1} \left(\frac{1}{u-x} \int_x^u |f_\alpha(w)|\, dw \right) du \\ &\leqq \frac{F_\alpha(x)}{|\Gamma(\beta-\alpha-1)|} \int_x^{x+\xi} (u-x)^{\beta-\alpha-1}\, du \\ &= \frac{1+\alpha-\beta}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\, \xi^{\beta-\alpha} F_\alpha(x) \leqq 2\,\xi^{\beta-\alpha} F_\alpha(x). \end{aligned}$$

Hence

$$J_5 = -\frac{\xi^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} f_\alpha(x+\xi) + R. \tag{4.5.5}$$

4.6. Next

$$\begin{aligned} J_6 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_{x+\xi}^{\infty} f_{\alpha-1}(u)\, du \int_x^{x+\xi} (t-x)^{\beta-1} (u-t)^{-\alpha}\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} f_\alpha(x+\xi) \int_x^{x+\xi} (t-x)^{\beta-1} (x+\xi-t)^{-\alpha}\, dt \\ &\quad - \frac{\alpha}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_{x+\xi}^{\infty} f_\alpha(u)\, du \int_x^{x+\xi} (t-x)^{\beta-1} (u-t)^{-\alpha-1}\, dt \\ &= \frac{\xi^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} f_\alpha(x+\xi) + J_9, \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

[17]) g_α is again not the α-th integral of g

where

$$(4.6.2)\quad J_9 = -\frac{\alpha}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{x+\xi}^{\infty} f_\alpha(u)\,du\int_x^{x+\xi}(t-x)^{\beta-1}(u-t)^{-\alpha-1}\,dt.$$

Collecting our results from (4.4.1), (4.4.5), (4.5.1), (4.5.5), and (4.6.1), we obtain

$$(4.6.3)\quad f_\beta(x) = \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(x+\xi) + J_9 + R.$$

4.7. We now write

$$(4.7.1)\quad \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(x+\xi) = \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(x) + \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(f_1(x+\xi) - f_1(x)\right)$$

$$= \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(x) + \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{x+\xi}^{\infty}(u-x-\xi)^{-\alpha} f_\alpha(u)\,du$$

$$- \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_x^{\infty}(u-x)^{-\alpha} f_\alpha(u)\,du$$

$$= \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f_1(x) + J_{10} + J_{11},$$

where

$$(4.7.2)\quad J_{10} = -\frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_x^{x+\xi}(u-x)^{-\alpha} f_\alpha(u)\,du,$$

$$(4.7.3)\quad J_{11} = \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{x+\xi}^{\infty}\left((u-x-\xi)^{-\alpha} - (u-x)^{-\alpha}\right) f_\alpha(u)\,du.$$

Here

$$(4.7.4)\quad \frac{\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left|f_1(x)\right| \leqq 2\,\xi^{\beta-1} F_1(x),$$

$$(4.7.5)\quad J_{10} = -\frac{\xi^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} g_\alpha(x+\xi)$$

$$- \frac{\alpha\,\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_x^{x+\xi}(u-x)^{-\alpha-1} g_\alpha(u)\,du$$

$$= -\frac{\xi^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} g_\alpha(x+\xi) + J_{12},$$

$$(4.7.6)\quad \frac{\xi^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\left|g_\alpha(x+\xi)\right| \leqq \frac{\xi^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi}\left|f_\alpha(u)\right|du$$

$$\leqq 4\,\xi^{\beta-\alpha} F_\alpha(x),$$

$$(4.7.7)\quad |J_{13}| \leqq \frac{\alpha\,\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{x+\xi} (u-x)^{-\alpha} \left(\frac{1}{u-x} \int_x^u |f_\alpha(w)|\, dw \right) du$$

$$\leqq \frac{\alpha\,\xi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} F_\alpha(x) \int_x^{x+\xi} (u-x)^{-\alpha}\, du$$

$$= \frac{\alpha\,\xi^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(2-\alpha)} F_\alpha(x) \leqq 2\,\xi^{\beta-\alpha} F_\alpha(x).$$

Combining these results with (4.6.3), we are left with

$$(4.7.8)\qquad f_\beta(x) = J_9 + J_{11} + R,$$

where J_9 and J_{11} are defined by (4.6.2) and (4.7.3) respectively.

It remains to prove that

$$(4.7.9)\qquad J_9 + J_{11} = R.$$

4.8. We combine J_9 and J_{11} into a single integral as follows. We have, by (4.7.3),

$$J_{11} = \frac{\alpha}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_{x+\xi}^{\infty} f_\alpha(u)\, du \int_x^{x+\xi} \xi^{\beta-1} (u-t)^{-\alpha-1}\, dt,$$

and so, by (4.6.2),

$$(4.8.1)\qquad J_{13} = J_9 + J_{11} = -\frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_{x+\xi}^{\infty} P(u)\, f_\alpha(u)\, du,$$

where

$$(4.8.2)\qquad P(u) = P(u, x, \xi) = \alpha \int_x^{x+\xi} \left((t-x)^{\beta-1} - \xi^{\beta-1} \right) (u-t)^{-\alpha-1}\, dt.$$

We require certain simple properties of $P(u)$. In the first place, $P(u)$ is positive, and decreases as u increases. Next,

$$(4.8.3)\quad P(x+\xi) = \alpha \int_x^{x+\xi} \left((t-x)^{\beta-1} - \xi^{\beta-1} \right) (x+\xi-t)^{-\alpha-1}\, dt$$

$$= \alpha\,\xi^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (w^{\beta-1} - 1)(1-w)^{-\alpha-1}\, dw = \xi^{\beta-\alpha-1} \left(1 - \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \right).$$

Finally

$$(4.8.4)\quad \int_{x+\xi}^{\infty} P(u)\, du = \int_x^{x+\xi} \left((t-x)^{\beta-1} - \xi^{\beta-1} \right) (x+\xi-t)^{-\alpha}\, dt$$

$$= \xi^{\beta-\alpha} \int_0^1 (w^{\beta-1} - 1)(1-w)^{-\alpha}\, dw = \xi^{\beta-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} - \frac{1}{1-\alpha} \right).$$

4.9. Now

$$(4.9.1)\qquad J_{13} = -\frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{x+\xi}^{\infty} P(u)\,f_\alpha(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\,P(x+\xi)\,g_\alpha(x+\xi) + J_{14},$$

where

$$(4.9.2)\qquad J_{14} = \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{x+\xi}^{\infty} \frac{dP}{du}\,g_\alpha(u)\,du.$$

After (4.8.3),

$$(4.9.3)\qquad \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\,|P(x+\xi)\,g_\alpha(x+\xi)|$$

$$\leqq \xi^{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\right)\cdot\frac{1}{\xi}\int_{x}^{x+\xi}|f_\alpha(u)|\,du \leqq 4\,\xi^{\beta-\alpha}F_\alpha(x).$$

Also, since $P'(u) < 0$,

$$(4.9.4)\qquad |J_{14}| \leqq \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{x+\xi}^{\infty}\left(-(u-x)\frac{dP}{du}\right)\left(\frac{1}{u-x}\int_{x}^{u}|f_\alpha(w)|\,dw\right)du$$

$$\leqq \frac{F_\alpha(x)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{x+\xi}^{\infty}\left(-(u-x)\,\frac{dP}{du}\right)du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\,\xi\,P(x+\xi)F_\alpha(x) + \frac{F_\alpha(x)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{x+\xi}^{\infty}P(u)\,du.$$

The first term here, by (4.8.3), is

$$\xi^{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\right)F_\alpha(x) \leqq 4\,\xi^{\beta-\alpha}F_\alpha(x);$$

and the second, by (4.8.4), is

$$\xi^{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(2-\alpha)}\right)F_\alpha(x) \leqq 2\,\xi^{\beta-\alpha}F_\alpha(x).$$

Hence $J_{14} = R$, and (4.9.1) and (4.9.3) then show that $J_{13} = R$. This is (4.7.9).

4.10. We have thus proved that

$$|f_\beta(x)| \leqq A\,(\xi^{\beta-\alpha}F_\alpha(x) + \xi^{\beta-1}F_1(x)).$$

It then follows from Lemma E that

$$\int_0^\infty |f_\beta|^p\,dx \leqq K\left(\xi^{p(\beta-\alpha)}\int_0^\infty F_\alpha^p\,dx + \xi^{p(\beta-1)}\int_0^\infty F_1^p\,dx\right)$$

$$\leqq K\left(\xi^{p(\beta-\alpha)}\int_0^\infty |f_\alpha|^p\,dx + \xi^{p(\beta-1)}\int_0^\infty |f_1|^p\,dx\right),$$

where $K = K(p)$. Choosing ξ so that

$$\xi^{-\alpha p}\int_0^\infty |f_\alpha|^p\,dx = \xi^{-p}\int_0^\infty |f_1|^p\,dx \quad (4.10.1)$$

we obtain [18])

$$\int_0^\infty |f_\beta|^p\,dx \leqq K\left(\int_0^\infty |f_\alpha|^p\,dx\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}\left(\int_0^\infty |f_1|^p\,dx\right)^{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}}.$$

Here, after § 4.3, we may replace 1 by γ. We thus obtain the result of the theorem, with $\gamma < \alpha + 1$ and $K = K(p)$. The general form of the theorem then follows as in § 2.4.

We do not know whether Theorem 4 is true or not when $p = 1$. The proof breaks down, the hypothesis $p > 1$ being essential in Lemma E [19]).

References.

1. L. S. Bosanquet, On Abel's integral equation and fractional integrals, *Proc. London Math. Soc.* (2), **31** (1930), 134—143.
2. L. S. Bosanquet and E. H. Linfoot, Generalized means and the summability of Fourier series, *Quarterly Journal* (Oxford), **2** (1931), 207—229.
3. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals (I), *Math. Zeitschrift*, **27** (1928), 565—606.
4. — — A maximal theorem with function-theoretic applications, *Acta Math.*, **54** (1930), 81—116.
5. — — Some inequalities connected with the calculus of variations, *Quarterly Journal* (Oxford), **3** (1932), 241—252.
6. — — Some properties of fractional integrals (II), *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), 403—439.
7. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities* (Cambridge, 1934).
8. E. Landau, Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen, *Proc. London Math. Soc.* (2), **13** (1913), 43—49.
9. — Die Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen, *Meddelelser København*, **6** (1925), Nr. 10.
10. F. Riesz, Sur un théorème de maximum de MM. Hardy et Littlewood, *Journal London Math. Soc.*, **7** (1932), 10—13.
11. M. Riesz, Sur un théorème de la moyenne et ses applications, *Acta Univ. Hung. Szeged*, **1** (1923), 114—126.

---

[18]) The integrals are finite, and positive unless $f = 0$ for all x.

[19]) Mr. A. E. Gwilliam informs us that he has found a proof which does not depend upon Lemma E, and that this proof includes the case $p = 1$.

(Eingegangen am 23. September 1934).

Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe.

Von

Wilhelm Specht in Königsberg (Preußen).

I.

Seit der Begründung der Darstellungstheorie endlicher Gruppen durch G. Frobenius und Th. Molien bildet die *symmetrische Gruppe* $\mathfrak{S}_n$, *die Gruppe aller Permutationen in n Symbolen* ein interessantes Beispiel für diese Theorie, das in neuerer Zeit durch Anwendungen in der Quantenmechanik noch größere Bedeutung gewann.

Als erster hat G. Frobenius ein Verfahren aufgestellt, die Charaktere der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ zu bestimmen, und dabei erkannt, daß ihre Werte sämtlich ganze rationale Zahlen sind[1]); er erhielt weiter das Resultat, daß jede Darstellung der Gruppe durch eine Ähnlichkeitstransformation auf eine Gestalt gebracht werden kann, in der die Koeffizienten der Matrizen sämtlich dem Körper der rationalen Zahlen angehören[2]). Ein Satz von W. Burnside[3]) ließ daraus sofort entnehmen, daß die Koeffizienten sogar ganz rational erhalten werden können.

Herr I. Schur[4]) führte die Untersuchungen weiter und stellte eine Methode auf, die es möglich machte, die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe zu konstruieren; er erhielt dabei von neuem die eben erwähnten Resultate. Das Prinzip, das auch für die vorliegende Arbeit den Ausgangspunkt bildet, ist im wesentlichen folgendes:

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängige Veränderliche, $f(x)$ eine homogene Form in ihnen vom Grade m mit rationalen Koeffizienten; durch eine Permutation

$$P = \begin{pmatrix} x_\nu \\ x_{\alpha_\nu} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) Vgl. G. Frobenius, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1900, S. 516.

[2]) Vgl. G. Frobenius, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1903, S. 328. (Mit F zitiert.)

[3]) Vgl. W. Burnside, On the arithmetical nature of the coefficients in a group of linear substitutions, Proceedings L. M. S. (2) 7 (1908), S. 8 (Theorem auf S. 10).

[4]) Vgl. I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1908, S. 664. (Mit S_2 zitiert.)

der Veränderlichen gehe $f(x)$ in die Form $f^P(x)$ über. Unter dem *durch* $f(x)$ *erzeugten symmetrischen Modul* $\mathsf{M}(f(x))$ verstehe man dann den Bereich aller Formen

$$\sum_P a_P f^P(x)$$

mit rationalen Koeffizienten a_P, wobei über alle Permutationen P aus $\mathfrak{S}_n$ zu summieren ist. Bilden k linear unabhängige Formen $g_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$ eine Basis dieses Moduls, so gilt für jede Permutation P:

$$(1) \qquad g_\alpha^P(x) = \sum_\beta c_{\alpha\beta}^P g_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

mit rationalen Zahlen $c_{\alpha\beta}^P$, und man überzeugt sich leicht davon, daß die Matrizen $(c_{\alpha\beta}^P)$ eine Darstellung $\mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ vom Grade k liefern[5]). In der Bezeichnungsweise von Herrn I. Schur ist das System der Formen $g_\alpha(x)$ *ein Eigensystem von* $\mathfrak{S}_n$[6]); die Matrizengruppe $\mathfrak{G}$ will ich *die durch dieses Eigensystem erzeugte Darstellung von* $\mathfrak{S}_n$ nennen.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß der Begriff des Eigensystems noch dahin verallgemeinert werden kann, daß die Formen auch von mehreren Reihen von je n Veränderlichen gebildet sein können, die kogredient permutiert werden. Davon wird hier indes lediglich während eines Beweises Gebrauch gemacht werden.

Das Verfahren von Herrn I. Schur ist von dem soeben geschilderten ein wenig verschieden[7]); Herr I. Schur stellt zwar für jede irreduzible Darstellung einen gewissen symmetrischen Modul auf, eine Basis dieses Moduls liefert indes noch nicht die irreduzible Darstellung selbst, vielmehr hat man noch die Formen mod einem gewissen Untermodul N zu reduzieren, so daß nicht Gleichungen der Gestalt (1), sondern Kongruenzen der Form

$$g_\alpha^P(x) \equiv \sum_\beta c_{\alpha\beta}^P g_\beta(x) \pmod{\mathsf{N}}$$

entstehen.

Auf einem ganz anderen Wege gelangte Herr A. Young zu diesem Ziel der Bestimmung der irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$[8]); sein Verfahren entspricht ungefähr dem von G. Frobenius

---

[5]) Vgl. S_2, § 3.

[6]) Vgl. I. Schur und R. Brauer, Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1930, S. 209.

[7]) Vgl. S_2, §§ 3—6.

[8]) Vgl. A. Young, On the quantitative substitutional analysis, Proc. L. M. S.; I. (1) **33** (1901), S. 97; II. (1) **34** (1902), S. 261; III. (2) **28** (1928), S. 285; IV. (2) **31** (1930), S. 253; V. (2) **31** (1930), S. 273; VI. (2) **34** (1932), S. 196; VII. (2) **36** (1933) S. 304. (Diese Arbeiten werden mit $Y_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, 7)$ zitiert; Y bedeutet die Gesamtheit dieser Arbeiten.) Hier kommen in der Hauptsache Y_3 und Y_4 in Betracht.

aufgestellten, das auf dem Begriff der charakteristischen Einheiten beruht[9]). Zwischen den Youngschen Arbeiten und der vorliegenden bestehen daher kaum irgendwelche Zusammenhänge außer den rein äußerlichen, die darauf beruhen, daß die hier verwendeten kombinatorischen Hilfsmittel häufig auch von Herrn A. Young, freilich zu ganz anderen Zwecken herangezogen werden. Diese Verbindungen werden an geeigneter Stelle noch genauer dargelegt werden.

Die vorliegende Arbeit macht es sich also zur Aufgabe, Eigensysteme in dem oben definierten Sinne für die irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ aufzustellen; es gelingt dies mit Hilfe einiger weniger Resultate aus der Theorie der Charakteristiken, die teils von G. Frobenius[10]), teils von Herrn I. Schur[11]) stammen. Mit der knappen Aufzählung dieser Dinge beschäftigt sich der nächste Abschnitt; die beiden Abschnitte III. und IV. haben die Aufstellung der symmetrischen Moduln und der Eigensysteme zum Inhalt. Der letzte Abschnitt soll noch zeigen, daß die Methode der Eigensysteme auch ganz unabhängig von der Theorie der Charakteristiken begründet werden kann. Als Hilfsmittel wird lediglich der (nicht sehr tief liegende) Satz von der vollständigen Zerfällbarkeit endlicher Substitutionsgruppen herangezogen.

II.

Um die Untersuchungen möglichst einfach zu gestalten, fasse ich in diesem Abschnitt all das aus der Theorie der Charakteristiken zusammen, was für das Folgende benötigt wird.

Ist $\mathfrak{G}$ eine Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ mit dem Charakter χ, der der in bekannter Weise mit Hilfe der Zyklenzerlegung durch den *Typus* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ gekennzeichneten Ähnlichkeitsklasse in der Gruppe den Wert $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ zuordnet, so versteht man nach Herrn I. Schur unter der *Charakteristik* der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Funktion

$$\Phi = \sum_{(\alpha)} \frac{\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots, \alpha_n!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n}$$

in n unabhängigen Veränderlichen $s_1, s_2, \ldots, s_n$, wobei man über alle Lösungen der Gleichung $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$ in ganzen nichtnegativen Zahlen zu summieren hat[12]).

---

[9]) Vgl. F; den Zusammenhang mit Y_1 und Y_2 hat G. Frobenius hierin aufgezeigt. Vgl. auch in Y_3, S. 257. Die Aufstellung der Gruppenmatrizen zu den irreduziblen Darstellungen in Y_4 (Theorem I).

[10]) Vgl. F, §§ 4 und 5.

[11]) Vgl. S_2 und I. Schur, Dissertation Berlin 1901. (Mit S_1 zitiert.)

[12]) Vgl. S_2, § 1.

Die Anzahl der wesentlich verschiedenen[13]) irreduziblen Darstellungen ist bekanntlich gleich der Anzahl der Zerlegungen

(2) $$(\mu)\colon\ n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r \qquad (\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_r > 0)$$

von n in ganzzahlige positive Summanden[14]). Ist (μ) eine solche Zerlegung, so hat die Charakteristik einer ihr zugeordneten Darstellung $\mathfrak{H}^{(u)}$ die Gestalt:

(3) $$\Phi^{(u)} = |\, p_{\mu_\alpha - \alpha + \beta}\,| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r)$$

wenn man setzt:

(4) $$p_\nu = \sum_{(\alpha)} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\nu!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{s_\nu}{\nu}\right)^{\alpha_\nu} \qquad (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + \nu\alpha_\nu = \nu)$$

und $p_0 = 1$, $p_{-1} = p_{-2} = \ldots = 0$[15]). Den *Grad* $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$ der Darstellung erhält man hierbei als Koeffizienten von $\frac{s_1^n}{n!}$. Es gilt für diese Zahlen folgende Rekursionsgleichung:

(5) $$f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r} = f_{\mu_1 - 1, \mu_2, \ldots, \mu_r} + f_{\mu_1, \mu_2 - 1, \ldots, \mu_r} + \ldots + f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r - 1};$$

dabei hat man, falls $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+1}$ ist, den ϱ-ten Summanden gleich 0, außerdem bei $\mu_n = 1$ für $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, 0}$ die Zahl $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}}$ zu setzen[16]). Die Bezeichnung $\mathfrak{H}^{(u)}$ für eine Darstellung mit der Charakteristik $\Phi^{(u)}$ halten wir durchgängig fest.

Ist (μ) eine Zerlegung (2) von n, so bilde man folgendes Zahlenschema von r Zeilen und μ_1 Spalten: in die ϱ-te Zeile schreibe man μ_ϱ Einheiten von links nach rechts, die letzten $\mu_1 - \mu_\varrho$ Stellen fülle man mit Nullen aus; die Spaltensummen $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_s'$ $(\mu_1' \geqq \mu_2' \geqq \ldots \geqq \mu_s' > 0;\ s = \mu_1)$ geben dann offenbar wieder eine Zerlegung (μ') der Zahl n in s ganzzahlige positive Summanden. Diese neue Zerlegung nennt man nach Herrn I Schur die zu (μ) *assoziierte Zerlegung*[17]). Man erkennt leicht, daß (μ) wieder zu (μ') assoziiert ist.

Für die Zerlegungen (μ) führe ich ferner eine Anordnung nach folgendem Gesetze ein:

(μ) *soll vor* (λ) *stehen, wenn die erste nicht verschwindende der Differenzen*

$$\mu_1 - \lambda_1,\ \mu_2 - \lambda_2,\ \mu_3 - \lambda_3,\ \ldots$$

positiv ist; ich schreibe dafür kurz: $(\mu) < (\lambda)$[18]). Dieselbe Anordnung gebrauchen wir für die Charakteristiken $\Phi^{(\mu)}$, die zu den einfachen Charakteren von $\mathfrak{S}_n$ gehören: *es soll* $\Phi^{(\mu)}$ *vor* $\Phi^{(\lambda)}$ *stehen, wenn* (μ) *vor* (λ) *steht.*

---

[13]) „Wesentlich verschieden" bedeutet hier stets „nicht ähnlich".

[14]) Vgl. S_2, § 1.

[15]) Vgl. S_1, § 23 und S_2, § 1.

[16]) Vgl. S_1, § 1 Formel (3) und Y_3, S. 261 Formel (1).

[17]) Vgl. S_1, § 19 und F, § 5.

[18]) Vgl. S_2, § 1 und F, § 4.

Bekannt ist, daß die mit Hilfe der in (4) definierten Funktionen p_ν gebildete Funktion

$$p^{(\mu)} = p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_r}$$

für jede Zerlegung (μ) von n eine Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ ist, die sich folgendermaßen zerlegen läßt:

$$p^{(\mu)} = \Phi^{(\mu)} + \sum_{(\varkappa) < (\mu)} g_\varkappa \Phi^{(\varkappa)};$$

es treten hierin also die Charakteristik $\Phi^{(\mu)}$ genau *einmal*, sonst aber nur Charakteristiken auf, die *vor* $\Phi^{(\mu)}$ stehen[19]). Ebenso ist die Funktion

$$c^{(\lambda)} = c_{\lambda_1} c_{\lambda_2} \cdots c_{\lambda_s},$$

wenn

$$c_\nu = \sum_{(\alpha)} \frac{(-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\cdots}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_\nu!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{s_\nu}{\nu}\right)^{\alpha_\nu} \quad (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + \nu\alpha_\nu = \nu)$$

gesetzt wird, für jede Zerlegung (λ) von n eine Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{S}_n$, für die gilt:

$$c^{(\lambda)} = \Phi^{(\lambda')} + \sum_{(\varkappa) > (\lambda')} g_\varkappa \Phi^{(\varkappa)},$$

wobei (λ') zu (λ) assoziiert ist. $c^{(\lambda)}$ enthält demnach $\Phi^{(\lambda')}$ genau einmal, sonst aber nur Charakteristiken *nach* $\Phi^{(\lambda')}$ als Summanden[20]). Ist daher insbesondere (λ) die zu (μ) assoziierte Zerlegung, so enthalten die Charakteristiken $p^{(\mu)}$ und $c^{(\lambda)}$ allein die Charakteristik $\Phi^{(\mu)}$ als gemeinsamen Summanden[21]).

III.

Eigensysteme, die Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ mit den Charakteristiken $p^{(\mu)}$ und $c^{(\lambda)}$ erzeugen, können leicht angegeben werden. Ist genauer $n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r$ die Zerlegung (μ) von n, so bilde man mit n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den symmetrischen Modul $\mathsf{M}(p(x))$ zu dem Monom:

(6) $$p(x) = (x_1 x_2 \ldots x_{\mu_1})^0 (x_{\mu_1+1} x_{\mu_1+2} \ldots x_{\mu_1+\mu_2})^1 \ldots (x_{n-\mu_r+1} x_{n-\mu_r+2} \ldots x_n)^{r-1}$$

vom Grade $\sum_{\varrho=1}^{r} (\varrho - 1)\mu_\varrho$. Nach Herrn I. Schur[22]) ist jede Basis dieses Moduls ein Eigensystem für eine Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ mit der Charakteristik $p^{(\mu)}$. Dem Beweis hierfür liegt im wesentlichen die Tatsache zugrunde, daß jede symmetrische Funktion in den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Darstellung mit der Charakteristik p_n, nämlich die Darstellung erzeugt,

---

[19]) Vgl. S_1, § 23 und S_2, § 1. Diese Formel ist noch einmal hergeleitet in Y_4, S. 263.

[20]) Vgl. S_1, § 22 und F, § 4.

[21]) Vgl. F, § 5, Formel (10).

[22]) Vgl. S_2, § 2.

die jeder Permutation die Zahl 1 zuordnet, das Monom $p(x)$ aber eine Invariante der Gruppe $\mathfrak{S}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$, aber keiner umfassenderen Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ ist. $\mathfrak{S}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$ bedeutet dabei die Gruppe aller Permutationen von $\mathfrak{S}_n$, die die ersten μ_1 Veränderlichen, die nächsten μ_2 Veränderlichen und so fort, schließlich die letzten μ_r Veränderlichen, in diese Abteilungen getrennt, unter sich permutieren. Eine Darstellung mit der Charakteristik $p^{(u)}$ werde im folgenden stets mit $\mathfrak{P}^{(u)}$ bezeichnet.

Es bezeichne weiter $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ die bekannte Vandermondesche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{\nu-1} & y_2^{\nu-1} & \ldots & y_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix}$$

oder was dasselbe ist, das Differenzenprodukt der in den Klammern stehenden Veränderlichen; für *eine* Veränderliche ($\nu = 1$) setze man $\Delta(y_1) = 1$. Ist dann wieder $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$ eine Zerlegung von n, so bilde man mit Hilfe von s Veränderlichenreihen $x_1^{(\sigma)}, x_2^{(\sigma)}, \ldots, x_n^{(\sigma)}$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, s$) folgendes Produkt von Differenzenprodukten:

$$(7) \qquad c(x) = \Delta(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{\lambda_1}^{(1)})\, \Delta(x_{\lambda_1+1}^{(2)}, x_{\lambda_1+2}^{(2)}, \ldots, x_{\lambda_1+\lambda_2}^{(2)}) \ldots \\ \ldots \Delta(x_{n-\lambda_s+1}^{(s)} x_{n-\lambda_s+2}^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)})$$

vom Grade $\dfrac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_r^2 - n}{2}$ und für diese Form den symmetrischen Modul $\mathsf{M}(c(x))$. Jede Basis dieses Moduls erzeugt als Eigensystem eine Darstellung mit der Charakteristik $c^{(\lambda)}$. Wir nennen eine solche Darstellung im folgenden $\mathfrak{C}^{(\lambda)}$. Der Beweis für diese Behauptung stützt sich darauf, daß $c(x)$ eine relative (alternierende) Invariante der Gruppe $\mathfrak{S}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s}$, aber keiner umfassenderen Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ ist; das Differenzenprodukt $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erzeugt aber die Darstellung mit der Charakteristik c_n, die den geraden Permutationen die Zahl 1, den ungeraden die Zahl -1 zuordnet.

Um nun ein Eigensystem für eine Darstellung $\mathfrak{G}^{(u)}$ zu erhalten, stelle man zu der Zerlegung $n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r$ die assoziierte Zerlegung $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$ auf und bilde mit n Veränderlichen die Form

$$(8) \quad d(x) = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda_1})\, \Delta(x_{\lambda_1+1}, x_{\lambda_1+2}, \ldots, x_{\lambda_1+\lambda_2}) \ldots \\ \ldots \Delta(x_{n-\lambda_s+1} x_{n-\lambda_s+2} \ldots x_n).$$

Beispielsweise ist für $n = 5 = 3 + 2$ diese Funktion

$$d(x) = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3).$$

Zu der Funktion $d(x)$ bilde man den symmetrischen Modul $\mathsf{M}(d(x))$; es gilt dann der

Satz 1. *Jede Basis des Moduls* $\mathsf{M}(d(x))$ *ist Eigensystem einer irreduziblen Darstellung* $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ *von* $\mathfrak{S}_n$.

Den Beweis für diese Behauptung führe ich in drei Schritten.

1. Zunächst schicke ich eine allgemeine Bemerkung über Eigensysteme voraus, die einen Spezialfall eines Satzes darstellt, der zuerst von Herrn B. L. van der Waerden bewiesen wurde[23]). Ist

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_k(x)$$

ein Eigensystem von $\mathfrak{S}_n$, das aus Formen in $s+1$ Veränderlichenreihen $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}$ besteht, und die Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{S}_n$ erzeugt, so setze man in den $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$

$$x_\nu^{(0)} = x_\nu^{(1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und wähle aus den so entstehenden Formen ein System linear unabhängiger, etwa

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_l(x).$$

Natürlich wird dabei vorausgesetzt, daß nicht alle Formen bei diesem Prozeß identisch verschwinden. Dieses System ist dann wiederum ein Eigensystem von $\mathfrak{S}_n$, und zwar erzeugt es eine Darstellung $\mathfrak{D}^*$ von $\mathfrak{S}_n$, deren irreduziblen Bestandteile mindestens in der gleichen Anzahl auch in $\mathfrak{D}$ enthalten sind[24]).

Der Vollständigkeit halber sei der Beweis für diese Aussage kurz skizziert: $f_\alpha(x)$ gehe durch die Identifizierungen $x_\nu^{(0)} = x_\nu^{(1)}$ in die Form $\varphi_\alpha(x)$ über; dabei führen die Gleichungen

$$f_\alpha^P(x) = \sum_\beta c_{\alpha\beta}^P f_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

auf die entsprechenden Beziehungen

$$(*) \qquad \varphi_\alpha^P(x) = \sum_\beta c_{\alpha\beta}^P \varphi_\beta(x).$$

Weiter sei

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{\varkappa=1}^{l} q_{\alpha\varkappa} g_\varkappa(x)$$

und

$$g_\varkappa^P(x) = \sum_\lambda d_{\varkappa\lambda}^P g_\lambda(x) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Dann entsteht aus (*) zunächst

$$\sum_\varkappa q_{\alpha\varkappa} g_\varkappa^P(x) = \sum_{\beta,\lambda} c_{\alpha\beta}^P q_{\beta\lambda} g_\lambda(x)$$

---

[23]) Vgl. B. L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin J. Springer 1932, S. 74.

[24]) In diesem Satze, ebenso bei ähnlichen Aussagen im folgenden, ist der Zusatz „abgesehen von Ähnlichkeitstransformationen" stets hinzuzudenken.

und weiter

$$\sum_{\varkappa,\lambda} q_{\alpha\varkappa} d^P_{\varkappa\lambda} g_\lambda(\bar{x}) = \sum_{\beta,\lambda} c^P_{\alpha\beta} q_{\beta\lambda} g_\lambda(x).$$

Da die $g_\varkappa(x)$ linear unabhängig sind, so gilt, falls

$$(q_{\alpha\varkappa}) = Q; \quad (c^P_{\alpha\beta}) = C_P; \quad (d^P_{\varkappa\lambda}) = D_P$$

gesetzt wird:

$$Q D_P = C_P Q.$$

Es besteht also eine *Verkettung* zwischen den beiden Darstellungen $\mathfrak{D}^*$ und $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n$; weil aber Q den Rang l hat, so folgt daraus in bekannter Weise, daß die Darstellung $\mathfrak{D}^*$ ganz in $\mathfrak{D}$ enthalten ist[25]).

Nun erkennt man aber sofort, daß, falls (λ) die zu (μ) assoziierte Zerlegung bedeutet, eine Basis des früher definierten symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(c(x))$ auf dem soeben geschilderten Wege durch wiederholte Identifizierung von Veränderlichenreihen auf eine Basis des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(d(x))$ führt. Die durch diese Basis erzeugte Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ kann daher nur solche irreduziblen Bestandteile enthalten, die mindestens in derselben Anzahl auch in der Darstellung $\mathfrak{C}^{(\lambda)}$ vorkommen.

2. Bilden k Formen

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$$

ein Eigensystem von $\mathfrak{S}_n$, das die Darstellung $\mathfrak{D}$ erzeugt, und bilden ferner l lineare Verbindungen der $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$

$$g_\beta = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\beta\alpha} f_\alpha(x) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, l)$$

mit rationalen Koeffizienten $a_{\beta\alpha}$ wieder ein Eigensystem von $\mathfrak{S}_n$, das etwa die Darstellung $\mathfrak{D}^*$ erzeugt, so enthält $\mathfrak{D}^*$ nur irreduzible Bestandteile, die mindestens in der gleichen Anzahl auch in $\mathfrak{D}$ vorkommen. Auf dieser Tatsache beruht ja der Zerfällbarkeitsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer Substitutionen.

Offensichtlich ist aber der symmetrische Modul $\mathsf{M}(d(x))$ ein Untermodul des Moduls $\mathsf{M}(p(x))$, so daß die Voraussetzungen der obigen Bemerkung hier gewiß erfüllt sind. Daher kann die durch eine Basis von $\mathsf{M}(d(x))$ erzeugte Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ nur solche irreduziblen Bestandteile enthalten, die mindestens in der gleichen Anzahl auch in der Darstellung $\mathfrak{P}^{(\alpha)}$ vorkommen.

3. Die durch eine Basis des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(d(x))$ erzeugte Darstellung $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ enthält nach 1. nur solche irreduziblen

---

[25]) Mit einer ähnlichen Schlußweise wie die, die Herr I. Schur zum Beweise des Satzes I in seiner Arbeit: Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1906, S. 164 benutzt hat.

Bestandteile, die auch in $\mathfrak{C}^{(\lambda)}$ vorkommen, nach 2. nur solche, die auch in $\mathfrak{P}^{(\mu)}$ vorkommen. Nach der Schlußbemerkung von II. haben aber die Darstellungen $\mathfrak{C}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{P}^{(\mu)}$ nur eine Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ als gemeinsamen Bestandteil; demnach erzeugt eine Basis des Moduls $\mathsf{M}(d(x))$ eine solche irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$.

IV.

Es bleibt weiter die Aufgabe, für den Modul $\mathsf{M}(d(x))$ eine Basis wirklich aufzustellen. Dies gelingt auf folgendem Wege:

Man verteile die Ziffern $1, 2, \ldots, n$ auf alle möglichen Weisen auf das durch die Zerlegung (μ) charakterisierte Schema:

$$(9) \qquad s(\mu): \quad \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{\mu_1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \cdots & \varrho_{\mu_r} \end{matrix}$$

derart, daß die Ziffern in den Zeilen von links nach rechts, in den Spalten von oben nach unten nur zunehmen, daß also gilt:

$$(9\,a) \qquad \begin{matrix} \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{\mu_1};\ \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{\mu_2};\ \ldots;\ \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_{\mu_r} \\ \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \varrho_1;\ \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \varrho_2;\ \ldots \end{matrix}$$

und bilde für jede solche Anordnung eine analog wie (8) gebildete Form

$$(10) \qquad d(s(\mu); x) = \Delta(x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, \ldots x_{\varrho_1})\, \Delta(x_{\alpha_2}, x_{\beta_2}, \ldots x_{\varrho_2}) \ldots.$$

Diese Formen bezeichne man in einer später noch genauer charakterisierten Reihenfolge mit $d_1(x), d_2(x), \ldots, d_k(x)$, ihre Gesamtheit kurz mit $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ [26]).

Für das oben schon einmal herangezogene Beispiel

$$n = 5 = 3 + 2$$

erhalten wir folgende fünf Schemata (9)

1 2 3	1 2 4	1 3 4	1 2 5	1 3 5
4 5	3 5	2 5	3 4	2 4

und ihnen entsprechend die fünf Formen:

$$(x_4 - x_1)(x_5 - x_2); \quad (x_3 - x_1)(x_5 - x_2); \quad (x_2 - x_1)(x_5 - x_3);$$
$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2); \quad (x_2 - x_1)(x_4 - x_3).$$

[26]) Ein Schema (9) ohne die Bedingung (9 a) entspricht formal genau einem „tableau" in Y; die „standard tableaus" sind Schemata. die auch (9 a) erfüllen. In Y bleiben die Schemata formale kombinatorische Gebilde, während sie hier durch (10), wenn man so sagen darf, mit einem konkreten Inhalt erfüllt werden. Vgl. insbesondere Y_3, S. 258.

Satz II. *Das System* $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ *ist ein Eigensystem für eine irreduzible Darstellung* $\mathfrak{H}^{(\mu)}$ *von* $\mathfrak{S}_n$.

Die Anordnung der Formen $d_\varkappa(x)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ geschehe nach folgender Regel: Zunächst ordne man die Potenzprodukte der x_ν, die in allen $d_\varkappa(x)$ überhaupt auftreten, lexikographisch nach $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, d. h. man nenne

$$x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1} \quad \textit{höher als} \quad x_n^{\beta_n} x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \ldots x_1^{\beta_1}$$

wenn die erste der nichtverschwindenden Differenzen

$$\alpha_n - \beta_n, \quad \alpha_{n-1} - \beta_{n-1}, \quad \ldots$$

positiv ist. Das höchste Potenzprodukt, das in $d_\varkappa(x)$ auftritt [offensichtlich das Produkt der Hauptdiagonalelemente in der Form (10) von $d_\varkappa(x)$], nennen wir das *Leitglied* von $d_\varkappa(x)$ und bezeichnen es mit $L_\varkappa$. Die $d_\varkappa(x)$ werden dann so angeordnet, daß $d_\varkappa(x)$ vor $d_\lambda(x)$ steht, wenn nach der obigen Regel $L_\varkappa$ höher als L_λ ist. Man sieht dann sofort ein, daß das Leitglied $L_\varkappa$ von $d_\varkappa(x)$ in allen dieser Form nachfolgenden Formen $d_\lambda(x)$ von $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ nicht mehr vorkommen kann. Daraus ist die lineare Unabhängigkeit der $d_\varkappa(x)$ unmittelbar zu entnehmen. Denn in einer linearen Beziehung

$$\sum_\varkappa a_\varkappa d_\varkappa(x) = 0$$

muß, da das Leitglied L_1 nur in $d_1(x)$ vorkommt, $a_1 = 0$ sein; da dann das Leitglied L_2 nur noch in $d_2(x)$ vorkommt, ist auch $a_2 = 0$. So erhält man schrittweise, daß alle Koeffizienten $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ gleich Null sind.

Der Satz II ist demnach bewiesen, wenn die Anzahl k der Formen von $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ gerade der Grad $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$ einer Darstellung $\mathfrak{H}^{(\mu)}$ ist. Dies ist aber eine bekannte Tatsache[27]); ich will sie aus der Rekursionsformel (5) herleiten. Offenbar kann die Ziffer n in einer Anordnung (9) der Ziffern $1, 2, \ldots, n$, die den Bedingungen (9 a) genügt, nur an Enden der Zeilen und Spalten stehen. Steht etwa n am Ende der ϱ-ten Zeile (dies ist natürlich nur dann möglich, wenn $\mu_{\varrho+1} < \mu_\varrho$ ist), so erhalten wir, wenn n aus dem Schema gestrichen wird, ein Schema $s^*(\mu)$ in $n-1$ Ziffern, das zu der Zerlegung

$$n - 1 = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{\varrho-1} + (\mu_\varrho - 1) + \ldots + \mu_r$$

gehört. Umgekehrt erhalten wir aber aus jedem zu dieser Zerlegung von $n-1$ gehörigen Schema $s^*(\mu)$, indem wir in der ϱ-ten Zeile noch n

[27]) Vgl. J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin J. Springer 1924, S. 255; H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I., Math. Zeitschr. 23, S. 304; Y_3, Theorem II.

anfügen, ein Schema $s(\mu)$, das den Bedingungen (9 a) genügt. Daher gilt für die Anzahl $N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ der Schemata (9) die Rekursionsgleichung

$$N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r) = N(\mu_1 - 1, \mu_2, \ldots, \mu_r) + N(\mu_1, \mu_2 - 1, \ldots, \mu_r) + \ldots + N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r - 1),$$

wobei der ϱ-te Summand, wenn $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+1}$ ist, durch 0, ferner für $\mu_r = 1$ die Zahl $N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}, 0)$ durch $N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1})$ zu ersetzen ist. Diese Gleichung stimmt formal genau mit der Gleichung (5) überein; da aber auch für die Anfangswerte der beiden Zahlenfolgen $N(n) = f_n = 1$ gilt, so ist allgemein

$$N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r) = f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}.$$

Mit Hilfe der Leitglieder läßt sich eine beliebige Form $f(x)$ des Moduls $\mathsf{M}(d(x))$ ohne Mühe als lineare Verbindung der $d_\varkappa(x)$ angeben. Denn ist das Leitglied von $f(x)$ etwa $a_{\lambda_1} L_{\lambda_1}$ mit einer gewissen rationalen Zahl a_1, so enthält $f(x) - a_{\lambda_1} d_{\lambda_1}(x) = f'(x)$ nur Leitglieder von niedrigerer Ordnung. Hat $f'(x)$ etwa das Leitglied $a_{\lambda_2} L_{\lambda_2}$, so enthält

$$f(x) - a_{\lambda_1} d_{\lambda_1}(x) - a_{\lambda_2} d_{\lambda_2}(x)$$

wieder nur Leitglieder niedrigerer Ordnung. Fährt man so fort, so findet man in höchstens k Schritten die Entwicklung von $f(x)$ nach den Formen des Eigensystems $\mathfrak{d}^{(\mu)}$. Nimmt man insbesondere die Formen $d_\varkappa^P(x)$ für eine beliebige Permutation P aus $\mathfrak{S}_n$, so folgt aus diesem Verfahren unmittelbar, daß in den Gleichungen

$$d_\varkappa^P(x) = \sum_{\lambda=1}^{k} c_{\varkappa\lambda}^P d_\lambda(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

alle Koeffizienten $c_{\varkappa\lambda}^P$ ganze rationale Zahlen sind.

Für das Beispiel $n = 5 = 3 + 2$ hatten wir schon oben als Eigensystem die fünf Formen

$$d_1 = (x_4 - x_1)(x_5 - x_2); \quad d_2 = (x_3 - x_1)(x_5 - x_3); \quad d_3 = (x_2 - x_1)(x_5 - x_3);$$
$$d_4 = (x_3 - x_1)(x_4 - x_3); \quad d_5 = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3)$$

erhalten. Bestimmen wir beispielsweise für die erzeugenden Permutationen $P = (1, 2)$ und $Q = (1, 2, 3, 4, 5)$ der Gruppe $\mathfrak{S}_5$ die Formen $d_\varkappa^P(x)$ und $d_\varkappa^Q(x)$, so finden wir

$d_1^P = d_1 - d_3 + d_5$	$d_1^Q = -d_2$
$d_2^P = d_2 - d_3$	$d_2^Q = -d_4$
$d_3^P = -d_3$	$d_3^Q = -d_4 + d_5$
$d_4^P = d_4 - d_5$	$d_4^Q = d_1 - d_3 - d_4 + d_5$
$d_5^P = -d_5$	$d_5^Q = d_2 - d_3 - d_4 + d_5.$

Daher sind diesen Elementen in der Darstellung $\mathfrak{G}^{(3,2)}$ die Matrizen

$$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

zugeordnet.

V.

Der letzte Abschnitt soll zeigen, daß man allein aus den Eigensystemen $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ ohne irgendeine Kenntnis von der Theorie der Charakteristiken die Behauptungen der Sätze I und II herleiten kann:

Die durch das Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ erzeugte Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ von $\mathfrak{S}_n$ ist irreduzibel; verschiedene Eigensysteme $\mathfrak{d}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ erzeugen wesentlich verschiedene irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$. D. h.: Durchläuft (μ) alle Zerlegungen von n, so erzeugen die Eigensysteme $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ ein volles System irreduzibler Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$.

Zum Beweise verwende ich einen Satz, der vielleicht auch für sich betrachtet, nicht ohne Interesse ist.

Es sei $n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r (\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_r > 0)$ eine Zerlegung von n. Man erhält daraus gewisse Zerlegungen von:

$$\begin{aligned} n - 1 &= (\mu_1 - 1) + \mu_2 + \ldots + \mu_r, \\ n - 1 &= \mu_1 + (\mu_2 - 1) + \ldots + \mu_r, \\ &\ldots \\ n - 1 &= \mu_1 + \mu_2 + \ldots + (\mu_r - 1), \end{aligned}$$

von diesen sollen aber nur solche genommen werden, die bei dieser Schreibweise geordnet sind, d. h. die ϱ-te von diesen eben angeschriebenen Zerlegungen wird genommen, wenn $\mu_\varrho > \mu_{\varrho+1}$ ist, aber nicht, wenn $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+1}$ ist; bei $\mu_r = 1$ verringert sich in der letzten Zerlegung die Zahl der Summanden. Die so aus der Zerlegung (μ) von n entstehenden Zerlegungen von $n - 1$ mögen mit $(\mu)_1, (\mu)_2, \ldots, (\mu)_t$ $(t \leqq r)$ bezeichnet und die aus (μ) abgeleiteten Zerlegungen genannt werden [28]). Ohne weiteres ist klar, daß diese Zerlegungen sämtlich voneinander verschieden sind.

---

[28]) Diese Auswahl entspricht genau der für die Rekursionsgleichung (5) für die Grade der Darstellungen; denn die dort angegebene Regel besagt nichts anderes, als daß man die nichtgeordneten Zerlegungen fortzulassen hat.

Ein Beispiel wird dies noch besser erläutern. Die Zerlegung $n = 8 = 3 + 2 + 2 + 1$ führt zunächst auf die Zerlegungen

$$n - 1 = 7 = 2 + 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 2 + 1$$
$$= 3 + 2 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 + 0,$$

von denen aber die zweite (als nicht geordnet) ausgeschlossen wird.

Nun bezeichne $\mathfrak{S}'_n$ die Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$, die von allen den Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ gebildet wird, die die Ziffer n in sich selbst überführen; $\mathfrak{S}'_n$ ist der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{n-1}$ einstufig isomorph. Dann gilt der

Satz III. *Die durch das Eigensystem* $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ *erzeugte Darstellung* $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ *von* $\mathfrak{S}_n$ *liefert in den Matrizen, die den Elementen der Untergruppe* $\mathfrak{S}'_n$ *zugeordnet sind, eine Darstellung* $\mathfrak{G}^{(\mu)}_*$ *der* $\mathfrak{S}_{n-1}$; *es gilt in der bekannten symbolischen Schreibweise*:

$$\mathfrak{G}^{(\mu)}_* = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}^{(\mu)_1} & \mathfrak{G}_{12} & \dots & \mathfrak{G}_{1t} \\ 0 & \mathfrak{G}^{(\mu)_2} & \dots & \mathfrak{G}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{G}^{(\mu)_t} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

wobei $\mathfrak{G}^{(\mu)_1}, \mathfrak{G}^{(\mu)_2}, \dots, \mathfrak{G}^{(\mu)_t}$ *die von den Eigensystemen* $\mathfrak{d}^{(\mu)_1}, \mathfrak{d}^{(\mu)_2}, \dots, \mathfrak{d}^{(\mu)_t}$ *erzeugten Darstellungen von* $\mathfrak{S}_{n-1}$, $(\mu)_1, (\mu)_2, \dots, (\mu)_t$ *die aus* (μ) *abgeleiteten Zerlegungen von* $n - 1$ *bedeuten*[29]).

Zum Beweise betrachten wir noch einmal die Leitglieder $L_\varkappa$ der Formen $d_\varkappa(x)$ aus dem Systeme $\mathfrak{d}^{(u)}$. Eine Anzahl unter ihnen ist durch eine gewisse höchste Potenz $x_n^{r_1}$ der letzten Veränderlichen x_n teilbar; auf Grund der für die Formen festgelegten Reihenfolge können wir aber sofort erkennen, daß genau die ersten $f(\mu)_1$ Leitglieder durch $x_n^{r_1}$, alle anderen aber nur durch kleinere Potenzen von x_n teilbar sind. $f(\mu)_1$ bedeutet hierbei die Anzahl der Formen in dem Eigensystem $\mathfrak{d}^{(u)_1}$ der $\mathfrak{S}_{n-1}$, oder was dasselbe ist, die Anzahl der möglichen Schemata (9) für die Zerlegung $(\mu)_1$ von $n - 1$. Dies erkennt man leicht mit der gleichen Methode, die in IV. die Abzählung der Formen von $\mathfrak{d}^{(u)}$ gestattete. Unter den verbleibenden Formen $d_\varkappa(x)$ haben die nächsten $f(\mu)_2$ Leitglieder, die durch die nächste mögliche Potenz $x_n^{r_2}$ teilbar sind, und so fort. Auf diese Weise werden die Formen $d_\varkappa(x)$ von $\mathfrak{d}^{(u)}$ in t Abteilungen eingeteilt;

---

[29]) Dieser Satz ist im Grunde genommen natürlich schon in der Formel

$$\frac{\partial \Phi^{(\mu)}}{\partial s_1} = \sum_{\tau=1}^{t} \Phi^{(\mu)_\tau}$$

enthalten, die in S_2, § 1 (auf S. 666 oben) steht; hier kann freilich davon kein Gebrauch gemacht werden. Formuliert wurde Satz III aber meines Wissens noch nirgends.

die Leitglieder der τ-ten Abteilung sind sämtlich durch die gleiche Potenz $x_n^{r_\tau}$ teilbar ($\tau = 1, 2, \ldots, t$), wobei $r_1 > r_2 > \ldots > r_t \geqq 0$. $r_t = 0$ tritt ein, wenn $\mu_\tau = 1$ war. Entwickeln wir aber eine Form $d_\varkappa(x)$ aus der τ-ten Abteilung nach Potenzen von x_n, so sieht man aus der Gestalt von $d_\varkappa(x)$ sofort, daß der Koeffizient $d_\varkappa^*$ von $x_n^{r_\tau}$ (nur noch abhängig von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) gerade eine Form aus dem Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)_\tau}$ ist; man hat dazu nur die Determinante in $d_\varkappa(x)$, in der x_n vorkommt, nach der Zeile zu entwickeln, in der die Potenzen von x_n stehen. Durchläuft daher $d_\varkappa(x)$ alle Formen aus der τ-ten Abteilung, so finden wir als Koeffizienten von $x_n^{r_\tau}$ gerade alle Formen dieses Eigensystems $\mathfrak{d}^{(\mu)_\tau}$ der $\mathfrak{S}_{n-1}$ [30]).

Damit ist aber der Beweis für den Satz III fast vollendet; bilden wir nämlich für eine Permutation P' aus der Gruppe $\mathfrak{S}_n'$ zu irgendeiner Form $d_\varkappa(x)$ der τ-ten Abteilung aus $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ die Form $d_\varkappa^{P'}(x)$, so ist auch das Leitglied dieser Form gewiß durch $x_n^{r_\tau}$ teilbar. Daher kann die Entwicklung

$$d_\varkappa^{P'}(x) = \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda}^{P'} d_\varkappa(x) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots k)$$

erst mit Formen der τ-ten Abteilung beginnen, die vorherstehenden Koeffizienten $x_{\varkappa\lambda}^{P'}$ sind sicherlich gleich Null. Dies zeigt, daß eine Zerfällung der angegebenen Form (11) eintritt, allerdings sagt es noch nichts über die in der Hauptdiagonale stehenden Matrizengruppen aus. Entwickelt man nun aber auf beiden Seiten nach x_n, und vergleicht man die Koeffizienten der höchsten Potenz $x_n^{r_\tau}$, so entsteht die Beziehung

$$d_\varkappa^{*P'} = \sum a_{\varkappa\lambda}^{P'} d_\lambda^*,$$

wobei rechts natürlich nur noch über die Indizes λ summiert wird, deren zugehörigen Formen $d_\lambda(x)$ zur τ-ten Abteilung gehören. Diese Beziehung ist aber genau eine der Entwicklungsformeln für das Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)_\tau}$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$ und das Element P' dieser Gruppe. Daraus folgt, daß die Hauptdiagonale von (11) gerade die angegebene Gestalt hat.

Damit kommen wir zum Beweise der eingangs aufgestellten Behauptung. Da diese für $n = 1$ trivialerweise erfüllt ist, können wir sie für den Grad $n - 1$ schon als bewiesen voraussetzen.

Die Irreduzibilität der durch $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ erzeugten Darstellung ist offenbar dann bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß der symmetrische Modul $\mathsf{M}(d(x))$, der zu der Zerlegung (μ) in III. konstruiert wurde, keinen echten symmetrischen Untermodul enthält, der von Null verschiedene Elemente besitzt. Wir nehmen an, $\mathsf{M}(d(x))$ enthalte einen solchen symmetrischen Untermodul M_1; eine Basis dieses Moduls ist dann auch Eigensystem

[30]) Diese Zerlegung des Eigensystems in Abteilungen entspricht der Einteilung der Schemata (9) nach der Stellung der letzten Ziffer n; wird diese Ziffer im Schema gestrichen, so entsteht ein Schema einer abgeleiteten Zerlegung von $n - 1$.

von $\mathfrak{S}_n$ und erzeugt eine Darstellung $\mathfrak{G}_1$ dieser Gruppe. Daher ist mit einer geeigneten Ähnlichkeitstransformation

$$A^{-1}\,\mathfrak{G}^{(\mu)}\,A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & 0 \\ \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_2 \end{pmatrix}.$$

Da aber jede Darstellung einer endlichen Gruppe vollständig zerfällt, kann hier durch Änderung der Basis von M_1 erzielt werden, daß $\mathfrak{G}_{21} = 0$ ist; daher ist $\mathsf{M}(d(x))$ direkte Summe zweier symmetrischer Untermoduln M_1 und M_2 [31]).

Ist nun $f(x)$ ein beliebiges Element von M_1, so kann es als lineare Verbindung der $d_\varkappa(x)$ dargestellt werden

$$f(x) = \sum_{\varkappa} a_\varkappa d_\varkappa(x).$$

Hierbei möge a_λ der erste von Null verschiedene Koeffizient sein, das Leitglied von $f(x)$ ist dann $a_\lambda L_\lambda$. Durch eine Permutation P, die L_λ in das Leitglied L_1 der ersten Form $d_1(x)$ überführt (eine solche Permutation existiert gewiß), geht $f(x)$ in eine Form $g(x) = f^P(x)$ aus M_1 über, die das Leitglied $a_\lambda L_1$ besitzt, also in ihrer Entwicklung nach Potenzen von x_n die Gestalt hat:

$$g(x) = x_n^{r_1}\, g_1^*(x) + \ldots,$$

dabei ist $g_1^*(x)$ eine von Null verschiedene Form aus dem in $\mathfrak{S}_{n-1}$ symmetrischen Modul $\mathsf{M}(d^*(x))$, der der Zerlegung $(\mu)_1$ von $n-1$ entspricht. Dieser Modul ist aber nach Voraussetzung unzerlegbar, weshalb M_1 sicher Formen enthält

$$g(x) = x_n^{r_1}\, g_1^*(x) + \ldots$$

mit jedem beliebigen Element $g_1^*(x)$ aus $\mathsf{M}(d^*(x))$. Daraus folgt aber doch offenbar, daß die aus $\mathfrak{G}_1$ hervorgehende Darstellung $\mathfrak{G}_1^*$ für $\mathfrak{S}_n'$ mindestens die Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)_1}$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$ als (nach Voraussetzung) irreduziblen Bestandteil enthält. Das gleiche gilt auch für die Darstellung $\mathfrak{G}_2$; die aus ihr hervorgehende Darstellung $\mathfrak{G}_2^*$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$ enthält gleichfalls die Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)_1}$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$. Da indes

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1^* & 0 \\ 0 & \mathfrak{G}_2^* \end{pmatrix}$$

zu der in Satz III definierten Darstellung $\mathfrak{G}_*^{(\mu)}$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$ ähnlich ist, so kann nur eine der beiden Darstellungen $\mathfrak{G}_1^*$ und $\mathfrak{G}_2^*$ den (nach Voraussetzung) irreduziblen Bestandteil $\mathfrak{G}^{(\mu)_1}$ enthalten, weil dieser in $\mathfrak{G}_*^{(\mu)}$ nur einmal vorkommt. Also muß einer der beiden Moduln M_1 oder M_2 der

[31]) Daß dieser Satz wirklich nicht tief liegt, erkennt man leicht aus dem einfachen Beweis, den Herr I. Schur in seiner Arbeit: Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1905, S. 406 (Satz VII) gegeben hat.

Nullmodul sein, was in beiden Fällen der über M_1 gemachten Annahme widerspricht. Daher ist der symmetrische Modul $\mathsf{M}(d(x))$ unzerlegbar, die durch eine Basis diese Moduls, also insbesondere die durch das Eigensystem $\mathfrak{d}^{(u)}$ erzeugte Darstellung $\mathfrak{G}^{(u)}$ der $\mathfrak{S}_n$ irreduzibel.

Es bleibt daher nur noch zu zeigen, daß für zwei verschiedene Zerlegungen (λ) und (μ) von n die Eigensysteme $\mathfrak{d}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ wesentlich verschiedene Darstellungen $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{G}^{(u)}$ von $\mathfrak{S}_n$ erzeugen. Wären diese beiden Darstellungen ähnlich, so wären es auch die aus ihnen hervorgehenden Darstellungen $\mathfrak{G}_*^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{G}_*^{(\mu)}$ der $\mathfrak{S}_n'$, d. h. die aus (λ) und (μ) abgeleiteten Zerlegungen von $n-1$ müßten in irgendeiner Reihenfolge übereinstimmen; dann müßten sie aber gerade in der angegebenen Reihenfolge übereinstimmen, da die abgeleiteten Zerlegungen nach der in II. gegebenen Regel angeordnet sind. Das ist aber doch offensichtlich unmöglich, wenn (λ) und (μ) verschiedene Zerlegungen von n sind.

(Eingegangen am 12. Oktober 1934.)

Über Ramanujansche Kongruenzeigenschaften der Zerfällungsanzahlen. (I).

Von

G. N. Watson in Birmingham.

Einleitung.

Vor sechs Jahren hat mein Freund Herr Professor G. H. Hardy mir die in seinem Besitz befindliche Sammlung der Ramanujanschen Handschriften übergeben.

Diese Sammlung besteht aus 1. einer Abschrift des berühmten Notizbuches („Note Book"), 2. vermischten kurzen Notizen, 3. einer 43 Seiten langen Abhandlung unter dem Titel: Properties of $p(n)$ and $\tau(n)$ defined by the equations

$$\sum_0^\infty p(n)\, x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots},$$

$$\sum_1^\infty \tau(n)\, x^n = x\,\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\}^{24}.$$

Bekanntlich ist Ramanujan am 26. April 1920 gestorben. Bald darauf hat Hardy einen kurzen Auszug aus der erwähnten Abhandlung in der Math. Zeitschr.[1]) herausgegeben. In der Einleitung dieses Auszuges hat Hardy behauptet, daß „The manuscript contains a large number of further results. It is very incomplete and will require very careful editing before it can be published in full. I have taken from it the three simplest and most striking results".

Erst kürzlich habe ich das Studium dieser Abhandlung angefangen. Der Inhalt der Abhandlung ist zweifach, nämlich einerseits allgemeine Kongruenzen, die durch algebraische Methoden erhalten werden, anderseits Kongruenzen, die durch die Methoden der Funktionentheorie erhalten werden. Meistenteils enthält die Abhandlung Beweise der Kongruenzen erster Art; dagegen hat Ramanujan die Kongruenzen zweiter Art ohne Beweis bloß behauptet. Die folgende Unterscheidung zwischen den zwei Arten der Kongruenzen ist wesentlich. Eine Kongruenz erster Art gilt für die Zerfällungsanzahl jeder Zahl einer arithmetischen Progression. Eine Kongruenz zweiter Art gilt für die Zerfällungsanzahlen fast aller Zahlen einer arithmetischen Progression.

[1]) S. Ramanujan †, Congruence properties of partitions, diese Zeitschr. 9 (1921), S. 147—153.

Wegen der Unvollständigkeit und der Schwierigkeit der Ramanujanschen Abhandlung habe ich geglaubt, daß das sicherste Verfahren die Zusammentragung einer ganz neu bearbeiteten Übersetzung der Abhandlung ist. Daher stelle ich in dieser Arbeit einige der wichtigsten Hauptsätze zweiter Art dar.

Diese Hauptsätze lassen sich wie folgt kurz aussprechen. 1. Seien $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \ldots$ die Primzahlen einer arithmetischen Progression. Sei

$$n = 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5} 7^{a_7} \ldots = \prod_p p^{a_p}$$

die Primzahlzerlegung einer natürlichen Zahl n. Dann ist für fast alle n wenigstens einer der speziellen Exponenten $a_{\tilde{\omega}}$ ungerade.

2. Es bezeichne $\sigma_s(n)$ die Summe der s-ten Potenzen der positiven Teiler der natürlichen Zahl n. Es bezeichne k eine beliebige natürliche Zahl. Ist s ungerade, dann ist für fast alle n die zahlentheoretische Funktion $\sigma_s(n)$ durch k teilbar.

Schließlich behaupte ich den erstaunlichen und außerordentlich interessanten Hauptsatz:

3. Es bezeichne $\tau(n)$ die obenerwähnte Zerfällungsanzahl. Dann ist für fast alle n die Funktion $\tau(n)$ durch 691 teilbar.

Nachher gebe ich genaue Formulierungen und Beweise dieser Sätze. Beiläufig bemerke ich, daß in § 1 $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{14}$ positive Konstanten, auf deren Wertbestimmung es nicht ankommt, bezeichnen.

§ 1.

Beweis des Hauptsatzes 1. Einführung der erzeugenden Dirichletschen Reihe.

Es sei $k > 2$ eine beliebige natürliche Zahl und es sei l eine beliebige zu k teilerfremde natürliche Zahl. Es seien $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \ldots$ die Primzahlen der arithmetischen Progression $k y + l$, $y = 0, 1, 2, \ldots$.

Hat eine natürliche Zahl n die Primzahlzerlegung

$$n = 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5} 7^{a_7} \ldots = \prod_p p^{a_p},$$

so soll die zahlentheoretische Funktion $b_{n,k,l}$ die Zahl 1 oder die Zahl 0 bezeichnen, je nachdem alle die besonderen Exponenten $a_{\tilde{\omega}}$ gerade sind oder nicht.

Mit dieser Voraussetzung läßt sich der Hauptsatz 1 (in der verschärften Form) folgendermaßen aussprechen:

Hauptsatz 1. *Bei gegen* ∞ *wachsendem* x *ist*

$$\sum_{n=1}^{x} b_{n,k,l} \sim \frac{A_0}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\varphi(k)}\right)} \frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{\varphi(k)}}},$$

wo die Eulersche Funktion $\varphi(k) \equiv h$ die Anzahl der zu k teilerfremden natürlichen Zahlen bis zu k, $(k > 2)$, bezeichnet und A_0, $(A_0 > 0)$, eine bestimmbare Konstante ist[2]).

Um diesen Hauptsatz zu beweisen, müssen wir zunächst gewisse Eigenschaften der erzeugenden Dirichletschen Reihe untersuchen.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(s)$ diejenige analytische Funktion, welche für $\sigma > 1$, $s = \sigma + it$, durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n,k,l}}{n^s}$$

definiert ist.

Wir müssen uns zunächst mit gewissen Eigenschaften von $\mathfrak{F}(s)$ beschäftigen.

Hilfssatz 1. *Für $\sigma > 1$ ist*

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{\zeta(s)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right)}.$$

Beweis. Ganz einfach.

Hilfssatz 2. *Die Funktion*

$$f_1(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right) \exp\left(-\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right)\right]$$

ist in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{3}{4}$ regulär. Ferner ist

$$0 < c_1 < |f_1(s)| < c_2 \qquad (\sigma \geqq \tfrac{3}{4}).$$

Beweis. Es ist

$$\log\left(1 + \frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right) - \frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s} = -\frac{1}{2\widetilde{\omega}_n^{2s}}\left(1 - \frac{2}{3\widetilde{\omega}_n^s} + \frac{2}{4\widetilde{\omega}_n^{2s}} - \ldots\right),$$

also

$$\begin{aligned}\left|2\widetilde{\omega}_n^{2s}\left[\log\left(1 + \frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right) - \frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right]\right| &\leqq 1 + \frac{2}{3\widetilde{\omega}_n^{\sigma}} + \frac{2}{4\widetilde{\omega}_n^{2\sigma}} + \ldots \\ &< 1 + \frac{1}{2^{3/4}} + \frac{1}{4^{3/4}} + \frac{1}{8^{3/4}} + \ldots \\ &= \frac{2^{3/4}}{2^{3/4} - 1}.\end{aligned}$$

Wegen der in der Halbebene $2\sigma \geqq \frac{3}{2} > 1$ gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\widetilde{\omega}_n^{2s}}$ ist die Funktion $\log f_1(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{3}{4}$ regulär.

---

[2]) Man bemerkt, daß $k > 2$ sein muß. Das ist deshalb nötig, weil sonst $\varphi(k) = 1$ wäre und dieser Hauptsatz in der angegebenen Formulierung keinen Sinn hätte. Auch kann man im Fall $k = 1$ oder 2 ganz trivialerweise die viel bessere Formel

$$\sum_{n=1}^{x} b_{n,k,l} = O(\sqrt{x})$$

angeben.

Ferner ist

$$-\frac{2^{3/4}}{2^{3/4}-1}\frac{1}{2\,\widetilde{\omega}_n^{3/2}} < \Re\left[\log\left(1+\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right)-\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right] < \frac{2^{3/4}}{2^{3/4}-1}\frac{1}{2\,\widetilde{\omega}_n^{3/2}},$$

also

$$-\frac{2^{-1/4}}{2^{3/4}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^{3/2}} < \log\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right)\exp\left(-\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right)\right]\right| < \frac{2^{-1/4}}{2^{3/4}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^{3/2}},$$

d. h.

$$\log c_1 < \log\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right)\exp\left(-\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}\right)\right]\right| < \log c_2,$$

was zu beweisen war.

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$f_2(s) = \log\zeta(s) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^s}.$$

Schreiben wir nach Landau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\widetilde{\omega}_n}{\widetilde{\omega}_n^s} = K(s),$$

so kommt

$$f_2'(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + K(s).$$

Wir führen die folgenden Eigenschaften von $K(s)$ an[3]):

1. $K(s)$ hat für $s=1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{\varphi(k)} = \frac{1}{h}$
2. $K(s)$ ist für $\sigma = 1$, $t \neq 0$ regulär.
3. Es gibt zwei positive Konstanten c_3 und c_4 derart, daß für

$$|t| \geqq 3, \quad 1-\frac{1}{c_4\log^7|t|} \leqq \sigma \leqq 2,$$

$$|K(s)| < c_3\log^7|t|$$

ist.

Es gibt dann eine Konstante c_5 derart, daß im Rechteck

$$|t| \leqq 3, \quad \tfrac{3}{4} < 1-\frac{1}{c_5\log^7 3} \leqq \sigma \leqq 2$$

und auf dem Rande mit Ausnahme des innen gelegenen Poles $s=1$ die Funktion $K(s)$ regulär ist.

---

[3]) E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 1 (1909), S. 467 (zitiert als „Handbuch").

Es sei nun

$$c = \max(c_4, c_5).$$

Dann ist $K(s)$ im Gebiete

$$|t| \leqq 3, \quad 1 - \frac{1}{c_6 \log^7 3} \leqq \sigma \leqq 2,$$

$$|t| \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{c \log^7 |t|} \leqq \sigma \leqq 2$$

und auf dem Rande regulär mit Ausnahme des innen gelegenen Punktes $s = 1$.

Nunmehr können wir den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 3. *Für*

$$|t| \geqq 3, \quad \sigma_0 = 1 + \frac{1}{c \log^7 |t|},$$

$$1 - \frac{1}{c \log^7 |t|} \leqq \sigma \leqq \sigma_0$$

ist

$$\Re f_2(s) < c_7 + \log\log|t| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}}.$$

Beweis. Wegen der in diesem Gebiete erfüllten Bedingung[4]):

$$\Re \log \zeta(\sigma + it) < c_6 + \log\log|t|$$

folgt

$$\begin{aligned}
\Re f_2(s) &= \Re f_2(\sigma_0 + it) + \Re \log \zeta(\sigma + it) - \Re \log \zeta(\sigma_0 + it) \\
&\quad + \Re \int_{\sigma_0}^{\sigma} K(u + it)\, du \\
&\leqq \Re \log \zeta(\sigma + it) - \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0 + it}} + \int_{\sigma}^{\sigma_0} |K(u + it)|\, du \\
&< c_6 + \log\log|t| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}} + \int_{\sigma}^{\sigma_0} c_3 \log^7 |t|\, du \\
&\leqq c_6 + \log\log|t| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}} + 2cc_3 \\
&= c_7 + \log\log|t| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}},
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 4. *Es ist für* $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{c \log^7 |t|}$ *und* $|t| \geqq 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}} < 8 \log\log|t| + c_8.$$

---

[4]) Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch, S. 176.

Beweis. Wenn $\widetilde{\omega}_n = N$ gesetzt wird, besagt die genaue Primzahlformel für die arithmetische Progression[5])

$$n = \Pi(N) = \frac{N}{h \log N}(1 + o(1)),$$

also

$$\begin{aligned} N &= h n (1 + o(1)) \log N \\ &= h n (1 + o(1)) \log \left[h n (1 + o(1)) \log N\right] \\ &= h n (1 + o(1)) (\log n + O(1) + \log \log N). \end{aligned}$$

Nun gibt es ein c_9 derart, daß

$$n > c_9 \sqrt{N},$$

woraus folgt

$$|O(1) + \log \log N| < O(1) + \left|\log \log \frac{n^2}{c_9^2}\right| = o(\log n).$$

Also folgt

$$\widetilde{\omega}_n = h(1 + o(1))\, n \log n.$$

Wenn nun $\delta \leqq \frac{1}{10}$ eine beliebige (von t unabhängige) positive Zahl bezeichnet, so ist eine kleinste ganze Zahl $M(\delta) \geqq 3$ eindeutig bestimmt derart, daß

$$\frac{\widetilde{\omega}_n}{h n \log n} \geqq 1 - \delta \qquad (n \geqq M(\delta))$$

ist. Daher ergibt sich

$$\frac{1}{\widetilde{\omega}_n^{\sigma_0}} \leqq \frac{1}{(1-\delta)^{\sigma_0} (h n \log n)^{\sigma_0}} \qquad (n \geqq M(\delta)).$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{n=M(\delta)+1}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)^{\sigma_0}} &< \int_{M(\delta)}^{\infty} \frac{dx}{(x \log x)^{\sigma_0}} \\ &< \int_{e}^{\infty} \frac{dx}{(x \log x)^{\sigma_0}} \\ &= \int_{1}^{\infty} y^{-\sigma_0} e^{(1-\sigma_0) y}\, dy \\ &= \left(\int_{1}^{Y} + \int_{Y}^{\infty}\right) y^{-\sigma_0} e^{(1-\sigma_0) y}\, dy \\ &< \int_{1}^{Y} \frac{dy}{y} + \frac{1}{Y^{\sigma_0}} \int_{Y}^{\infty} e^{(1-\sigma_0) y}\, dy \\ &< \log Y + \frac{1}{(\sigma_0 - 1)\, Y^{\sigma_0}}. \end{aligned}$$

[5]) E. Landau, Handbuch, S. 467—468.

Das Minimum des rechtsstehenden Ausdruckes wird bei veränderlichem Y, $Y \geqq 1$, und festem σ_0 an der Stelle $Y = Y_1$, wo

$$Y_1^{\sigma_0} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1}$$

ist, erreicht. Der Wert dieses Minimums ist

$$\frac{1}{\sigma_0}\left(1 + \log \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1}\right) < 1 + \log \sigma_0 + \log (c \log^7 |t|) < 7 \log \log |t| + c_{10}.$$

Also kommt für $0 < \delta \leqq \frac{1}{10}$, δ unabhängig von t, heraus:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}} - (8 \log \log |t| + c_{10})$$
$$< \sum_{n=1}^{M(\delta)} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}} + ((1-\delta)^{-\sigma_0} - 1)(7 \log \log |t| + c_{10}) - \log \log |t|.$$

Nun ist bei gegebenem δ, $0 < \delta \leqq \frac{1}{10}$,

$$\lim_{|t| \to \infty} \left((1-\delta)^{-\sigma_0} - 1 - \frac{\log \log |t|}{7 \log \log |t| + c_{10}}\right) = \frac{1}{1-\delta} - 1 - \frac{1}{7} \leqq -\frac{2}{63} < 0.$$

Daher ist

$$\limsup_{|t| \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}} - 8 \log \log |t|\right) < c_{10} + \sum_{n=1}^{M(\delta)} \frac{1}{\tilde{\omega}_n},$$

d. h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma_0}} - 8 \log \log |t| < c_8,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 5. *Für*

$$|t| \geqq 3, \quad \sigma_0 = 1 + \frac{1}{c \log^7 |t|}, \quad c_{11} = c_7 + c_8,$$

$$1 - \frac{1}{c \log^7 |t|} \leqq \sigma \leqq \sigma_0$$

ist

$$\Re f_2(s) < 9 \log \log |t| + c_{11}.$$

Beweis: Wir verbinden Hilfssatz 4 mit Hilfssatz 3.

Hilfssatz 6. *Für*

$$|t| \geqq 3, \ \sigma_0 = 1 + \frac{1}{c \log^7 |t|}, \ \sigma_0 \leqq \sigma \leqq 2$$

ist

$$\Re f_2(s) < 9 \log \log |t| + c_{11}.$$

Beweis. Aus Hilfssatz 4 folgt

$$\begin{aligned}\Re f_2(s) &= \Re \log \zeta(s) - \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^s} \\ &< c_6 + \log\log|t| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{\sigma}} \\ &< c_7 + \log\log|t| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n^{v_0}} \\ &< 9\log\log|t| + c_7 + c_8 \\ &= 9\log\log|t| + c_{11},\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Nunmehr betrachten wir die Funktion $\mathfrak{F}(s)$, welche für $\sigma > 1$ durch das Produkt

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{\zeta(s)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{\tilde{\omega}_n^s}\right)}$$

definiert ist. Durch Vergleich der Hilfssätze 2, 5 und 6 erkennt man, daß $\mathfrak{F}(s)$ in den Gebieten

$$|t| \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{c\log^7|t|} \leqq \sigma \leqq 2$$

regulär ist und den Bedingungen

$$|\mathfrak{F}(s)| < c_{12}\log^9|t|, \quad |\mathfrak{F}(2+it)| < c_{13}$$

genügt.

Nun ist die Funktion

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + K(s)$$

im Rechteck

$$|t| \leqq 3, \quad \vartheta = 1 - \frac{1}{c\log^7 3} \leqq \sigma \leqq 2$$

regulär mit Ausnahme des Punktes $s = 1$, welcher Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-1 + \frac{1}{h}$ ist. Deswegen ist auch $\log \mathfrak{F}(s)$ im durch den Schnitt von ϑ bis 1 aufgetrennten Rechteck regulär. Ebenso ist im ganzen Rechteck ohne Schnitt die Funktion

$$\log \mathfrak{F}(s) + \left(1 - \frac{1}{h}\right)\log(s-1)$$

regulär.

In der Umgebung von $s = 1$ gilt für die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ die Entwicklung

$$\mathfrak{F}(s) = (s-1)^{\frac{1}{h}-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (s-1)^n,$$

wo $A_0 \neq 0$ ist[6]). Also gilt auch die Entwicklung

$$\frac{\mathfrak{F}(s)}{s^2} = (s-1)^{\frac{1}{h}-1} \sum_{n=0}^{\infty} A'_n (s-1)^n,$$

wo $A'_0 = A_0$ ist.

Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir jetzt zu der Abschätzung der Summe

$$\sum_{n=1}^{x} b_{n,k,l} \log \frac{x}{n}.$$

Hilfssatz 7. *Bei gegen ∞ wachsendem x ist*

$$\sum_{n=1}^{x} b_{n,k,l} \log \frac{x}{n} \sim \frac{A_0}{\Gamma\left(1-\frac{1}{h}\right)} \frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{h}}}.$$

Beweis. Es ist[7])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} y^s \frac{ds}{s^2} = \begin{cases} \log y & y \geqq 1, \\ 0 & 0 < y \leqq 1, \end{cases}$$

wo der Integrationsweg geradlinig ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{x} b_{n,k,l} \log \frac{x}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n,k,l}}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n,k,l}}{n^s}\right) x^s \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \mathfrak{F}(s)\, x^s \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \mathfrak{F}(s)\, x^s \frac{ds}{s^2} + O\left(x^2 \int_{x^2}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Cauchyschen Satz auf den geschlossenen Integrationsweg $ABCDEFEGHA$ an, wo

$$\begin{aligned} A &= 2 - x^2 i, & B &= 2 + x^2 i, \\ C &= 1 - \frac{1}{c \log^7 x^2} + x^2 i, & H &= 1 - \frac{1}{c \log^7 x^2} - x^2 i, \\ D &= 1 - \frac{1}{c \log^7 3} + 3i, & G &= 1 - \frac{1}{c \log^7 3} - 3i, \\ E &= 1 - \frac{1}{c \log^7 3} = \vartheta, & F &= 1 \end{aligned}$$

[6]) Man beachte, daß $A_0 > 0$ ist. Ferner

$$\frac{1}{A_0} = \lim_{s \to 1+0} (s-1)^{\frac{1}{h}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\omega_n^s}\right).$$

[7]) Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch, S. 180—183.

ist, die Strecken AB, BC, DE, EG, HA geradlinig sind, CD das Kurvenstück

$$\sigma = 1 - \frac{1}{c \log^7 t}, \qquad 3 \leqq t \leqq x^2$$

und GH das Kurvenstück

$$\sigma = 1 - \frac{1}{c \log^7 |t|}, \qquad -x^2 \leqq t \leqq -3$$

bezeichnet.

Geben wir zunächst den dreiteiligen Integrationsweg EFE an! Die drei Teile sind 1. das obere Ufer des Schnittes von ϑ bis $1-\delta$, wo δ positive und hinreichend klein ist, 2. die ganze Peripherie des Kreises um 1 als Mittelpunkt und mit δ als Radius im negativen Sinne bis $1-\delta$, 3. das untere Ufer des Schnittes von $1-\delta$ bis ϑ.

Der Integrand ist in diesem Gebiete und auf dem Rande regulär. Die Anwendung des Cauchyschen Satzes ergibt also

$$\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} = \int_A^B = -\int_B^C - \int_C^D - \int_D^E - \int_{EFE} - \int_E^G - \int_G^H - \int_H^A.$$

Wegen der in den vorigen Paragraphen zusammengestellten Eigenschaften von $\mathfrak{F}(s)$ erhalten wir die folgenden Abschätzungen

1. $$\left|\int_B^C\right| = \left|\int_H^A\right| = O\left(\frac{x^2 \log^9 x^2}{x^4}\right) = O\left(\frac{\log^9 x}{x^2}\right).$$

2. $$\left|\int_C^D\right| = \left|\int_G^H\right| = O \int_3^{x^2} x^{1-\frac{1}{\log^7 t}} \log^9 t \, \frac{dt}{t^2}$$

$$= O\, x \log^9 x \int_3^{x^2} x^{-\frac{1}{\log^7 t}} \frac{dt}{t^2}$$

$$= O\, x \log^9 x \left(\int_{\log^7 3}^{\sqrt{\log x}} + \int_{\sqrt{\log x}}^{\log^7 x^2} \right) x^{-\frac{1}{y}} e^{-y^{1/7}} y^{-6/7} \, dy$$

$$= O\, x \log^9 x \left(x^{-\frac{1}{\sqrt{\log x}}} \int_{\log^7 3}^{\sqrt{\log x}} e^{-y^{1/7}} \, dy + \int_{\sqrt{\log x}}^{\log^7 x^2} \frac{e^{-y^{1/7}} \, dy}{y^{6/7}} \right)$$

$$= O\, x \log^9 x \left(e^{-\sqrt{\log x}} + \int_{\sqrt{\log x}}^{\infty} \frac{e^{-y^{1/7}} \, dy}{y^{6/7}} \right)$$

$$= O\left(x e^{-(\sqrt{\log x})^{1/7}} \log^9 x\right).$$

3. $$\left|\int_D^E\right| = \left|\int_E^G\right| = O(x^{\vartheta}).$$

Zusammengenommen kommt heraus:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \mathfrak{F}(s)\, x^2 \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{EFE} \mathfrak{F}(s)\, x^s \frac{ds}{s^2} + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Schließlich betrachten wir das Integral

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{EFE} \mathfrak{F}(s)\, x^s \frac{ds}{s^2}.$$

Nun aber gilt in der Umgebung von $s = 1$ für die Funktion $\frac{\mathfrak{F}(s)}{s^2}$ die Entwicklung

$$\frac{\mathfrak{F}(s)}{s^2} = (s-1)^{\frac{1}{h}-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n' (s-1)^n.$$

An beiden Ufern des Schnittes bedeutet dann $(s-1)^{\frac{1}{h}-1}$ je einen bestimmten Wert; die Amplituden sind $e^{\pm \pi i\left(\frac{1}{h}-1\right)}$. Ferner kann ruhig in den singulären Punkt $s = 1$ hinein integriert werden, da der Exponent

$$\frac{1}{h} - 1 > -1$$

ist, so daß für das Integral über den Kreis um 1 mit dem Radius δ von $1-\delta$ oben bis $1-\delta$ unten

$$\lim_{\delta \to 0} \int \mathfrak{F}(s)\, x^s \frac{ds}{s^2} = 0$$

ist.

Auf der Strecke $\vartheta \leqq s \leqq 1$ ist nun

$$\left| (s-1)^{\frac{1}{h}-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n' (s-1)^n \right| = O\left((s-1)^{\frac{1}{h}}\right) < c_{14},$$

$$\left| \left(\frac{\mathfrak{F}(s)}{s^2} - A_0 (s-1)^{\frac{1}{h}-1} \right) x^s \right| < c_{14}\, x^\sigma,$$

was in $s = 1$ hinein integriert werden kann und auf dem Wege hin und zurück den Beitrag

$$2 c_{14} \int_{\vartheta}^{1} x^\sigma d\sigma = 2 c_{14} \frac{x - x^\vartheta}{\log x}$$

$$= O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

liefert. Daher ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{EFE} \mathfrak{F}(s)\, x^s \frac{ds}{s^2} = -\frac{A_0}{2\pi i}\int_{EFE} (s-1)^{\frac{1}{h}-1} x^s\, ds + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

wo

$$\int_{EFE}(s-1)^{\frac{1}{h}-1}x^s\,ds = e^{\pi i\left(\frac{1}{h}-1\right)}\int_{\vartheta}^{1}(1-s)^{\frac{1}{h}-1}x^s\,ds + e^{-\pi i\left(\frac{1}{h}-1\right)}\int_{1}^{\vartheta}(1-s)^{\frac{1}{h}-1}x^s\,ds$$

$$= -2i\sin\frac{\pi}{h}\int_{\vartheta}^{1}(1-s)^{\frac{1}{h}-1}x^s\,ds$$

$$= -2i\sin\frac{\pi}{h}\int_{0}^{1}(1-s)^{\frac{1}{h}-1}x^s\,ds + O(x^{\vartheta})$$

ist.

Wenn $s = 1 - \frac{u}{\log x}$ gesetzt wird, ist also

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{EFE}\mathfrak{F}(s)x^s\frac{ds}{s^2} = \frac{A_0}{\pi}\sin\frac{\pi}{h}\frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{h}}}\int_{0}^{\log x}u^{\frac{1}{h}-1}e^{-u}\,du + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

$$= \frac{A_0}{\pi}\sin\frac{\pi}{h}\frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{h}}}\left(\int_{0}^{\infty}u^{\frac{1}{h}-1}e^{-u}\,du + O\frac{(\log x)^{\frac{1}{h}-1}}{x}\right) + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

$$= \frac{A_0}{\Gamma\left(1-\frac{1}{h}\right)}\frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{h}}} + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Wenn wir also die vorigen Abschätzungen zusammenfassen, erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{x}b_{n,k,l}\log\frac{x}{n} = \frac{A_0}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\varphi(k)}\right)}\frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{\varphi(k)}}} + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

womit der Hilfssatz 7 vollständig bewiesen ist.

Hilfssatz 8. *Die zahlentheoretische Funktion* $\beta_n \geqq 0$ *sei der Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{x}\beta_n\log\frac{x}{n} \sim \frac{\beta x^{\alpha}}{(\log x)^{\gamma}},$$

α, β *und* γ *Konstanten,* ($\alpha > 0$, $\beta > 0$), *unterworfen. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{x}\beta_n \sim \frac{\alpha\beta x^{\alpha}}{(\log x)^{\gamma}}.$$

Beweis [8]). Setzt man zur Abkürzung

$$B(x) = \sum_{n=1}^{x} \beta_n, \qquad B_1(x) = \sum_{n=1}^{x} \beta_n \log \frac{x}{n},$$

so ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha} B_1(x) = \beta.$$

Daraus folgt bei gegebenem konstantem $\delta > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log (x + x\delta))^\gamma}{(x + x\delta)^\alpha} B_1(x + x\delta) = \beta.$$

Wegen

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\log (x + x\delta)}{\log x} \right)^\gamma = 1$$

folgt hieraus

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha} B_1(x + x\delta) = \beta (1 + \delta)^\alpha.$$

Daher ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha} (B_1(x + x\delta) - B_1(x)) = \beta ((1 + \delta)^\alpha - 1).$$

Wegen

$$\begin{aligned} B(x) \log (1 + \delta) &= \log (1 + \delta) \sum_{n=1}^{x} \beta_n \\ &\leqq \log (1 + \delta) \sum_{n=1}^{x} \beta_n + \sum_{n=x+1}^{x+x\delta} \beta_n \log \frac{x + x\delta}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{x+x\delta} \beta_n \log \frac{x + x\delta}{n} - \sum_{n=1}^{x} \beta_n \log \frac{x}{n} \\ &= B_1(x + x\delta) - B_1(x) \\ &\leqq \log (1 + \delta) \sum_{n=1}^{x} \beta_n + \sum_{n=x+1}^{x+x\delta} \beta_n \log (1 + \delta) \\ &= B(x + x\delta) \log (1 + \delta) \end{aligned}$$

---

[8]) Beim Beweis dieses Satzes benutze ich bloß die Methode, die Landau mehrmals benutzt, um verschiedene Spezialfälle des Satzes zu beweisen. Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch, S. 190—193, 193—195, 658—660. Vgl. auch E. Landau, Über die Einteilung der positiven ganzen Zahlen in vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer additiven Zusammensetzung erforderlichen Quadrate, Arch. der Math. u. Phys. (3) 13, (1908), S. 305—312. Der allgemeine Satz war mir bisher unbekannt.

folgt hieraus einerseits

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha}B(x)\leqq\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha\log(1+\delta)}\left(B_1(x+x\delta)-B_1(x)\right)$$

$$=\frac{\beta\left((1+\delta)^\alpha-1\right)}{\log(1+\delta)},$$

andererseits

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha}B(x+x\delta)\geqq\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha\log(1+\delta)}\left(B_1(x+x\delta)-B_1(x)\right)$$

$$=\frac{\beta\left((1+\delta)^\alpha-1\right)}{\log(1+\delta)},$$

also, wenn $\frac{x}{1+\delta}$ statt x geschrieben wird,

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{(\log x-\log(1+\delta))^\gamma}{x^\alpha}B(x)\geqq\frac{\beta\left((1+\delta)^\alpha-1\right)}{(1+\delta)^\alpha\log(1+\delta)},$$

d. h.

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha}B(x)\geqq\frac{\beta\left((1+\delta)^\alpha-1\right)}{(1+\delta)^\alpha\log(1+\delta)}.$$

Daher ist

$$\frac{\beta\left((1+\delta)^\alpha-1\right)}{(1+\delta)^\alpha\log(1+\delta)}\leqq\liminf_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha}B(x)$$

$$\leqq\limsup_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha}B(x)\leqq\frac{\beta\left((1+\delta)^\alpha-1\right)}{\log(1+\delta)}$$

für jedes $\delta>0$. Wegen

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\beta\left((1+\delta)^\alpha-1\right)}{(1+\delta)^\alpha\log(1+\delta)}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\beta\left((1+\delta)^\alpha-1\right)}{\log(1+\delta)}=\alpha\beta$$

folgt hieraus

$$\alpha\beta\leqq\liminf_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha}B(x)\leqq\limsup_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha}B(x)\leqq\alpha\beta,$$

d. h.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^\gamma}{x^\alpha}B(x)=\alpha\beta.$$

Mit anderen Worten

$$\sum_{n=1}^{x}\beta_n\sim\frac{\alpha\beta x^\alpha}{(\log x)^\gamma},$$

womit der Hilfssatz 8 bewiesen ist.

Nunmehr können wir den wichtigen Hauptsatz 1 beweisen.

Hauptsatz 1. *Bei gegen ∞ wachsendem x ist*

$$\sum_{n=1}^{x} b_{n,k,l} \sim \frac{A_0}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\varphi(k)}\right)} \frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{\varphi(k)}}}.$$

Beweis. Wir wenden die in Hilfssatz 8 erreichte Abschätzung auf das vorige Ergebnis, das wir in Hilfssatz 7 erhalten haben, an.

§ 2.

Eine Vermutung von Ramanujan.

Das in der Einleitung beschriebene Manuskript enthält noch eine Erweiterung des Hauptsatzes 1. Hierin ersetzt man die Primzahlen $\widetilde{\omega}_1$, $\widetilde{\omega}_2$, $\widetilde{\omega}_3$, ... einer arithmetischen Progression durch irgendeine Folge von Primzahlen: $q_1, q_2, q_3, \ldots (q_1 < q_2 < q_3 < \ldots)$ unter der Bedingung, daß die Reihe

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots$$

divergiert.

Hat eine natürliche Zahl n die Primzahlzerlegung

$$n = 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5} 7^{a_7} \ldots = \prod_p p^{a_p},$$

so soll die zahlentheoretische Funktion b'_n die Zahl 1 oder die Zahl 0 bezeichnen, je nachdem alle die besonderen Exponenten a_q gerade sind oder nicht. Unter dem Namen „Ramanujansche Vermutung" verstehe ich nun die bis heute unbewiesene Behauptung, daß die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{x} b'_x = o(x)$$

gültig ist.

Wegen der Ungewißheit, ob die erzeugende Dirichletsche Reihe auch im allgemeinen Falle entsprechende analytische Eigenschaften hat, weiß man nicht, ob diese Vermutung richtig ist oder nicht. Es ist möglich, daß Ramanujan die Vermutung aus einer anderen bis jetzt ebenfalls unbewiesenen Annäherung, nämlich

$$\sum_{n=1}^{x} b'_n \sim \frac{x}{\left(1+\frac{1}{q_1}\right)\left(1+\frac{1}{q_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{q_m}\right)} \qquad (q_m \leqq x < q_{m+1}),$$

gefolgert hat.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes 2.

Dem Beweis des Hauptsatzes 2 schicken wir die folgenden Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 9. *Hat eine natürliche Zahl n die Primzahlzerlegung*

$$n = 2^{a_2}\, 3^{a_3}\, 5^{a_5}\, 7^{a_7} \ldots = \Pi\, p^{a_p},$$

so ist

$$\sigma_s(n) = \prod_p \frac{p^{s(1+a_p)} - 1}{p^s - 1}.$$

Beweis. Wohlbekannt[9]).

Hilfssatz 10. *Es sei k eine beliebige natürliche Zahl und es sei s eine beliebige ungerade natürliche Zahl. Es seien $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \ldots$ die Primzahlen der arithmetischen Progression $ky - 1$, $y = 1, 2, 3, \ldots$. Ist irgendein Exponent $a_{\tilde{\omega}}$ ungerade (unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 9), so ist*

$$\sigma_s(n) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\omega}^{s(1+a_{\tilde{\omega}})} - 1}{\tilde{\omega}^s - 1} &= (1 + \tilde{\omega})(1 - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2 - \ldots + \tilde{\omega}^{s-1}) \\ &\quad \cdot (1 + \tilde{\omega}^{2s} + \tilde{\omega}^{4s} + \ldots + \tilde{\omega}^{s(a_{\tilde{\omega}}-1)}) \\ &\equiv 0 \pmod{k},\end{aligned}$$

wegen $\tilde{\omega} + 1 \equiv 0 \pmod{k}$. Aus Hilfssatz 9 folgt jetzt die Behauptung.

Hilfssatz 11. *Es bezeichne $h_{n,k,s}$ die folgende zahlentheoretische Funktion:*

$$h_{n,k,s} = 0, \quad \text{wenn} \quad k \mid \sigma_s(n),$$
$$h_{n,k,s} = 1, \quad \text{wenn} \quad k \nmid \sigma_s(n).$$

Dann ist für ungerades s

$$\sum_{n=1}^{x} h_{n,k,s} \leqq \sum_{n=1}^{x} b_{n,k,k-1}.$$

Beweis. Wenn $b_{n,k,k-1} = 0$ ist, so ist $h_{n,k,s} = 0$. Wenn $b_{n,k,k-1} = 1$ ist, so ist $h_{n,k,s} \leqq 1$, womit der Hilfssatz 11 bewiesen ist.

Wir beweisen nun noch den wichtigen Hauptsatz 2.

Hauptsatz 2. *Es sei k eine beliebige natürliche Zahl und es sei s eine beliebige ungerade natürliche Zahl. Es sei C_x die Anzahl der ganzen*

[9]) J. Liouville, Sur quelques fonctions numériques, Journ. d. Math. (2), 2 (1857), S. 425—432.

Zahlen $n \leqq x$ derart, daß $\sigma_s(n)$ durch k nicht teilbar ist. Dann ist bei gegen ∞ wachsendem x

$$C_x = O\left(\frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{\varphi(k)}}}\right) = o(x).$$

Beweis. Wegen Hauptsatz 1 und Hilfssatz 11 ist

$$\begin{aligned} C_x &= \sum_{n=1}^{x} h_{n,k,s} \\ &\leqq \sum_{n=1}^{x} b_{n,k,k-1} \\ &= O\left(\frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{\varphi(k)}}}\right), \end{aligned}$$

womit der Hauptsatz 2 vollständig bewiesen ist.

§ 4.

Beweis des Hauptsatzes 3.

Erklären wir zunächst den Zusammenhang zwischen der Zerfällungsanzahl $\tau(n)$ und der speziellen Funktion $\sigma_{11}(n)$, die die Summe der elften Potenzen der positiven Teiler der natürlichen Zahl n bedeutet!

Wir definieren die Funktion $\Phi_{r,s}(q)$ durch die Formel:

$$\Phi_{r,s}(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^r n^s q^{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} n^r \sigma_{s-r}(n)\, q^n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi_{0,s}(q) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s q^n}{1-q^n} \\ &= \frac{1^s q}{1-q} + \frac{2^s q^2}{1-q^2} + \frac{3^s q^3}{1-q^3} + \ldots. \end{aligned}$$

Wir setzen noch zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} P &= 1 - 24\,\Phi_{0,1}(q), & P' &= 1 - 24\,\Phi_{0,1}(q^2), \\ Q &= 1 + 240\,\Phi_{0,3}(q), & Q' &= 1 + 240\,\Phi_{0,3}(q^2), \\ R &= 1 - 504\,\Phi_{0,5}(q), & R' &= 1 - 504\,\Phi_{0,5}(q^2). \end{aligned}$$

Wir behandeln jetzt die Beziehung zwischen den Funktionen $\Phi_{0,2s+1}(q)$, $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ und den Invarianten der Weierstraßschen $\wp$-Funktion.

Von größter Wichtigkeit ist dabei die wohlbekannte Formel[10])

$$\frac{4\omega_1^2}{\pi^2}\,\wp\left(\frac{2\omega_1 z}{\pi}\right) = -\frac{4\eta_1\omega_1}{\pi^2} + \frac{1}{\sin^2 z} - 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^{2mn}\,(e^{2niz} + e^{-2niz}).$$

Nimmt man die Reihenentwicklungen der Funktionen $e^{\pm 2niz}$, so läßt sich die vorstehende Entwicklung schreiben:

$$\wp\left(\frac{2\omega_1 z}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2 z^2} + \sum_{s=1}^{\infty} k_s \left(\frac{2\omega_1 z}{\pi}\right)^{2s}.$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleichung[11])

$$\left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^{2s+2} k_s = \frac{2^{2s+2}\,B_{s+1}}{(2s)!\,(2s+2)} + \frac{(-1)^{s-1}\,2^{2s+3}}{(2s)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s+1}\,q^{2mn},$$

d. h.

$$(2s)!\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{2s+2} k_s = \frac{B_{s+1}}{2s+2} + (-1)^{s-1}\,2\,\Phi_{0,2s+1}(q^2).$$

Man beachte zunächst, daß alle $\Phi_{0,2s+1}(q)$ sich als ganze rationale Funktionen von Q und R mit rationalen Zahlenkoeffizienten darstellen lassen. Als Spezialfall heben wir hervor

Hilfssatz 12. *Es gilt*

$$691 + 65\,520\,\Phi_{0,11}(q) = 441\,Q^3 + 250\,R^2.$$

Beweis. Aus der wohlbekannten Rekursionsformel[12])

$$(n-1)(2n+5)\,k_{n+1} = 3\sum_{m=1}^{n-1} k_m\,k_{n-m}$$

folgt für den Koeffizienten k_5 die Darstellung

$$39\,k_5 = 2\,k_1^3 + 3\,k_2^2.$$

Wenn

$$10!\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12} k_5 = \frac{691}{32\,760} + 2\,\Phi_{0,11}(q^2),$$

$$2!\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{4} k_1 = \frac{1}{120} + 2\,\Phi_{0,3}(q^2) = \frac{Q'}{120},$$

$$4!\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{6} k_2 = \frac{1}{252} - 2\,\Phi_{0,5}(q^2) = \frac{R'}{252}$$

berücksichtigt wird, so ergibt sich

$$691 + 65\,520\,\Phi_{0,11}(q^2) = 441\,Q'^3 + 250\,R'^2,$$

womit der Hilfssatz 12 bewiesen ist.

---

[10]) Vgl. z. B. J. Tannery u. J. Molk, Théorie des fonctions elliptiques 3 (1898), S. 118.

[11]) B_{s+1} bedeutet hier die $(s+1)$-te Bernoullische Zahl.

[12]) Vgl. z. B. A. Enneper u. F. Müller, Elliptische Funktionen (1890), S. 41.

Hilfssatz 13. *Es gilt*

$$Q^3 - R^2 = 1728\, q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

Beweis. Aus der Produktdarstellung [13]) der Diskriminante, nämlich

$$g_2^3 - 27\, g_3^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24}$$

folgt

$$Q'^3 - R'^2 = 1728\, q^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24}.$$

Setzt man q statt q^2, so folgt die Behauptung.

Hilfssatz 14. *Es gilt*

$$\sigma_{11}(n) - \tau(n) \equiv 0 \pmod{691}.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 12 ist

$$691 + 65\,520 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n)\, q^n = 441\,(Q^3 - R^2) + 691\, R^2.$$

Eine Anwendung des Hilfssatzes 13 liefert ferner

$$1008 \sum_{n=1}^{\infty} \left(65\,\sigma_{11}(n) - 756\,\tau(n)\right) q^n = 691\,(R^2 - 1),$$

d. h.

$$65\,520 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_{11}(n) - \tau(n)\right) q^n = 691\left(R^2 - 1 + 1008 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n\right).$$

Da der Koeffizient von q^n in der Reihenentwicklung der Funktion $R^2 - 1$ natürlich ganzzahlig ist, ist also durch Koeffizientenvergleichung

$$65\,520\left(\sigma_{11}(n) - \tau(n)\right) \equiv 0 \pmod{691},$$

d. h.

$$\sigma_{11}(n) - \tau(n) \equiv 0 \pmod{691},$$

womit der Hilfssatz 14 bewiesen ist.

Nunmehr können wir den folgenden Hauptsatz 3 beweisen:

Hauptsatz 3. *Es sei*

$$t_n = 0, \quad \textit{wenn} \quad 691 \mid \tau(n),$$
$$t_n = 1, \quad \textit{wenn} \quad 691 \nmid \tau(n).$$

Dann ist bei gegen ∞ *wachsendem* x

$$\sum_{n=1}^{x} t_n = O\left(\frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{690}}}\right) = o(x).$$

---

[13]) Vgl. z. B. J. Tannery u. J. Molk, Théorie des fonctions elliptiques 2 (1896), S. 9. Bekanntlich ist

$$g_2 = 20\, k_1, \qquad g_3 = 28\, k_2.$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes 11 besagt der Hilfssatz 14, daß bei jedem n

$$t_n = h_{n,691,11}$$

ist. Daraus folgt in Verbindung mit Hauptsatz 2 schließlich die Behauptung.

Zum Schluß sei noch eine weitere Ramanujansche Behauptung angeführt. Der Hauptsatz 3 besagt, daß für fast alles n

$$t_n = 0$$

ist. Trotzdem hat Ramanujan für

$$1 \leqq n \leqq 5000 \qquad (n \neq 1381)$$

gefunden, daß $t_n = 1$ ist.

(Eingegangen am 20 Oktober 1934.)

Bemerkungen zur Theorie der voll- bzw. mehrfach-monotonen Funktionen.

Von

Gerhard Grüss in Berlin.

I. Zur Analytizität der vollmonotonen Funktionen.

Der Begriff der vollmonotonen Funktion ist, wie es scheint, zuerst von S. Bernstein in seiner Arbeit „Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle“[1]) eingeführt worden; er beweist dort den für die Theorie der vollmonotonen Funktionen grundlegenden Satz, daß eine Funktion $f(x)$ dann gewiß in eine Taylorsche Reihe mit dem Konvergenzradius R entwickelt werden kann, wenn bei beliebigem $\delta > 0$ ihre sämtlichen Differenzen

$$\Delta^1 f(x) = f(x+\delta) - f(x)$$
$$\Delta^2 f(x) = f(x+2\delta) - 2f(x+\delta) + f(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

im Intervall $0 \ldots R$ nicht-negativ sind. Diese Funktionen nennt Bernstein dann später vollmonoton (absolument monotone)[2]).

Der erste Beweis jenes Hauptsatzes beruht auf einer Abschätzung des Restgliedes der Newtonschen Interpolationsformel in Verbindung mit anderen Kriterien für die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Potenzreihe. In den leçons ... zeigt Bernstein zunächst, daß eine vollmonotone Funktion beliebig oft differenzierbar ist, und geht dann von der Taylorschen Formel zur Taylorschen Reihe über. In den folgenden Zeilen soll nun lediglich eine vielleicht nicht uninteressante Modifikation dieses zweiten Beweises des Hauptsatzes mitgeteilt werden, die auf einer — wie es scheint, bisher nicht beachteten — charakteristischen Eigenschaft der vollmonotonen Funktionen beruht. Zur Weiterentwicklung der Theorie[3]) kann die vorliegende Note also nur wenig beitragen.

---

[1]) Math. Ann. 75 (1914), S. 449 ff.

[2]) Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, par S. Bernstein, Paris 1926.

[3]) Vgl. F. Hausdorff: Summationsmethoden und Momentenfolgen I und II. Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 74 bzw. 280 ff. S. Bernstein: Sur les fonctions absolument monotones. Acta Math. 52 (1928), S. 1 ff.

Ich gehe von folgender *Definition* aus:

Eine im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ reelle, eindeutige und stetige Funktion soll vollmonoton heißen, wenn ihr zu den äquidistanten Abszissen $x_\lambda = \frac{\lambda}{n}$ ($n > 0$, ganz, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$) gehöriges Differenzenschema

$$\begin{array}{lll} f(0) = \Delta^0 f_0 & & \\ & \Delta^1 f_0 & \\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \Delta^0 f_1 & & \Delta^2 f_0 \\ & \Delta^1 f_1 & \\ f\left(\frac{2}{n}\right) = \Delta^0 f_2 & & \Delta^2 f_1 \\ & \Delta^1 f_2 & \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \Delta^0 f_{n-1} & & \Delta^2 f_{n-2} \\ & \Delta^1 f_{n-1} & \\ f(1) = \Delta^0 f_n & & \end{array} \qquad \Delta^n f_0$$

bei beliebigem n definit ist, also etwa aus nur nicht-negativen Zahlen besteht.

Da $\Delta^{\lambda-1} f_\nu = \Delta^\lambda f_{\nu-1} + \Delta^{\lambda-1} f_{\nu-1}$ $(\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda + \nu \leqq n+1)$ gilt, ist $f(x)$ dann und nur dann vollmonoton, wenn für jede natürliche Zahl n und $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\Delta^\lambda f_0 \geqq 0$$

erfüllt ist. Die obige Definition ist der Bernsteinschen gleichwertig. Hier wird zwar vorausgesetzt, daß $f(x)$ stetig sei, dafür beschränkt sich die Monotonieforderung auf die Funktionswerte in den rationalen Punkten des Grundbereiches.

Die vollmonotonen Funktionen lassen sich nun im Intervall $0 \ldots 1$ gleichmäßig durch Polynome annähern, deren Koeffizienten sämtlich nicht negativ sind, und umgekehrt ist jede für $0 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion, die sich in dieser Weise approximieren läßt, vollmonoton.

Um die erste Behauptung zu beweisen, braucht man die vollmonotone Funktion $f(x)$ nur durch die Bernsteinschen Polynome

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f\left(\frac{\nu}{n}\right) x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$$

anzunähern; ihre Koeffizienten sind, wie man leicht nachrechnet,

$$a_\nu = \binom{n}{\nu} \Delta^\nu f_0.$$

Daß auch die Umkehrung richtig ist, folgt so: Nach Voraussetzung gibt es zu der vorgegebenen Funktion $f(x)$ bei beliebigem $\alpha > 0$ stets ein Polynom $g(x) = \sum_0^N c_\nu x^\nu$ derart, daß alle $c_\nu \geqq 0$ sind und daß für $0 \leqq x \leqq 1$ $|f(x) - g(x)| < \alpha$ ist. Aus der letzten Ungleichung folgt sofort $|\Delta^\lambda f(x) - \Delta^\lambda g(x)| < 2^\lambda \alpha$. Ferner ist die mit einer beliebigen positiven Spanne δ

gebildete λ-te Differenz $\Delta^\lambda g(x) = \sum c_\nu \Delta^\lambda x^\nu \geqq 0$, weil sowohl alle c_ν als auch alle Differenzen $\Delta^\lambda x^\nu$ nicht-negativ sind, wie man leicht einsieht. Wäre nun $f(x)$ nicht vollmonoton, dann würde für eine bestimmte Einteilung des Bereiches $0 \ldots 1$ etwa in n gleiche Teile und für eine gewisse Nummer λ $\Delta^\lambda f(0) = -k^2 < 0$ sein, also $|\Delta^\lambda f(0) - \Delta^\lambda g(0)| \geqq k^2$, wie auch das Polynom $g(x)$ gewählt wird. Man braucht nun bloß $\alpha < k^2 2^{-(\lambda+1)}$ anzunehmen und ein passendes Polynom $g(x)$ zu bestimmen, um die Ungleichheit $|\Delta^\lambda f(0) - \Delta^\lambda g(0)| < k^2/2$, also einen Widerspruch zu erhalten. Es gilt also der

Satz: *Eine für $0 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion ist dann und nur dann vollmonoton, wenn sie im ganzen Intervall gleichmäßig durch ein Polynom mit nicht-negativen Koeffizienten beliebig nahe approximiert werden kann.*

Von dieser Eigenschaft der vollmonotonen Funktionen, auf die ich in einem anderen Zusammenhang[4]) ohne Kenntnis der Bernsteinschen Arbeiten gestoßen bin, wird nun im folgenden dauernd Gebrauch gemacht werden.

Zunächst folgt: Eine vollmonotone Funktion ist konvex, d. h. für irgend zwei Abszissen $0 \leqq x_1 \leqq x_2 = x_1 + 2h \leqq 1$ gilt

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(x_1 + h) \leqq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] = \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_1 + 2h)].$$

Wäre nämlich für zwei passend gewählte Zahlen x_1 und h

$$f(x_1 + 2h) - 2f(x_1 + h) + f(x_1) = \underset{h}{\Delta^2} f(x_1) = -k^2 < 0,$$

dann ließe sich ein Polynom $g(x)$ mit nicht-negativen Vorzahlen so bestimmen, daß für $0 \leqq x \leqq 1$

$$|f(x) - g(x)| < k^2/8, \qquad \text{also} \qquad |\underset{h}{\Delta^2} f(x) - \underset{h}{\Delta^2} g(x)| < k^2/2$$

wäre. Andererseits ist derselbe Absolutwert gleich

$$|-k^2 - \underset{h}{\Delta^2} g(x_1)| > k^2 \quad \text{wegen} \quad \underset{h}{\Delta^2} g(x_1) \geqq 0.$$

Die Annahme, $f(x)$ sei nicht konvex, führt daher zu einem Widerspruch.

Als konvexe Funktion hat $f(x)$ in jedem inneren Punkte des Intervalls $0 \ldots 1$ eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung, d. h. es existieren die Grenzwerte

$$\left.\begin{aligned} \lim_{h \to +0} \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] &= f'_+(x) \\ \lim_{h \to +0} \frac{-1}{h}[f(x-h) - f(x)] &= f'_-(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < 1,$$

[4]) Vgl. G. Grüss: Über das Maximum des absoluten Betrages .... Math. Zeitschr. 39 (1934), S. 215 ff.

und zwar ist $f'_+(x) \geqq f'_-(x)$. Wenn das Gleichheitszeichen gilt, wenn also

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = 0$$

ist, hat $f(x)$ an der betreffenden Stelle x eine Ableitung schlechthin. Der Beweis für die Differentiierbarkeit der vollmonotonen Funktionen stützt sich nun auf folgenden

Hilfssatz: *Wenn die vollmonotone Funktion $f(x)$ an der Stelle a $(0 < a < 1)$ nicht differentiierbar ist, so existiert die Ableitung auch für keine rechts von a liegende Abszisse.*

Beweis: Angenommen, es sei

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} [f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)] = A > 0, \tag{1}$$

aber für einen bestimmten Wert $\xi\,(0 < \xi < 1 - a)$

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} [f(a+\xi+h) - 2f(a+\xi) + f(a+\xi-h)] = 0, \tag{2}$$

d. h. es existiere $f'(x)$ nicht an der Stelle $x = a$, wohl aber bei $x = a + \xi > a$. Setzt man dann zur Abkürzung

$$\varphi(\xi, h) = f(a+\xi+h) - 2f(a+\xi) + f(a+\xi-h),$$

dann folgt aus Gleichung (1)

$$h(A - \varepsilon) < \varphi(0, h) < h(A + \varepsilon)$$

bei beliebigem $\varepsilon > 0$, wenn nur $h < \omega_1(\varepsilon)$ ist, und aus Gleichung (2)

$$-\varepsilon h < \varphi(\xi, h) < h\varepsilon \qquad \text{für } h < \omega_2(\varepsilon),$$

also schließlich

$$\varphi(\xi, h) - \varphi(0, h) < h(2\varepsilon - A) < 0,$$

wenn nur ε, also $h > 0$ genügend klein angenommen wird. Diese Ungleichheit widerspricht nun aber der Voraussetzung, daß $f(x)$ vollmonoton sei. Man bestimme nämlich ein Polynom $g(x)$ mit nicht-negativen Vorzahlen derart, daß $|f(x) - g(x)| < \frac{k^2}{16}$ ist, wenn für die wohlbestimmten Zahlen a, ξ, h $\varphi(\xi, h) - \varphi(0, h) = -k^2$ gilt. Dann erhält man einerseits

$$|\varphi(\xi, h) - \varphi(0, h) - \{g(a+\xi+h) - 2g(a+\xi) + g(a+\xi-h) - g(a+h) + 2g(a) - g(a-h)\}| < k^2/2,$$

andererseits ist derselbe Absolutwert $\geqq k^2$, weil der in der Klammer $\{\ldots\}$ stehende Ausdruck offensichtlich nicht negativ ist[5]).

---

[5]) Setzt man $\{\ldots\} = \gamma(\xi)$, dann ist $\gamma(0) = 0$ und $d\gamma/d\xi = \overset{2}{\underset{h}{\Delta}} g'(a+\xi-h) \geqq 0$ für $h > 0$ als zweite Differenz eines Polynoms mit nicht-negativen Koeffizienten.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Er sagt aus, daß für eine vollmonotone Funktion die Nicht-Existenz der Ableitung in einem Punkt a die Nicht-Differentiierbarkeit in dem Intervall $a \leqq x \leqq 1$ nach sich zieht. Da nun aber nach Lebesgue eine im Intervall $0 \ldots 1$ monotone Funktion in jedem Punkt eine Ableitung besitzt, höchstens mit Ausnahme der Punkte einer Menge vom Maß Null, folgt sofort:

Eine vollmonotone Funktion $f(x)$ ist in jedem inneren Punkt des Intervalls $0 \ldots 1$ differentiierbar.

Nun ist offensichtlich $\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] \geqq 0$. Ferner ist bekannt, daß der Differenzenquotient einer konvexen Funktion monoton mit dem Abszissenzuwachs abnimmt. Daraus folgt erstens, daß für $0 < x < 1$ $f'(x) \geqq 0$ gilt, zweitens, daß bei $x = 0$ die rechtsseitige Ableitung $f'_+(0)$ existiert und nicht negativ ist; sie wird gleich $f'(0)$ gesetzt. Daß bei $x = 1$ die linksseitige Ableitung nicht zu existieren braucht, zeigt das Beispiel $y = \arcsin x$.

Die Ableitung einer vollmonotonen Funktion ist nun im Intervall $0 \leqq x \leqq \xi < 1$ wieder vollmonoton. Zunächst ist $f'(x)$ für $0 < \xi' \leqq x \leqq \xi < 1$ stetig; denn als Ableitung läßt $f'(x)$ keinen Zwischenwert aus und als gemeinsamer Wert der vorderen und hinteren Ableitung einer konvexen Funktion wächst $f'(x)$ monoton. Man sieht aber auch leicht ein, daß $f'_+(0) = f'(0) = \lim_{x \to +0} f'(x)$ gilt, d. h. daß $f'(x)$ auch bei $x = 0$ stetig ist[6]). Weiter gilt für eine beliebig feine gleichmäßige Einteilung des Intervalls $0 \ldots \xi$

$$\Delta^\lambda f'(0) = \Delta^\lambda \lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \{\Delta^\lambda f(h) - \Delta^\lambda f(0)\} \geqq 0,$$

weil für $h > 0$ $\Delta^\lambda f(h) - \Delta^\lambda f(0) \geqq 0$ ist, und diese letzte Ungleichheit läßt sich wieder sehr leicht dadurch beweisen, daß man $f(x)$ durch ein Polynom $g(x)$ mit nicht-negativen Koeffizienten annähert, für das gewiß $\Delta^\lambda g(h) - \Delta^\lambda g(0) \geqq 0$ gilt. Also ist die Ableitung einer vollmonotonen Funktion wieder vollmonoton, und damit ist schon bewiesen, daß eine vollmonotone Funktion für jedes x: $0 \leqq x \leqq \xi < 1$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt, die sämtlich nicht-negativ sind. Daß sie überdies eine Potenzreihenentwicklung zuläßt, wird dann am einfachsten durch Abschätzung des Restgliedes der Taylorschen Formel bewiesen, wie es Bernstein a. a. O. (Fußnote 2) gezeigt hat.

---

[6]) $f'_+(0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} f'(\vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1; \quad f'(\vartheta h) \leqq f'(h).$

II. Einige Bemerkungen über mehrfach-monotone Funktionen.

Eine im Intervall $0 \ldots 1$ stetige Funktion $f(x)$ soll p-fach monoton heißen, wenn in ihrem zu den äquidistanten Abszissen λ/n ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots n$; $n \geqq p$ ganz) gehörigen Differenzenschema die ersten p Spalten nur nicht-negative Zahlen enthalten, wenn also

$$\underset{1/n}{\Delta^\lambda} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \geqq 0 \quad \text{gilt für} \quad \lambda = 1, 2, \ldots p; \quad \nu + \lambda \leqq n$$

wie auch $n \geqq p$ gewählt sein mag.

Bernstein hat durch Schluß von p auf $p+1$ gezeigt[7]), daß eine p-fach monotone Funktion, falls $p \geqq 2$ ist, $(p-2)$mal stetig differentiierbar ist, und daß $f^{(p-2)}(x)$ in jedem Punkt eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung besitzt. Damit ist dann zugleich bewiesen, daß eine vollmonotone Funktion beliebig oft differentiierbar ist.

Wie man leicht einsieht, läßt sich die in Rede stehende Eigenschaft der p-fach monotonen Funktionen mit Hilfe derselben Überlegungen herleiten, wie sie dem obigen Beweis des Satzes über vollmonotone Funktionen zugrunde liegen: man zeigt, daß eine p-fach monotone Funktion ($p \geqq 2$) konvex ist, und im Fall $p \geqq 3$, daß die Funktion $f(x)$ in keinem Punkt des Intervalls $a \leqq x \leqq 1$ differentiierbar sein kann, wenn sie bei $x = a$ $(0 < a < 1)$ keine Ableitung besitzt. Daraus folgt unmittelbar, daß $f(x)$ für $0 \leqq x \leqq \xi < 1$ differentiierbar, und weiter, daß $f'(x)$ stetig ist. Endlich findet man, daß die Ableitung einer p-fach monotonen Funktion $(p-1)$-fach monoton ist, und damit hat man das Bernsteinsche Ergebnis erhalten. Allerdings wird der hier nur angedeutete Beweis dadurch weitläufiger als im Fall der vollmonotonen Funktionen, daß man jetzt auf das Hilfsmittel der Approximation durch Polynome mit nicht-negativen Vorzahlen verzichten muß.

Wohl das einfachste Beispiel einer im Intervall $0 \ldots 1$ genau $(p+1)$-fach monotonen Funktion dürfte das folgende sein:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq \frac{1}{2}\ ^{8}) \\ (x - \frac{1}{2})^p & \frac{1}{2} \leqq x \end{cases}.$$

Daß diese Funktion $(p-1)$mal stetig differentiierbar ist, und daß ihre $(p-1)$ te Ableitung

$$f^{(p-1)}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq \frac{1}{2} \\ p!\,(x - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leqq x \end{cases}$$

---

[7]) A. a. O. Fußnote 2. — Allerdings setzt Bernstein nicht voraus, daß $f(x)$ stetig sei; dafür wird aber gefordert, daß für $\lambda = 1, 2, \ldots p$ $\underset{h}{\Delta^\lambda} f(x) \geqq 0$ sei bei beliebiger Spanne h und beliebigem x, sofern nur alle in den verschiedenen Differenzen auftretenden Argumente dem Bereich $0 \ldots 1$ angehören.

[8]) Daß $f(x)$ auch außerhalb des Bereiches $0 \ldots 1$ erklärt wird, ist unwesentlich und dient nur zur Vereinfachung der Rechnung.

in jedem Punkt eine vordere und hintere Ableitung besitzt, ist klar. Dagegen ist es nicht selbstverständlich, daß $f(x)$ *genau* $(p+1)$-fach monoton ist. Vielmehr erfordert der Nachweis, daß zwar alle Differenzen $\Delta_h^\lambda f\left(\frac{\nu}{n}\right)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, p+1$ nicht negativ sind, daß aber unter den $(p+2)$-ten Differenzen $\Delta_h^{p+2} f\left(\frac{\nu}{n}\right)$ gewiß mindestens eine negativ ist, eine ziemlich umständliche Rechnung.

Allerdings sieht man sofort, daß die $p-1$ ersten Differenzen gewiß nicht negativ sind; denn es gilt ja bei beliebiger Spanne h und beliebiger Abszisse x für $\lambda = 1, 2, \ldots, p-1$

$$\Delta_h^\lambda f(x) = h^\lambda f^{(\lambda)}(x + \vartheta_\lambda \lambda h) \quad 0 < \vartheta_\lambda < 1.$$

Um auch die Vorzeichen der Differenzen der Ordnung p, $p+1$ und $p+2$ zu untersuchen, betrachte man zunächst eine Einteilung des Intervalles $0 \ldots 1$ in $n = 2n'$ gleiche Teile. Dann ist, wenn $1/n = h$,

$$\frac{\nu}{n} = \frac{1}{2} + \frac{s}{n}, \quad \text{also} \quad \nu - n' = s \tag{3}$$

gesetzt wird,

$$\Delta_h^\lambda f\left(\frac{\nu}{n}\right) = \sum_{\sigma=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\sigma} \binom{\lambda}{\sigma} f\left(\frac{\nu+\sigma}{n}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \nu + \lambda \leqq n' = n/2 \quad \text{oder} \quad s \leqq -\lambda \\ \displaystyle\sum_{\sigma=n'-\nu}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\sigma} \binom{\lambda}{\sigma} \left(\frac{\nu+\sigma}{n} - \frac{1}{2}\right)^p = h^p \sum_{\sigma=-s}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\sigma} \binom{\lambda}{\sigma} (s+\sigma)^\nu & \\ \qquad \text{für} \quad n' - \lambda \leqq \nu \leqq n' \quad \text{oder} \quad -\lambda \leqq s \leqq 0 & \\ \displaystyle\sum_{\sigma=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\sigma} \binom{\lambda}{\sigma} \left(\frac{\nu+\sigma}{n} - \frac{1}{2}\right)^p = h^p \sum_{\sigma=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\sigma} \binom{\lambda}{\sigma} (s+\sigma)^\nu & \\ \qquad \text{für} \quad n' \leqq \nu \quad \text{oder} \quad 0 \leqq s. & \end{cases}$$

Setzt man noch

$$s + \lambda = \mu \quad \text{und} \quad \lambda - \sigma = \varrho, \tag{4}$$

so erhält man

$$\Delta_h^\lambda f\left(\frac{\nu}{n}\right) = \Delta_h^\lambda f\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{n}\right) = \Delta_h^\lambda f\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu-\lambda}{n}\right) \tag{5}$$

$$= \begin{cases} 0 & \mu \leqq 0 \\ h^p \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\mu} (-1)^\varrho \binom{\lambda}{\varrho} (\mu-\varrho)^p & 0 \leqq \mu \leqq \lambda \\ h^p \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\lambda} (-1)^\varrho \binom{\lambda}{\varrho} (\mu-\varrho)^p & \lambda \leqq \mu. \end{cases}$$

Nun möge zuerst die $(p+1)$-te Differenz betrachtet werden:

$$(6)\qquad \Delta^{p+1} f\left(\frac{\nu}{n}\right) = \Delta^{p+1} f\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu - p - 1}{n}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \mu \leqq 0 \\ h^p \sum_{\varrho=0}^{\mu} (-1)^\varrho \binom{p+1}{\varrho} (\mu - \varrho)^p & \mu \geqq 0. \end{cases}$$

Sie ist also, wie ja behauptet wird, nicht negativ, wenn die Zahlen

$$S_{\mu,p} = \sum_{\varrho=0}^{\mu} (-1)^\varrho \binom{p+1}{\varrho} (\mu - \varrho)^p \qquad \text{für } \mu, p = 1, 2, \ldots$$

größer oder gleich Null sind.

Zunächst gilt, wie man leicht nachrechnet, für $p = 1, 2, \ldots$

$$(7)\qquad S_{1,p} = S_{p,p} = 1$$

und weiter für $\mu \leqq p+1$

$$S_{\mu,p+1} - \mu S_{\mu,p} = \sum_{\varrho=0}^{\mu} (-1)^\varrho (\mu - \varrho)^p \left\{ \binom{p+2}{\varrho} (\mu - p) - \mu \binom{p+1}{\varrho} \right\}$$

$$= (\mu - p - 2) \sum_{\varrho=1}^{\mu} (-1)^\varrho (\mu - \varrho)^p \binom{p+1}{\varrho} \frac{\varrho}{p+2-\varrho}$$

$$= (p + 2 - \mu) \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} (-1)^\varrho (\mu - 1 - \varrho)^p \binom{p+1}{\varrho},$$

also die Rekursionsformel

$$(8)\qquad S_{\mu,p+1} = \mu \cdot S_{\mu,p} + (p + 2 - \mu) S_{\mu-1,p}.$$

Aus Gleichung (7) und (8) folgt sofort

$$S_{\mu,p} > 0 \quad \text{für} \quad p = \mu, \mu + 1, \ldots$$

Daß $S_{\mu,p}$ auch für $p < \mu$ nicht negativ ist, läßt sich leicht ohne Rechnung aus Gleichung (6) folgern. Denn für $\mu > p$ stellt $h^p S_{\mu,p}$ die $(p+1)$-te Differenz der Funktion $f(x)$ an der Stelle $\frac{\nu}{n} = \frac{1}{2} + \frac{\mu - p - 1}{n} \geqq \frac{1}{2}$ dar, und da $f(x)$ rechts von $x = 1/2$ ein Polynom vom Grade p ist, muß die $(p+1)$-te Differenz gewiß verschwinden. Es ist also

$$(9)\qquad S_{\mu,p} = 0 \quad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad \mu > p.$$

Übrigens gilt auch[9])

$$u_p(x) = \sum_{\mu} S_{\mu,p} x^\mu = (1-x)^{p+1} (1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + \ldots),$$

und da $u_p(x)$, wie sich unabhängig von der Rekursionsformel (8) beweisen läßt, ein Polynom p-ten Grades ist, erhält man wieder Gleichung (9).

[9]) Vgl. z. B. G. Polya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 1, S. 7, Aufg. 46.

Damit ist gezeigt, daß $\Delta^{p+1} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \geqq 0$ ist bei jeder Einteilung des Grundbereiches $0 \ldots 1$ in eine gerade Anzahl $n = 2n'$ gleicher Teile. Ist nun weiter $n = 2m + 1$ ungerade, so betrachte man neben den Differenzen $\Delta^{p+1} f\left(\frac{\nu}{2m+1}\right)$ mit der Spanne $h = 1 : (2m + 1)$ die Differenzen $\Delta^{p+1} f\left(\frac{\nu}{4m+2}\right)$ mit der Spanne $h' = h/2$, die nach dem Vorhergehenden gewiß nicht negativ sind. Nun gilt aber, wie man leicht einsieht,

$$\underset{2h'}{\Delta^{\lambda}} f(x) = \sum_{\varrho=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\varrho} \underset{h'}{\Delta^{\lambda}} f(x + \varrho h'),$$

und damit ist gezeigt, daß auch bei ungeraden n, also allgemein die $(p+1)$-ten Differenzen $\Delta^{p+1} f\left(\frac{\nu}{n}\right)$ nicht negativ sind.

Endlich die Differenzen p-ter Ordnung! Um zu beweisen, daß $\Delta^{p} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \geqq 0$ gilt für $\nu = 0, 1, \ldots,$ genügt es wegen

$$\Delta^{p+1} f\left(\frac{\nu}{n}\right) = \Delta^{p} f\left(\frac{\nu+1}{n}\right) - \Delta^{p} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \geqq 0$$

zu zeigen, daß für irgend ein $\nu_0 \leqq 0$ $\Delta^{p} f\left(\frac{\nu_0}{n}\right) \geqq 0$ ist. Dazu setze man in Gleichung (5) $\lambda = p$ und

$$\nu_0 = \begin{cases} 0 \\ n' - p \end{cases}, \text{ falls } \begin{cases} n' \geqq p \\ n' < p \end{cases} \text{ ist.}$$

Im ersten Fall ergibt sich nach Gleichung (3) und (4) $\mu \leqq 0$, im zweiten $\mu = 0$, in beiden Fällen liefert Gleichung (5) $\Delta^{p} f\left(\frac{\nu_0}{n}\right) = 0$ bei $\nu_0 \leqq 0$. Also ist für $n = 2n'$ $\Delta^{p} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \geqq 0$. Daß dieselbe Ungleichung auch für ungerades n richtig ist, schließt man genau so wie oben.

Damit ist bewiesen, daß $f(x) = \begin{cases} 0 \\ (x - \frac{1}{2})^p \end{cases}$ im Intervall $0 \ldots 1$ nicht-negative Differenzen bis zur $(p+1)$-ten Ordnung einschließlich hat. Daß auch $\Delta^{p+2} f(x)$ überall positiv oder null ist, schließt der Bernsteinsche Satz aus, da $f^{(p-1)}(x)$ bei $x = 1/2$ nicht differentiierbar ist. In der Tat ist nach Gleichung (5) für $\lambda = p + 2$, $\nu = n' - 1 = \frac{n}{2} - 1$, also $\mu = p + 1$

$$\Delta^{p+2} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^p} \sum_{\varrho=0}^{p+1} (-1)^{\varrho} \binom{p+2}{\varrho} (p + 1 - \varrho)^p = \frac{-1}{n^p}.$$

Denn es ist

$$\sum_{\varrho=0}^{p+1} \ldots = \sum_{\varrho=0}^{p+1} (-1)^{\varrho} \binom{p+2}{\varrho} \sum_{\tau=0}^{p} (-1)^{\tau} \binom{p}{\tau} (\varrho+1)^{\tau} (p+2)^{p-\tau}$$

$$= \sum_{\tau=0}^{p} (-1)^{\tau} \binom{p}{\tau} (p+2)^{p-\tau} \cdot A_{\tau}$$

und

$$A_{\tau} = \sum_{\varrho=0}^{p+1} (-1)^{\varrho} \binom{p+2}{\varrho} (\varrho+1)^{\tau} = \sum_{\varrho=0}^{p+1} (-1)^{\varrho} (\varrho+1)^{\tau} \left\{ \binom{p+3}{\varrho+1} - \binom{p+2}{\varrho+1} \right\}$$

$$= -\sum_{\varrho=1}^{p+2} (-1)^{\varrho} \varrho^{\tau} \left\{ \binom{p+3}{\varrho} - \binom{p+2}{\varrho} \right\} = (-1)^{p+3} (p+3)^{\tau}$$

für $\tau = 0, 1, 2, \ldots p$. also

$$n^{p} \Delta^{p+2} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = -\sum_{\tau=0}^{p} (-1)^{p-\tau} \binom{p}{\tau} (p+2)^{p-\tau} (p+3)^{\tau} = -1,$$

wie behauptet wurde.

(Eingegangen am 22. Oktober 1934.)

Über einige Ungleichungen von Herrn G. Grüss.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Auf S. 215—226 des Bd. 39 dieser Zeitschrift steht eine Arbeit von G. Grüss: *Über das Maximum des absoluten Betrages von*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx.$$

Seine beiden Hauptergebnisse lauten:

$f(x)$ und $g(x)$ seien für $0 \leqq x \leqq 1$ reell und eigentlich integrabel im Riemannschen Sinn; man setze

$$F = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad G = \int_0^1 g(x)\,dx,$$

$$D(f,g) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx - FG,$$

also

$$D(f,g) = \int_0^1 (f(x)-F)\,(g(x)-G)\,dx,$$

so daß

$$(1) \qquad D^2(f,g) \leqq \int_0^1 (f(x)-F)^2\,dx \int_0^1 (g(x)-G)^2\,dx = D(f,f)\,D(g,g);$$

es sei

$$\varphi \leqq f(x) \leqq \Phi,\ \gamma \leqq g(x) \leqq \Gamma \text{ für } 0 \leqq x \leqq 1.$$

1. *Dann ist*

$$(2) \qquad D(f,f) \leqq (\Phi - F)\,(F-\varphi),$$

also nach (1)

$$(3) \qquad |D(f,g)| \leqq \sqrt{(\Phi-F)\,(F-\varphi)\,(\Gamma-G)\,(G-\gamma)} \leqq \tfrac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma).$$

($\frac{1}{4}$ ist in (3) durch keine kleinere Konstante ersetzbar, wegen

$$D(\operatorname{sign}(2x-1),\ \operatorname{sign}(2x-1)) = 1.)$$

Hierzu bemerke ich nur, daß (2) unmittelbar aus der Identität

$$D(f,f) = (\Phi-F)\,(F-\varphi) - \int_0^1 (\Phi - f(x))\,(f(x)-\varphi)\,dx$$

folgt.

2. *Wenn für jedes ganze* $n > 0$ *die durch*

$$A_\nu = f\left(\frac{\nu}{n}\right) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda} p_\lambda; \quad \nu = 0, 1, \ldots, n$$

definierten $p_0, p_1, \ldots, p_n$ *sämtlich* $\geqq 0$ *sind und* $f(x)$ *stetig ist, ist*

$$D(f, f) \leqq \tfrac{4}{45}(\Phi - \varphi)^2, \tag{4}$$

also, wenn $g(x)$ *dieselben Voraussetzungen wie* $f(x)$ *erfüllt, nach* (1)

$$|D(f, g)| \leqq \tfrac{4}{45}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma). \tag{5}$$

($\frac{4}{45}$ ist in (4), also in (5) durch keine kleinere Konstante ersetzbar, wegen

$$D(x^2, x^2) = \tfrac{4}{45}.)$$

Der Grüsssche Beweis von (4) ist sehr interessant; er benutzt den S. Bernsteinschen Beweis des Weierstraßschen Satzes über Approximation einer stetigen Funktion durch ein Polynom und fügt die hübsche Feststellung hinzu, daß unter der Annahme $p_\lambda \geqq 0$ die Koeffizienten der Bernsteinschen Polynome $\geqq 0$ sind.

Nachdem ich so (4) aus Herrn Grüss' Abhandlung gelernt habe, finde ich allerdings, daß die genannten beiden Hilfsmittel entbehrlich sind; (4) folgt unmittelbar aus einem entsprechend aufzustellenden Hilfssatz über endliche Summen. Übrigens fällt so auch die Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$ fort, und ich beweise (4) folgendermaßen.

n, λ, μ, ν bezeichnen ganze Zahlen.

Hilfssatz 1 (Grüss): *Für* $\lambda \geqq 0$. $\mu \geqq 0$ *ist*

$$\psi(\lambda, \mu) = \frac{1}{\lambda + \mu + 1} - \frac{1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)} \begin{cases} = 0, & \text{falls } \lambda\mu = 0, \\ \leqq \frac{4}{45}, & \text{falls } \lambda\mu > 0. \end{cases}$$

Beweis: O. B. d. A. sei $\lambda\mu > 0$ und, wegen

$$\psi(1, 1) = \psi(1, 2) = \psi(2, 1) = \tfrac{1}{12},$$

$$j = \lambda + \mu + 2 \geqq 6.$$

Dann ist

$$\psi(\lambda, \mu) \leqq \frac{1}{j - 1} - \frac{4}{j^2},$$

also, da die rechte Seite für $j \geqq 6$ fällt,

$$\psi(\lambda, \mu) \leqq \tfrac{4}{45}.$$

Hilfssatz 2: *Für* $n > 0$, $0 \leqq \lambda \leqq n$, $0 \leqq \mu \leqq n$ *ist*

$$\omega(n, \lambda, \mu) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{\nu}{\lambda}\binom{\nu}{\mu} - \frac{1}{n^2}\binom{n+1}{\lambda+1}\binom{n+1}{\mu+1} < \psi(\lambda, \mu)\binom{n}{\lambda}\binom{n}{\mu}.$$

Beweis:

$$\binom{n}{\lambda} n^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda!} \prod_{i=0}^{\lambda-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

fällt nicht bei wachsendem $n \geqq \lambda$. Also

$$\binom{\nu}{\lambda} \leqq \nu^\lambda \binom{n}{\lambda} n^{-\lambda}, \quad \binom{\nu}{\mu} \leqq \nu^\mu \binom{n}{\mu} n^{-\mu},$$

$$\omega(n, \lambda, \mu) \leqq n^{-\lambda-\mu-1} \binom{n}{\lambda}\binom{n}{\mu} \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu^{\lambda+\mu} - \binom{n}{\lambda}\binom{n}{\mu}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{(\lambda+1)(\mu+1)}$$

$$< \psi(\lambda, \mu) \binom{n}{\lambda}\binom{n}{\mu}.$$

Satz: *Es sei* $n > 0$ *und für* $0 \leqq \nu \leqq n$

$$A_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda} p_\lambda, \quad p_\lambda \geqq 0.$$

Dann ist

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu\right)^2 \leqq \tfrac{4}{45}(A_n - A_0)^2.$$

Gelten also die Annahmen bei jedem $n > 0$ *für*

$$A_\nu = f\left(\frac{\nu}{n}\right),$$

so ist $(n \to \infty)$

$$D(f, f) \leqq \tfrac{4}{45}(f(1) - f(0))^2.$$

Beweis:

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} \binom{\nu}{\lambda}\binom{\nu}{\mu} p_\lambda p_\mu - \frac{1}{n^2} \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} \binom{n+1}{\lambda+1}\binom{n+1}{\mu+1} p_\lambda p_\mu$$

$$= \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} \omega(n, \lambda, \mu) p_\lambda p_\mu \leqq \tfrac{4}{45} \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \binom{n}{\lambda}\binom{n}{\mu} p_\lambda p_\mu = \tfrac{4}{45}(A_n - A_0)^2.$$

Berlin, den 29. Oktober 1934.

(Eingegangen am 31. Oktober 1934.)

Untersuchungen über einen van der Corputschen Satz.

Von

V. Jarník in Prag und E. Landau in Berlin.

§ 1.

Einleitung.

Man verdankt Herrn van der Corput[1]) folgenden

Satz. *Es gibt eine Weltkonstante $P > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $a < b$ und ist*

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ reell,} \\ f'(x) \text{ vorhanden}^2) \text{ und monoton nicht fallend,} \\ 0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle^3),$$

so ist

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqq P.$$

Wir werden unter anderem den kleinsten zulässigen Wert von P bestimmen und noch genauer (genauer wegen $<$ statt $\leqq$) folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es sei $a < b$; es sei*

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ reell,} \\ f'(x) \text{ vorhanden}^2) \text{ und monoton nicht fallend,} \\ 0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle;$$

dann ist

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}},$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung darf durch keine kleinere Weltkonstante ersetzt werden.

Ändert man die Voraussetzungen, so bekommt man andere Sätze, von welchen wir folgende explizite anführen:

---

[1]) J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Annalen 84 (1921), S. 53–79; insbes. S. 58, Satz 1.

[2]) Für $x = a$ wird die rechtsseitige, für $x = b$ die linksseitige Ableitung gemeint.

[3]) $\langle a, b\rangle$ bzw. (a, b) bedeutet die Menge aller x mit $a \leqq x \leqq b$ bzw. $a < x < b$.

Satz 2. *a, b, $f(x)$ wie im Satz 1; dazu werde noch vorausgesetzt, daß a, b ganz sind. Dann ist*

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}},$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung darf durch keine kleinere Weltkonstante ersetzt werden.

Satz 3. *a, b, $f(x)$ wie im Satz 1; dazu werde noch vorausgesetzt, daß a, b ganz sind. Dann ist*

$$\left| \frac{1}{2} e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a < n < b} e^{2\pi i f(n)} + \frac{1}{2} e^{2\pi i f(b)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqq \frac{2}{\pi},$$

und hier darf das Gleichheitszeichen nicht gestrichen werden (um so weniger darf also $\frac{2}{\pi}$ durch eine kleinere Weltkonstante ersetzt werden).

Satz 4. *a, b, $f(x)$ wie im Satz 1; dazu werde noch vorausgesetzt, daß $a - \frac{1}{2}$, $b - \frac{1}{2}$ ganz sind. Dann ist*

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| < \frac{1}{2},$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung darf durch keine kleinere Weltkonstante ersetzt werden.

Man bekommt also in diesen drei Fällen (ganze a, b; ganze a, b und die beiden Endglieder mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$; ganze $a - \frac{1}{2}$, $b - \frac{1}{2}$) drei verschiedene Weltkonstanten; merkwürdig ist das Auftreten des Gleichheitszeichens im Satz 3.

Wir werden aber die Sätze 1 bis 4 nicht gesondert betrachten, sondern wir werden folgenden allgemeinen Satz beweisen, der alle diese vier Sätze umfaßt:

Satz 5. *Es seien vier Zahlen*

gegeben mit

$$\alpha,\ \beta,\ \mu_1,\ \mu_2$$
$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 0 \leqq \beta < 1;$$
$$0 \leqq \mu_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } \alpha > 0; \quad \mu_2 = 0, \text{ wenn } \beta > 0.$$

Behauptung 1. *Ist*

$$a < b, \quad a \equiv \alpha, \quad b \equiv \beta\ ^4),$$
$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ reell}, \\ f'(x) \text{ vorhanden}^2) \text{ und monoton nicht fallend}, \\ 0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle,$$

---

4) Alle Kongruenzen sind modulo Eins zu verstehen.

so ist

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \mu_1 e^{2\pi i f(a)} + \sum\limits_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \mu_2 e^{2\pi i f(b)} - \int\limits_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqq \\ \qquad \left| \alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta - \mu_2 (1 - \mu_2)}, \end{array} \right.$$

und die rechte Seite von (A) *darf durch keine kleinere, nur von* $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ *abhängige Zahl ersetzt werden.*

Behauptung 2. *Ist*

$$\alpha = \beta = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

(in diesem Falle ist die rechte Seite von (A) gleich $\frac{2}{\pi}$), *so darf das Gleichheitszeichen in* (A) *nicht gestrichen werden.*

Behauptung 3. *In allen übrigen Fällen gilt in* (A) *das Zeichen* $<$.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, die Werte von

$$T_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta) = \left| \alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta - \mu_2 (1 - \mu_2)}$$

etwas näher zu betrachten (wobei freilich nur die im Satz 5 zugelassenen Werte von $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ betrachtet werden).

Erstens für $\alpha = \beta = 0$ (das entspricht ganzen a, b):

Stets ist

$$T_{\mu_1, \mu_2}(0, 0) \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau in folgenden vier Fällen:

$$\mu_1 = 0 \text{ oder } 1, \quad \mu_2 = 0 \text{ oder } 1.$$

Stets ist

$$T_{\mu_1, \mu_2}(0, 0) \geqq \frac{2}{\pi},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für

$$\mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Zweitens für beliebige α, β:

Stets ist

$$T_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta) \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau in folgenden vier Fällen:

$$\alpha = \beta = 0, \quad \mu_1 = 0 \text{ oder } 1, \quad \mu_2 = 0 \text{ oder } 1.$$

Stets ist

$$T_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta) \geqq \tfrac{1}{2},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau in den beiden folgenden Fällen:

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2} \text{ (also } \mu_1 = \mu_2 = 0)$$

oder

$$\alpha = 0, \ \mu_1 = \tfrac{1}{2}, \ \beta = \tfrac{1}{2} \text{ (also } \mu_2 = 0).$$

Nach dieser Diskussion ist klar, daß die Sätze 1 bis 4 aus Satz 5 folgen.

Wir werden aber außer der im Satz 5 betrachteten Funktionenklasse noch eine allgemeinere Funktionenklasse betrachten; wir werden nämlich noch folgenden Satz beweisen[5]):

Satz 6. *α, β, μ_1, μ_2 wie im Satz 5.*

Behauptung 1. *Ist*

$$a < b, \quad a \equiv \alpha, \quad b \equiv \beta,$$

$$\gamma \text{ reell},$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}, \\ g(x) \text{ monoton nicht fallend}, \\ f(x) = \int_a^x g(y)\,dy + \gamma \end{array}\right\} \text{in } \langle a, b\rangle,$$

so gilt (A), *und die rechte Seite von* (A) *darf durch keine kleinere, nur von α, β, μ_1, μ_2 abhängige Zahl ersetzt werden.*

Behauptung 2. *Ist*

$$\alpha = \beta = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

(in diesem Falle ist die rechte Seite von (A) gleich $\frac{2}{\pi}$), *so darf das Gleichheitszeichen in* (A) *nicht gestrichen werden.*

Behauptung 3. *Ist*

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \text{ (also } \mu_1 = 0), \quad \beta = 0, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

(in diesem Falle ist die rechte Seite von (A) gleich $\frac{2}{\pi}$), *so darf das Gleichheitszeichen in* (A) *nicht gestrichen werden.*

Behauptung 4. *In allen übrigen Fällen gilt in* (A) *das Zeichen* $<$.

Im Unterschied zum Satz 5 tritt hier noch ein zweiter Fall mit dem Gleichheitszeichen auf (Behauptung 3). Es ist wohl unnötig, die den Sätzen 1 bis 4 entsprechenden Spezialfälle des Satzes 6 aufzuzählen.

Warum betrachten wir neben dem Satz 5 noch den Satz 6? Weil wir glauben, daß die im Satz 6 behandelte Funktionenklasse natürlicher ist als die im Satz 5 betrachtete. Warum wir dies glauben, wird der Leser aus den folgenden Sätzen, insbesondere aus dem Satz 8, erkennen.

Definition 1. *Für $a < b$ sei $\mathfrak{M}(a, b)$ die Menge aller in $\langle a, b\rangle$ definierten Funktionen $f(x)$, welche sich daselbst in der Gestalt*

$$f(x) = \int_a^x g(y)\,dy + \gamma$$

[5]) Daß die im Satz 6 betrachtete Funktionenklasse tatsächlich allgemeiner ist als die im Satz 5 betrachtete, kann der Leser — dem es nicht unmittelbar klar ist — aus der Vorbemerkung zum Hilfssatz 9 erkennen.

darstellen lassen mit

$$\left.\begin{array}{c}\gamma \text{ reell,}\\ 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2},\\ g(x) \text{ monoton nicht fallend}\end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle.$$

Definition 2. *Es sei*

$$a < b; \quad 0 \leqq \mu_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } a \neq 0; \quad \mu_2 = 0, \text{ wenn } b \neq 0.$$

Dann bezeichnen wir mit

$$s_{\mu_1, \mu_2}(a, b)$$

die obere Grenze von

$$\left| \mu_1 e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \mu_2 e^{2\pi i f(b)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx \right|$$

für alle $f(x)$ aus $\mathfrak{M}(a, b)$.

Definition 3. *Es sei*

$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 0 \leqq \beta < 1; \quad 0 \leqq \mu_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } \alpha > 0; \quad \mu_2 = 0, \text{ wenn } \beta > 0.$$

Dann bezeichnen wir mit

$$S_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta)$$

die obere Grenze von

$$s_{\mu_1, \mu_2}(a, b)$$

für alle a, b mit

$$a < b, \quad a \equiv \alpha, \quad b \equiv \beta.$$

Offenbar ist (nach Satz 6)

$$S_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta) = \left| \alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}} \sqrt{\sin \pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)}.$$

Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 7. *Es sei $a < b$; es sei $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... eine Folge von Funktionen aus $\mathfrak{M}(a, b)$, und es sei*

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{in} \quad \langle a, b\rangle.$$

Dann gehört auch $f(x)$ zu $\mathfrak{M}(a, b)$.

Satz 8. *a, b, μ_1, μ_2 wie in der Definition 2. Dann gibt es eine Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{M}(a, b)$ mit*

$$\left| \mu_1 e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \mu_2 e^{2\pi i f(b)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx \right| = s_{\mu_1, \mu_2}(a, b).$$

Satz 9. *a, b, μ_1, μ_2 wie in der Definition 2. Man setze*

$$\alpha = a - [a], \quad \beta = b - [b].$$

1. *Ist*

entweder $\alpha = \beta = 0, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$

oder $\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad b - a \geqq \frac{3}{2},$

so ist

$$s_{\mu_1, \mu_2}(a, b) = S_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta).$$

2. *Sonst ist stets*

$$s_{\mu_1, \mu_2}(a, b) < S_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta).$$

§ 2.

Beweis der Sätze 5, 6.

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$a < b,$$

$G(x)$ *in* $\langle a, b\rangle$ *reell und eigentlich integrabel im Riemannschen Sinne,* c *reell,*

$$F(x) = \int_a^x G(y)\,dy + c \quad \text{in} \quad \langle a, b\rangle.$$

Dann ist

$$\int_a^b G(x) \cos F(x)\,dx = \sin F(b) - \sin F(a),$$

also

$$\int_a^b G(x) \cos\left(F(x) + \frac{\pi}{2}\right) dx = \sin\left(F(b) + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(F(a) + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_a^b G(x) \sin F(x)\,dx = -\cos F(b) + \cos F(a).$$

Beweis: $\delta > 0$ sei gegeben. Man wähle ν und $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ mit

$$e_\lambda = a_\lambda - a_{\lambda-1} > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \lambda \leqq \nu,$$
$$a_0 = a, \; a_\nu = b$$

so, daß erstens, wenn s_λ die Schwankuug von $G(x)$ auf $\langle a_{\lambda-1}, a_\lambda\rangle$ ist,

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} e_\lambda s_\lambda < \delta;$$

zweitens bei jeder Wahl der ξ_λ auf $\langle a_{\lambda-1}, a_\lambda\rangle$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} e_\lambda G(\xi_\lambda) \cos F(\xi_\lambda) - \int_a^b G(x) \cos F(x)\,dx < \delta.$$

Wegen der Differentiierbarkeit von $\sin\alpha$ und der Stetigkeit von $F(x)$ gibt es auf $\langle a_{\lambda-1}, a_\lambda\rangle$ ein ξ_λ mit

$$\sin F(a_\lambda) - \sin F(a_{\lambda-1}) = \left(F(a_\lambda) - F(a_{\lambda-1})\right) \cos F(\xi_\lambda).$$

Nun ist

$$|F(a_\lambda) - F(a_{\lambda-1}) - e_\lambda G(\xi_\lambda)| = \Big| \int_{a_{\lambda-1}}^{a_\lambda} (G(x) - G(\xi_\lambda))\, dx \Big| \leqq e_\lambda s_\lambda,$$

also

$$|\sin F(a_\lambda) - \sin F(a_{\lambda-1}) - e_\lambda G(\xi_\lambda) \cos F(\xi_\lambda)| \leqq e_\lambda s_\lambda;$$

daher ist

$$|\sin F(b) - \sin F(a) - \sum_{\lambda=1}^{\nu} e_\lambda G(\xi_\lambda) \cos F(\xi_\lambda)| \leqq \sum_{\lambda=1}^{\nu} e_\lambda s_\lambda < \delta,$$

$$\Big| \sin F(b) - \sin F(a) - \int_a^b G(x) \cos F(x)\, dx \Big| < 2\delta.$$

Die linke Seite ist also 0.

Hilfssatz 2. *a, b, $G(x)$, c, $F(x)$ wie im Hilfssatz 1. In $\langle a, b\rangle$ sei $q(x)$ reell und monoton nicht fallend. Es verschwinde $1 + \sin F(x)$ höchstens in endlich vielen Punkten von (a, b), die, wachsend geordnet, mit*

$$a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1} \qquad (\nu \geqq 1)$$

bezeichnet werden mögen; man setze noch

$$a_0 = a, \quad a_\nu = b.$$

1. *Dann gilt*

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b q(x) G(x) \cos F(x)\, dx \leqq q(b-0)(1 + \sin F(b)) - q(a+0)(1 + \sin F(a)).$$

2. *Gilt in (1) das Gleichheitszeichen, so ist $q(x)$ konstant in jedem Intervall $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ $(1 \leqq \lambda \leqq \nu)$.*

Beweis. Der zweite Mittelwertsatz und der Hilfssatz 1 ergeben für $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ — mit einem geeigneten ξ aus $\langle \alpha, \beta\rangle$ —

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\int_\alpha^\beta q(x) G(x) \cos F(x)\, dx \\ &= q(\alpha+0) \int_\alpha^\xi G(x) \cos F(x)\, dx + q(\beta-0) \int_\xi^\beta G(x) \cos F(x)\, dx \\ &= q(\alpha+0)\big((1 + \sin F(\xi)) - (1 + \sin F(\alpha))\big) \\ &\qquad + q(\beta-0)\big((1 + \sin F(\beta)) - (1 + \sin F(\xi))\big) \\ &= q(\beta-0)(1 + \sin F(\beta)) - q(\alpha+0)(1 + \sin F(\alpha)) \\ &\qquad - (q(\beta-0) - q(\alpha+0))(1 + \sin F(\xi)). \end{aligned}$$

1. Aus (2) mit $\alpha = a$, $\beta = b$ folgt bereits (1).

2. Ist $q(x)$ in einem der Intervalle $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ nicht konstant, so wähle man zwei Stetigkeitspunkte γ, δ von $q(x)$ mit

$$a_{\lambda-1} < \gamma < \delta < a_\lambda, \quad q(\gamma) < q(\delta).$$

Dann ergibt (2) (auf die Intervalle $\langle a, \gamma\rangle$, $\langle \gamma, \delta\rangle$, $\langle \delta, b\rangle$ angewandt)

$$\int_a^\gamma q(x)\,G(x)\cos F(x)\,dx \leqq q(\gamma)\,(1+\sin F(\gamma)) - q(a+0)\,(1+\sin F(a)),$$

$$\int_\gamma^\delta q(x)\,G(x)\cos F(x)\,dx < q(\delta)\,(1+\sin F(\delta)) - q(\gamma)\,(1+\sin F(\gamma)),$$

$$\int_\delta^b q(x)\,G(x)\cos F(x)\,dx \leqq q(b-0)\,(1+\sin F(b)) - q(\delta)\,(1+\sin F(\delta)).$$

Die Addition dieser Ungleichungen ergibt (1) mit dem Zeichen $<$.

Hilfssatz 3. *Es sei*

$$\left.\begin{array}{c} a<b,\ \gamma \text{ reell},\\ 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2},\\ g(x) \text{ monoton nicht fallend},\\ f(x) = \int_a^x g(y)\,dy + \gamma \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle.$$

Für ganzes $n > 0$ sei

$$J_n^{\pm} = \pm 2\pi \int_a^b g(x)\cos 2\pi\,(n x \mp f(x))\,dx,$$

wo sich die oberen bzw. unteren Zeichen entsprechen.

1. *Dann ist*

$$(3) \qquad J_n^{\pm} \leqq \frac{1+\sin 2\pi\,(\pm n b - f(b))}{2n \mp 1}.$$

2. *Gilt in* (3) *mit dem oberen Zeichen für die beiden Werte $n = 1$ und $n = 2$ das Gleichheitszeichen, so gilt folgendes:*

I. *$g(x)$ ist stückweise konstant in $\langle a, b\rangle$, d. h.: es gibt endlich viele Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu$ mit $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_\nu = b$, so daß $g(x)$ in jedem Intervall $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ $(1 \leqq \lambda \leqq \nu)$ konstant ist. Dabei sind die Zahlen a_λ mit $1 \leqq \lambda \leqq \nu - 1$ ganz.*

II. *Es ist entweder $a \equiv 0$ oder $g(a+0) = 0$.*

III. *Es ist*

$$f(a) \equiv \tfrac{1}{4}, \quad 2f(b) \equiv b + \tfrac{1}{2}.$$

Beweis. Man setze in $\langle a, b\rangle$

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{g(x)}{n \mp g(x)},\\ G(x) &= \pm 2\pi n - 2\pi g(x),\\ F(x) &= \pm 2\pi n x - 2\pi f(x),\\ c &= \pm 2\pi n a - 2\pi\gamma; \end{aligned}$$

dann ist

$$\int_a^x G(y)\,dy + c = \pm 2\pi n x \mp 2\pi n a - 2\pi \int_a^x g(y)\,dy \pm 2\pi n a - 2\pi\gamma$$
$$= \pm 2\pi n x - 2\pi f(x) = F(x).$$

$1 + \sin F(x)$ verschwindet in $\langle a, b\rangle$ höchstens endlich oft, da aus $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ folgt

$$\pm(F(\beta) - F(\alpha)) = \int_\alpha^\beta (\pm G(y))\,dy \geqq \int_\alpha^\beta (2\pi n - \pi)\,dx > 0,$$

so daß $\pm F(x)$ in $\langle a, b\rangle$ monoton wächst. Nach Hilfssatz 2, 1 folgt

$$(4)\quad \begin{cases} J_n^{\pm} = \int_a^b q(x)\,G(x)\cos F(x)\,dx \\ \leqq \frac{g(b-0)}{n \mp g(b-0)}\left(1 + \sin 2\pi(\pm nb - f(b))\right) \\ \qquad - \frac{g(a+0)}{n \mp g(a+0)}\left(1 + \sin 2\pi(\pm na - f(a))\right). \end{cases}$$

Weiter ist

$$(5)\quad \frac{g(a+0)}{n \mp g(a+0)}\left(1 + \sin 2\pi(\pm na - f(a))\right) \geqq 0,$$

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{g(b-0)}{n \mp g(b-0)}\left(1 + \sin 2\pi(\pm nb - f(b))\right) \\ \qquad \leqq \frac{1}{2n \mp 1}\left(1 + \sin 2\pi(\pm nb - f(b))\right). \end{cases}$$

1. Aus (4), (5), (6) folgt bereits (3).

2. Es gelte in (3) mit dem oberen Zeichen das Gleichheitszeichen für $n = 1$ und $n = 2$; dann muß dasselbe auch in (4), (5), (6) der Fall sein. Wir sprechen daher im folgenden von den **Gleichungen** (4), (5), (6) und meinen darunter die Beziehungen (4), (5), (6) mit dem oberen Zeichen für die Werte $n = 1$ und $n = 2$, und zwar mit dem Gleichheitszeichen. Aus den Gleichungen (4) folgt nach Hilfssatz 2, 2, daß $q(x)$ — also auch $g(x)$ — in $\langle a, b\rangle$ stückweise konstant ist, wobei jede Sprungstelle ξ von $q(x)$ (d. h. von $g(x)$), die in (a, b) liegt, der Beziehung

$$1 + \sin 2\pi(n\xi - f(\xi)) = 0$$

genügen muß. Die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$ ergeben

$$1\cdot\xi - f(\xi) \equiv -\tfrac{1}{4}, \quad 2\cdot\xi - f(\xi) \equiv -\tfrac{1}{4},$$

also

$$(7)\quad \xi \equiv 0, \quad f(\xi) \equiv \tfrac{1}{4}.$$

Damit ist erstens I bewiesen; zweitens haben wir gezeigt, daß jede etwaige in (a, b) liegende Sprungstelle ξ von $g(x)$ die Kongruenzen (7) erfüllt.

Aus den Gleichungen (5) folgt: Ist $g(a+0) \neq 0$, so ist

$$1 + \sin 2\pi(na - f(a)) = 0$$

für $n = 1, 2$, also

$$a \equiv 0, \quad f(a) \equiv \tfrac{1}{4} \tag{8}$$

(damit ist insbesondere II bewiesen).

Aus den Gleichungen (6) folgt: Ist $g(b-0) \neq \frac{1}{2}$, so ist

$$1 + \sin 2\pi(nb - f(b)) = 0$$

für $n = 1, 2$, also

$$b \equiv 0, \quad f(b) \equiv \tfrac{1}{4}. \tag{9}$$

Es sei nun $g(a+0) = 0$. Dann ist entweder $g(b-0) = 0 \neq \frac{1}{2}$; alsdann gilt (9), und es ist $g(x) = 0$ in (a, b), also $f(x)$ konstant in $\langle a, b\rangle$, also nach (9)

$$f(a) \equiv \tfrac{1}{4}. \tag{10}$$

Oder es ist $g(b-0) > 0$; alsdann hat $g(x)$ mindestens eine Sprungstelle in (a, b); es sei ξ die kleinste. Dann gilt (7), und es ist $g(x) = g(a+0) = 0$ in (a, ξ), also $f(x)$ konstant in $\langle a, \xi\rangle$; wegen (7) gilt also wieder (10).

Ist aber $g(a+0) \neq 0$, so gilt (8).

Also gilt (10) immer.

Es sei weiter $g(b-0) = \frac{1}{2}$. Dann ist entweder $g(a+0) = \frac{1}{2} \neq 0$; alsdann gilt (8), und es ist $g(x) = \frac{1}{2}$ in (a, b), also

$$f(b) - f(a) = \tfrac{1}{2}(b-a),$$

also nach (8)

$$2f(b) \equiv b + \tfrac{1}{2}. \tag{11}$$

Oder es ist $g(a+0) < \frac{1}{2}$, also hat $g(x)$ in (a, b) mindestens eine Sprungstelle; es sei ξ die größte. Dann gilt (7) und es ist $g(x) = g(b-0) = \frac{1}{2}$ in (ξ, b), also

$$f(b) - f(\xi) = \tfrac{1}{2}(b-\xi);$$

wegen (7) gilt also wieder (11).

Ist aber $g(b-0) \neq \frac{1}{2}$, so gilt (9), also

$$2f(b) \equiv \tfrac{1}{2} \equiv b + \tfrac{1}{2}.$$

Also gilt (11) immer.

Damit ist aber auch III bewiesen.

Hilfssatz 4. *Für alle reellen x ist*

$$|\sin \pi x| = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n x \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right), \tag{12}$$

$$\begin{cases} x - [x] - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\pi(x - [x]) \\ \qquad = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2\pi n x \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}\right), \end{cases} \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = 2. \tag{14}$$

Beweis. Die linke Seite von (12) hat die Periode 1, ist gerade, überall stetig und von beschränkter Variation auf $\langle 0, 1\rangle$. Daher ist für alle reellen x

$$|\sin \pi x| = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2\pi n x$$

mit

$$A_n = 2\int_0^1 \sin \pi x \cos 2\pi n x \, dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sin \pi (1-2n) x + \sin \pi (1+2n) x\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-\cos \pi (1-2n) x}{1-2n} + \frac{-\cos \pi (1+2n) x}{1+2n}\right\}_0^1$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

für $n \geqq 0$; damit ist (12) bewiesen.

Die linke Seite von (13) hat die Periode 1, ist ungerade, überall stetig und von beschränkter Variation auf $\langle 0, 1\rangle$. Daher ist für alle reellen x

$$x - [x] - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos \pi (x - [x]) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin 2\pi n x$$

mit

$$B_n = 2\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos \pi x) \sin 2\pi n x \, dx$$

$$= \int_0^1 (2x-1) \sin 2\pi n x \, dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi (2n-1) x + \sin \pi (2n+1) x\right) dx$$

$$= \left\{-(2x-1)\frac{\cos 2\pi n x}{2\pi n}\right\}_0^1 - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{-2}{2\pi n} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

für $n \geqq 1$; damit ist (13) bewiesen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2;$$

damit ist (14) bewiesen.

Hilfssatz 5. *Es sei bei reellem* x

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für ganzes } x, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n} = x - [x] - \tfrac{1}{2} + \delta(x).$$

Es sei

$$a < b,$$

$G(x)$ *in* $\langle a, b\rangle$ *reell und im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel,* c *reell,*

$$F(x) = \int_a^x G(y)\,dy + c \quad \text{in } \langle a, b\rangle.$$

Dann ist

$$\sum_{a<n<b} F(n) + \delta(a)\,F(a) + \delta(b)\,F(b) + \psi(b)\,F(b) - \psi(a)\,F(a) - \int_a^b F(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b \sin 2\pi n x \cdot G(x)\,dx.$$

Beweis. Die Konvergenz der letzten Reihe folgt daraus, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n}$$

gleichmäßig beschränkte Partialsummen hat, also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n x}{n}\,G(x)$$

gliedweise integriert werden kann.

Da beide Seiten der Behauptung additiv sind, gebe es ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein ganzes h mit

$$h \leqq a < b < h+1 \quad \text{oder} \quad h < a < b \leqq h+1.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $h = 0$ (sonst betrachte man $G(x+h) = G_1(x)$).

Dann ist die rechte Seite der Behauptung gleich

$$\int_a^b \psi(x)\,G(x)\,dx = \int_a^b (x - \tfrac{1}{2})\,G(x)\,dx$$

$$= \{(x-\tfrac{1}{2})\,F(x)\}_a^b - \int_a^b F(x)\,dx$$

$$= (b-\tfrac{1}{2})\,F(b) - (a-\tfrac{1}{2})\,F(a) - \int_a^b F(x)\,dx$$

$$= \sum_{a<n<b} F(n) + \delta(a)\,F(a) + \delta(b)\,F(b) + \psi(b)\,F(b)$$

$$- \psi(a)\,F(a) - \int_a^b F(x)\,dx.$$

Hilfssatz 6. *Es seien vier Zahlen gegeben:*

$$\alpha,\ \beta,\ \mu_1,\ \mu_2$$

mit

$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 0 \leqq \beta < 1; \quad 0 \leqq \mu_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } \alpha > 0; \ \mu_2 = 0, \text{ wenn } \beta > 0.$$

Es sei noch

$$a < b, \quad a \equiv \alpha, \quad b \equiv \beta,$$
$$\gamma \text{ reell},$$
$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}, \\ g(x) \text{ monoton nicht fallend}, \\ f(x) = \int_a^x g(y)\,dy + \gamma \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle;$$

man setze

$$\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\, a, b) = \mu_1 e^{2\pi i f(a)} + \sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} + \mu_2 e^{2\pi i f(b)} - \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\,dx.$$

1. *Dann ist*

$$(15)\quad \left|\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\, a, b)\right| \leqq \left|\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1-\mu_2)}.$$

2. *Gilt in* (15) *das Gleichheitszeichen, so ist entweder*

$$\alpha = \beta = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

oder

$\alpha = \frac{1}{2}$ (also $\mu_1 = 0$), $\beta = 0$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$, $g(x)$ *unstetig in* (a, b), $b - a > \frac{1}{2}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\, a, b) \geqq 0$$

(sonst betrachte man $f(x) + \lambda$ statt $f(x)$ bei passendem reellem λ). Dann ist

$$\left|\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\, a, b)\right| = \Re\,\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;\, a, b)$$
$$= \mu_1 \cos 2\pi f(a) + \sum_{a<n<b} \cos 2\pi f(n) + \mu_2 \cos 2\pi f(b) - \int_a^b \cos 2\pi f(x)\,dx.$$

Man setze

$$(16)\quad \begin{cases} m_1 = \mu_1 - \frac{1}{2} \text{ für } \alpha = 0, \quad m_1 = 0 \text{ sonst}; \\ m_2 = \mu_2 - \frac{1}{2} \text{ für } \beta = 0, \quad m_2 = 0 \text{ sonst}. \end{cases}$$

Nach Hilfssatz 1, letzte Zeile (mit

$$F(x) = 2\pi f(x), \quad G(x) = 2\pi g(x), \quad c = 2\pi\gamma)$$

ist in $\langle a, b\rangle$

$$-\int_a^x 2\pi g(y) \sin 2\pi f(y)\,dy = \cos 2\pi f(x) - \cos 2\pi f(a);$$

also ist nach Hilfssatz 5 (mit

$$F(x) = \cos 2\pi f(x), \quad G(x) = -2\pi g(x) \sin 2\pi f(x), \quad c = \cos 2\pi f(a)):$$

$$(17)\quad \begin{cases} |\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f; a, b)| = (m_1 + \psi(a)) \cos 2\pi f(a) \\ \quad + (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^b g(x) \sin 2\pi f(x) \sin 2\pi n x \, dx \\ = (m_1 + \psi(a)) \cos 2\pi f(a) + (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (J_n^+ + J_n^-). \end{cases}$$

Hier ist (wegen $a \equiv \alpha$; vgl. (16))

$$(m_1 + \psi(a)) \cos 2\pi f(a) = (\alpha - \tfrac{1}{2} + \mu_1) \cos 2\pi f(a),$$

also

$$(18)\qquad (m_1 + \psi(a)) \cos 2\pi f(a) \leqq |\alpha + \mu_1 - \tfrac{1}{2}|;$$

gilt in (18) das Gleichheitszeichen, so ist

$$(19)\qquad \text{entweder } \alpha = \tfrac{1}{2}, \text{ oder } \alpha = 0, \ \mu_1 = \tfrac{1}{2}, \text{ oder } 2f(a) \equiv 0.$$

Weiter ist nach Hilfssatz 3

$$(20)\quad \begin{cases} (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (J_n^+ + J_n^-) \\ \quad \leqq (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b) \\ \qquad + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1 + \sin 2\pi (nb - f(b))}{2n-1} + \frac{1 - \sin 2\pi (nb + f(b))}{2n+1} \right) \\ \quad = \mathfrak{D}. \end{cases}$$

Gilt in (20) das Gleichheitszeichen, so ist nach Hilfssatz 3 erstens $g(x)$ stückweise konstant in $\langle a, b \rangle$, wobei jede etwaige in (a, b) liegende Sprungstelle ganz ist; zweitens

$$(21)\qquad \text{entweder } \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad g(a+0) = 0;$$

drittens

$$(22)\qquad f(a) \equiv \tfrac{1}{4}, \quad 2f(b) \equiv \beta + \tfrac{1}{2}.$$

Nun ist

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) + (m_2 - \psi(b)) \cos 2\pi f(b)$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi f(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(2n-1)} - \frac{1}{n(2n+1)} \right) \sin 2\pi n b$$
$$- \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi f(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(2n-1)} + \frac{1}{n(2n+1)} \right) \cos 2\pi n b.$$

Weiter ist

$$\frac{1}{n(2n-1)} - \frac{1}{n(2n+1)} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\frac{1}{n(2n-1)} + \frac{1}{n(2n+1)} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right);$$

daher ist nach Hilfssatz 4

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\pi} + \cos 2\pi f(b)\left(m_2 - \psi(b) + b - [b] - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\pi\beta\right)$$
$$- \sin 2\pi f(b)\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\,|\sin\pi b|\right).$$

Nun ist erstens

$$|\sin\pi b| = \sin\pi\beta.$$

Zweitens ist (vgl. (16)) für $\beta > 0$

$$m_2 - \psi(b) + b - [b] - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\pi\beta = \tfrac{1}{2}\cos\pi\beta = (\tfrac{1}{2} - \mu_2)\cos\pi\beta;$$

für $\beta = 0$ ist aber

$$m_2 - \psi(b) + b - [b] - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\pi\beta = \mu_2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = (\mu_2 - \tfrac{1}{2})\cos\pi\beta.$$

Stets ist also

$$(23)\quad \mathfrak{D} = \frac{1}{\pi} \pm \left(\frac{1}{2} - \mu_2\right)\cos 2\pi f(b)\cos\pi\beta - \sin 2\pi f(b)\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\pi\beta\right),$$

wo — wie auch im ganzen Rest dieses Beweises — das obere Zeichen dem Fall $\beta > 0$, das untere dem Fall $\beta = 0$ entspricht.

Nun ist für reelle p_1, p_2, q_1, q_2

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 \leqq \sqrt{(p_1^2 + p_2^2)(q_1^2 + q_2^2)};$$

gilt hier das Gleichheitszeichen, so ist

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0.$$

Also ist nach (23)

$$(24)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} \leqq \frac{1}{\pi} \\ + \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} - \mu_2\right)^2 \cos^2\pi\beta + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\pi\beta\right)^2\right)(\cos^2 2\pi f(b) + \sin^2 2\pi f(b))}. \end{cases}$$

Hierin ist

$$\left(\frac{1}{2} - \mu_2\right)^2 \cos^2\pi\beta + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\pi\beta\right)^2$$
$$= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4}(\cos^2\pi\beta + \sin^2\pi\beta) - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)\cos^2\pi\beta$$
$$= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2);$$

denn es ist entweder $\mu_2 = 0$ (für $\beta > 0$) oder $\cos^2\pi\beta = 1$. Aus (24) folgt also

$$(25)\qquad \mathfrak{D} \leqq \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sin\pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)}.$$

Gilt in (25) das Gleichheitszeichen, so ist

$$(26) \quad \pm\left(\frac{1}{2}-\mu_2\right)\cos\pi\beta\sin 2\pi f(b)+\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\sin\pi\beta\right)\cos 2\pi f(b)=0.$$

1. Aus (17), (18), (20), (25) folgt bereits (15).

2. Es gelte nun in (15) das Gleichheitszeichen; dann gilt auch in (18), (20), (25) das Gleichheitszeichen; also gilt (19), (21), (22), (26), und $g(x)$ ist stückweise konstant in $\langle a,b\rangle$, wobei jede etwaige in (a,b) liegende Sprungstelle ganz ist.

Nach (22) ist $2f(a)\not\equiv 0$; also ist nach (19)

$$(27) \qquad \text{entweder } \alpha=\tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha=0, \quad \mu_1=\tfrac{1}{2}.$$

Aus (22) folgt weiter

$$2\pi f(b)=\pi\beta+\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k \text{ ganz}),$$

also

$$\cos 2\pi f(b)=(-1)^{k+1}\sin\pi\beta, \quad \sin 2\pi f(b)=(-1)^k\cos\pi\beta;$$

also nach (26)

$$(28) \qquad \mp\left(\frac{1}{2}-\mu_2\right)\cos^2\pi\beta+\frac{1}{\pi}\sin\pi\beta-\frac{1}{2}\sin^2\pi\beta=0.$$

Wäre $\beta>0$, so wäre nach (28) (oberes Zeichen und $\mu_2=0$)

$$-\frac{1}{2}\cos^2\pi\beta+\frac{1}{\pi}\sin\pi\beta-\frac{1}{2}\sin^2\pi\beta=0,$$

$$\sin\pi\beta=\frac{\pi}{2}>1$$

— Widerspruch; also ist

$$(29) \qquad \beta=0,$$

und (28) liefert nun (unteres Zeichen und $\beta=0$)

$$(30) \qquad \mu_2=\tfrac{1}{2}.$$

Wegen (27), (29), (30) sind wir fertig, wenn wir nur noch folgendes zeigen: es sei $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$, $\mu_2=\frac{1}{2}$, und in (15) gelte das Gleichheitszeichen; dann ist $g(x)$ unstetig in (a,b), und es ist $b-a>\frac{1}{2}$. In der Tat ist $g(x)$ stückweise konstant in $\langle a,b\rangle$, und jede etwaige in (a,b) liegende Sprungstelle ist eine ganze Zahl. Wäre nun $g(x)$ stetig in (a,b), so wäre $g(x)$ konstant in (a,b); wegen $\alpha=\frac{1}{2}$ und wegen (21) wäre also $g(x)=0$ in (a,b), also $f(x)=\gamma$ in $\langle a,b\rangle$; dann wäre aber

$$\left|\mathfrak{C}_{0,1/2}(f;a,b)\right|=\left|b-a-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\int_a^b dx\right|=0,$$

während die rechte Seite von (15) positiv ist. Es besitzt daher $g(x)$ in (a,b) tatsächlich mindestens eine Sprungstelle; also muß in (a,b) mindestens eine ganze Zahl liegen; also ist $b-a>\frac{1}{2}$, da in $(b-\frac{1}{2},b)$ keine ganze Zahl liegt.

Hilfssatz 7. *Es seien fünf Zahlen gegeben:*

$$\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2, \delta$$

mit

$$0 \leqq \alpha < 1,\ 0 \leqq \beta < 1;$$
$$0 \leqq \mu_1 \leqq 1,\ 0 \leqq \mu_2 \leqq 1;$$
$$\mu_1 = 0, \text{ wenn } \alpha > 0;\ \mu_2 = 0, \text{ wenn } \beta > 0;$$
$$0 < \delta < 1.$$

Dann gibt es zwei Zahlen a, b und eine Funktion $f(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$a < b;\ a \equiv \alpha,\ b \equiv \beta;$$

in $\langle a, b\rangle$ ist $f(x)$ reell, $f'(x)$ vorhanden[3]*) und monoton nicht fallend, $0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2}$; wird endlich $\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f; a, b)$ wie im Hilfssatz 6 definiert, so ist*

$$|\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f; a, b)| > \left|\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)} - 56\,\delta.$$

Beweis. Ersetzt man im Hilfssatz 7 die Bedingungen „$0 \leqq \beta < 1$“ und „$\mu_2 = 0$, wenn $\beta > 0$“ durch „$0 < \beta \leqq 1$“ und „$\mu_2 = 0$, wenn $\beta < 1$“, so entsteht ein neuer Hilfssatz — wir nennen ihn Hilfssatz 7′ —, und es genügt, den Hilfssatz 7′ zu beweisen, was wir jetzt machen wollen (denn offenbar sind die beiden Hilfssätze 7 und 7′ untereinander äquivalent).

Es sei

(31) $\quad \varrho = i$ für $\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} < 0$, $\varrho = -i$ für $\alpha + \mu_1 - \frac{1}{2} \geqq 0$.

Weiter sei

$$\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i}\, e^{\pi i \beta} + \mu_2\, e^{\pi i \beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta - \mu_2 - \frac{1}{\pi i}\cos \pi\beta$$

(man beachte $\mu_2 \cos \pi\beta = -\mu_2$, $\mu_2 \sin \pi\beta = 0$; denn entweder ist $\beta = 1$ oder $\mu_2 = 0$). Für $\beta = 1$ ist

$$-\frac{1}{\pi i}\cos \pi\beta \neq 0;$$

für $\beta < 1$ ist

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta - \mu_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta > 0;$$

stets ist also $\tau \neq 0$. Weiter ist

$$|\tau|^2 = \frac{1}{4} - \mu_2 + \mu_2^2 - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta + \frac{2}{\pi}\mu_2 \sin \pi\beta + \frac{1}{\pi^2}(\cos^2 \pi\beta + \sin^2 \pi\beta)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \mu_2(1 - \mu_2) - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta;$$

wird also

(32) $$\sigma = \frac{1}{i}\,\frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\sin \pi\beta - \mu_2(1 - \mu_2)}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i}\, e^{\pi i \beta} + \mu_2\, e^{\pi i \beta}}$$

gesetzt, so ist

(33) $$|\sigma| = 1,\ |\varrho| = 1.$$

Im folgenden bezeichnen wir mit Λ Zahlen, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist. Man wähle nun zwei irrationale Zahlen Θ, ϑ mit

$$0 < \Theta < \vartheta < \tfrac{1}{2}; \tag{34}$$

$$\frac{1}{e^{2\pi i\vartheta}-1} - \frac{1}{2\pi i\Theta} + \frac{1}{2} = \Lambda, \tag{35}$$

$$\frac{e^{2\pi i\vartheta}}{e^{2\pi i\vartheta}-1} - \frac{1}{2} = \Lambda, \tag{36}$$

$$\frac{e^{2\pi i\Theta x}-1}{2\pi i\Theta} - x = \Lambda \text{ für } |x| \leqq 1, \tag{37}$$

$$\frac{1}{2\pi i\vartheta} - \frac{1}{\pi i} = \Lambda, \tag{38}$$

$$e^{2\pi i\Theta x} - 1 = \Lambda \text{ für } |x| \leqq 1, \tag{39}$$

$$e^{2\pi i\vartheta x} - e^{\pi i x} = \Lambda \text{ für } |x| \leqq 1. \tag{40}$$

Das geht, da die linke Seite von (35), (37), (39) für $\Theta \to 0$, die von (36), (38), (40) für $\vartheta \to \frac{1}{2}$ gegen Null strebt und zwar gleichmäßig für $|x| \leqq 1$.

Man wähle dann zwei ganze Zahlen c, d mit

$$c \leqq -1,\ d \geqq 1,\ e^{2\pi i\Theta c} = \varrho + \Lambda,\ e^{2\pi i\vartheta d} = \sigma + \Lambda; \tag{41}$$

das geht wegen (33), da Θ, ϑ irrational sind. Man setze nun

$$a = c - 1 + \alpha,\ b = d + \beta, \tag{42}$$

so daß also

$$a \equiv \alpha,\ b \equiv \beta,\ c - 1 \leqq a < c,\ d < b \leqq d + 1; \tag{43}$$

endlich sei

$$F(x) = \Theta x \text{ für } x \leqq 0,\ F(x) = \vartheta x \text{ für } x > 0. \tag{44}$$

Dann ist nach (42), (43), (44)

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(F; a, b) = \mu_1 e^{2\pi i\Theta a} + \sum_{n=c}^{-1} e^{2\pi i\Theta n} + 1 \\
&+ \sum_{n=1}^{d} e^{2\pi i\vartheta n} + \mu_2 e^{2\pi i\vartheta b} - \int_a^0 e^{2\pi i\Theta x}\,dx - \int_0^b e^{2\pi i\vartheta x}\,dx \\
&= \mu_1 e^{2\pi i\Theta a} + \frac{1 - e^{2\pi i\Theta c}}{e^{2\pi i\Theta}-1} + 1 + e^{2\pi i\vartheta}\frac{e^{2\pi i\vartheta d}-1}{e^{2\pi i\vartheta}-1} \\
&+ \mu_2 e^{2\pi i\vartheta b} - \frac{1 - e^{2\pi i\Theta a}}{2\pi i\Theta} - \frac{e^{2\pi i\vartheta b}-1}{2\pi i\vartheta} \\
&= (1 - e^{2\pi i\Theta c})\left(\frac{1}{e^{2\pi i\Theta}-1} - \frac{1}{2\pi i\Theta}\right) \\
&+ (e^{2\pi i\vartheta d} - 1)\left(\frac{e^{2\pi i\vartheta}}{e^{2\pi i\vartheta}-1} - \frac{1}{2\pi i\vartheta}\right) + \frac{e^{2\pi i\Theta c}}{2\pi i\Theta}(e^{2\pi i\Theta(a-c)} - 1) \\
&- \frac{e^{2\pi i\vartheta d}}{2\pi i\vartheta}(e^{2\pi i\vartheta(b-d)} - 1) + \mu_1 e^{2\pi i\Theta c} e^{2\pi i\Theta(a-c)} \\
&+ 1 + \mu_2 e^{2\pi i\vartheta d} e^{2\pi i\vartheta(b-d)}.
\end{aligned}$$

Nach (33) und (35) bis (43) ist also

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(F;a,b) = (1-\varrho+\Lambda)\left(-\tfrac{1}{2}+\Lambda\right)\\
&+(\sigma-1+\Lambda)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\pi i}+2\Lambda\right)+(\varrho+\Lambda)(-1+\alpha+\Lambda)\\
&-(\sigma+\Lambda)\left(\tfrac{1}{\pi i}+\Lambda\right)(e^{\pi i\beta}-1+\Lambda)+\mu_1(\varrho+\Lambda)(1+\Lambda)\\
&+1+\mu_2(\sigma+\Lambda)(e^{\pi i\beta}+\Lambda)\\
&=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\varrho+\tfrac{1}{2}\sigma-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\pi i}\sigma+\tfrac{1}{\pi i}-\varrho+\alpha\varrho-\tfrac{1}{\pi i}\sigma e^{\pi i\beta}\\
&+\tfrac{1}{\pi i}\sigma+\mu_1\varrho+1+\mu_2\sigma e^{\pi i\beta}+32\Lambda\\
&=\varrho\left(\alpha+\mu_1-\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{\pi i}+\sigma\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\pi i}e^{\pi i\beta}+\mu_2 e^{\pi i\beta}\right)+32\Lambda.
\end{aligned}$$

Nach (31), (32) ist also

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(F;a,b)\\ &=\tfrac{1}{i}\left(\left|\alpha+\mu_1-\tfrac{1}{2}\right|+\tfrac{1}{\pi}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{\pi^2}-\tfrac{1}{\pi}\sin\pi\beta-\mu_2(1-\mu_2)}\right)+32\Lambda.\end{aligned}\right.$$

Man betrachte nun die für alle reellen x definierte Funktion

$$\varphi(x)=(x+\delta)^2\frac{\vartheta-\Theta}{4\delta}+\Theta x;$$

es ist

$$\varphi'(x)=(x+\delta)\frac{\vartheta-\Theta}{2\delta}+\Theta;$$

also ist $\varphi'(x)$ nach (34) stets wachsend, und es ist

$$\begin{aligned}&\varphi(-\delta)=-\Theta\delta=F(-\delta), \quad \varphi'(-\delta)=\Theta=F'(-\delta),\\ &\varphi(\delta)\ =\ \vartheta\delta=F(\delta) \qquad \varphi'(\delta)\ =\vartheta=F'(\delta);\end{aligned}$$

endlich ist $\varphi'(x)>0$ in $(-\delta,\delta)$, also $\varphi(x)$ monoton wachsend in $\langle-\delta,\delta\rangle$; daher ist

$$|\varphi(x)|\leqq\vartheta\delta<\tfrac{1}{2}\delta, \quad |F(x)|\leqq\vartheta\delta<\tfrac{1}{2}\delta \text{ in } \langle-\delta,\delta\rangle.$$

Wird also bei reellen x

$$f(x)=F(x) \text{ für } |x|>\delta, \quad f(x)=\varphi(x) \text{ für } |x|\leqq\delta$$

gesetzt, so ist in $(-\infty,+\infty)$ $f(x)$ reell, $f'(x)$ vorhanden und monoton nicht fallend, $0<\Theta\leqq f'(x)\leqq\vartheta<\tfrac{1}{2}$; weiter ist

$$f(x)-F(x)=0 \text{ für } |x|\geqq\delta, \quad |f(x)-F(x)|<\delta \text{ für } |x|<\delta.$$

Beachtet man noch, daß für reelle y, z gilt

$$|e^{iy}-e^{iz}|=\left|2\sin\frac{y-z}{2}\right|\leqq|y-z|,$$

so folgt (wegen $0<\delta<1$)

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;a,b)-\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(F;a,b)&=e^{2\pi i f(0)}-e^{2\pi i F(0)}-\int_{-\vartheta}^{\vartheta}(e^{2\pi i f(x)}-e^{2\pi i F(x)})\,dx\\ &=2\pi\Lambda+2\cdot 2\pi\Lambda=24\Lambda.\end{aligned}$$

Nach (45) ist also

$$\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;a,b)$$
$$= \frac{1}{i}\left(\left|\alpha+\mu_1-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{\pi}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\sin\pi\beta-\mu_2(1-\mu_2)}\right)+56\Lambda,$$

womit der Hilfssatz 7 bewiesen ist.

Hilfssatz 8. *Es sei b ganz, $a < b-\frac{1}{2}$ und entweder $a \equiv 0$ oder $a \equiv \frac{1}{2}$. Es werde $f(x) = 0$ für $x \leqq b-1$, $f(x) = \frac{x-b+1}{2}$ für $x > b-1$ gesetzt; $\mathfrak{C}_{\mu_1,\mu_2}(f;a,b)$ werde wie im Hilfssatz 6 definiert.*

Dann ist für $a \equiv 0$

$$|\mathfrak{C}_{1/2,1/2}(f;a,b)| = \frac{2}{\pi}$$

und für $a \equiv \frac{1}{2}$

$$|\mathfrak{C}_{0,1/2}(f;a,b)| = \frac{2}{\pi}.$$

Beweis. Für $a \equiv 0$ ist

$$\mathfrak{C}_{1/2,1/2}(f;a,b) = b-\frac{1}{2}-a+\frac{1}{2}e^{\pi i}-\int_a^{b-1}dx-\int_{b-1}^{b}e^{\pi i(x-b+1)}dx$$
$$= b-\frac{1}{2}-a-\frac{1}{2}-(b-1-a)-\frac{e^{\pi i}-1}{\pi i}=\frac{2}{\pi i};$$

für $a \equiv \frac{1}{2}$ ist (wegen $a < b-1$)

$$\mathfrak{C}_{0,1/2}(f;a,b) = b-\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{\pi i}-\int_a^{b-1}dx-\int_{b-1}^{b}e^{\pi i(x-b+1)}dx=\frac{2}{\pi i}.$$

Hilfssatz 9. *Es sei $a < b$; in $\langle a,b\rangle$ sei $f(x)$ reell, $f'(x)$ vorhanden*[2] *und monoton nicht fallend, $0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2}$.*

1. *Dann gibt es eine reelle Zahl γ und eine Funktion $g(x)$ mit*

$$\left.\begin{array}{c} g(x) \text{ monoton nicht fallend,} \\ 0 \leqq g(x) \leqq \frac{1}{2}, \\ f(x) = \int_a^x g(y)\,dy+\gamma \end{array}\right\} \text{in } \langle a,b\rangle.$$

2. *$g(x)$ läßt sich sogar stetig in $\langle a,b\rangle$ wählen.*

Vorbemerkung. Die Umkehrung von 1. ist falsch, wie das Beispiel $\gamma = 0$, $g(x) = 0$ für $a \leqq x < \frac{a+b}{2}$, $g(x) = \frac{1}{2}$ für $\frac{a+b}{2} \leqq x \leqq b$ lehrt.

Beweis. $f'(x)$ ist in $\langle a,b\rangle$ monoton und nimmt jeden Zwischenwert an; also ist $f'(x)$ stetig in $\langle a,b\rangle$; es ist also

$$\int_a^x f'(y)\,dy = f(x)-f(a) \quad \text{in } \langle a,b\rangle.$$

Es genügt daher, $g(x) = f'(x)$, $\gamma = f(a)$ zu setzen.

Beweis des Satzes 5. Hilfssatz 9, Hilfssatz 6, Hilfssatz 7, Hilfssatz 8 mit $a = 0$, $b = 1$.

Beweis des Satzes 6. Hilfssatz 6, Hilfssatz 9, Hilfssatz 7, Hilfssatz 8.

§ 3.

Beweis der Sätze 7, 8, 9.

Beweis des Satzes 7[6]). Nach der Voraussetzung gibt es für jedes ganze $n > 0$ eine reelle Zahl γ_n und eine Funktion $g_n(x)$ mit

$$\left.\begin{array}{c} g_n(x) \text{ monoton nicht fallend,} \\ 0 \leqq g_n(x) \leqq \frac{1}{2}, \\ f_n(x) = \int_a^x g_n(y)\, dy + \gamma_n \end{array}\right\} \text{ in } \langle a, b\rangle.$$

Es sei nun $f^+(x)$ (bzw. $f^-(x)$) die obere rechte (bzw. linke) Derivierte von $f(x)$. Dann zeigen wir zunächst: Für $a < x_1 < x_2 < b$ ist

$$(46) \quad 0 \leqq f^+(a) \leqq f^-(x_1) \leqq f^+(x_1) \leqq f^-(x_2) \leqq f^+(x_2) \leqq f^-(b) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Es sei nämlich

$$a < a + h_0 < x_1 - k_1 < x_1 < x_1 + h_1 < x_2 - k_2 < x_2 < x_2 + h_2 < b - k_0 < b;$$

dann ist für jedes ganze $n > 0$

$$(47) \quad \left\{\begin{array}{l} 0 \leqq \dfrac{f_n(a+h_0) - f_n(a)}{h_0} \leqq \dfrac{f_n(x_1) - f_n(x_1 - k_1)}{k_1} \leqq \dfrac{f_n(x_1 + h_1) - f_n(x_1)}{h_1} \\ \leqq \dfrac{f_n(x_2) - f_n(x_2 - k_2)}{k_2} \leqq \dfrac{f_n(x_2 + h_2) - f_n(x_2)}{h_2} \leqq \dfrac{f_n(b) - f_n(b - k_0)}{k_0} \leqq \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

(denn es ist

$$0 \leqq g_n(a) \leqq \frac{f_n(a + h_0) - f_n(a)}{h_0} \leqq g_n(a + h_0) \leqq g_n(x_1 - k_1)$$

$$\leqq \frac{f_n(x_1) - f_n(x_1 - k_1)}{k_1} \leqq g_n(x_1) \leqq \ldots).$$

Durch $n \to \infty$ sieht man, daß (47) auch dann richtig bleibt, wenn der Index n überall gestrichen wird; wenn man dann h_0, k_1, h_1, k_2, h_2, k_0 gegen Null streben läßt, folgt (46).

Wir setzen nun (man beachte (46)

$$g(a) = f^+(a),\ g(b) = f^-(b),\ g(x) = f^+(x) = \operatorname{Max}(f^+(x), f^-(x)) \text{ in } (a, b).$$

Dann ist in $\langle a, b\rangle$

$$(48) \qquad 0 \leqq g(x) \leqq \tfrac{1}{2},\ g(x) \text{ monoton nicht fallend.}$$

[6]) Mit Benutzung des Lebesgueschen Integrals wäre der Beweis etwas kürzer.

Es sei nun $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$; wir setzen

$$F(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \quad \text{in } \langle \alpha, \beta \rangle;$$

also

$$F^+(x) = f^+(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \qquad \text{für } \alpha \leqq x < \beta,$$

$$F^-(x) = f^-(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \qquad \text{für } \alpha < x \leqq \beta.$$

Dann ist $F(x)$ in $\langle a, b \rangle$ stetig, und wegen $F(\alpha) = F(\beta) = 0$ wird $\underset{\alpha \leqq x \leqq \beta}{\text{Min}} F(x)$ für ein ξ mit $\alpha \leqq \xi < \beta$ und auch für ein η mit $\alpha < \eta \leqq \beta$ erreicht. Alsdann ist für $\xi \leqq x \leqq \beta$ bzw. für $\alpha \leqq x \leqq \eta$

$$F(x) - F(\xi) \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad F(x) - F(\eta) \geqq 0,$$

also nach (46)

$$0 \leqq F^+(\xi) = f^+(\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leqq g(\beta) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

$$0 \geqq F^-(\eta) = f^-(\eta) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geqq g(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

also

$$(49) \qquad (\beta - \alpha) g(\alpha) \leqq f(\beta) - f(\alpha) \leqq (\beta - \alpha) g(\beta).$$

Wir zeigen nun: Es ist

$$(50) \qquad f(x) = \int_a^x g(y)\, dy + f(a) \quad \text{in } \langle a, b \rangle;$$

wegen (48) sind wir dann fertig. Für $x = a$ ist dies klar; es sei also $a < x \leqq b$. Bei jeder Einteilung

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{\nu - 1} < a_\nu = x, \quad a_\lambda - a_{\lambda - 1} = e_\lambda \quad (1 \leqq \lambda \leqq \nu)$$

ist nach (49)

$$\sum_{\lambda = 1}^{\nu} g(a_{\lambda - 1})\, e_\lambda \leqq f(x) - f(a) = \sum_{\lambda = 1}^{\nu} (f(a_\lambda) - f(a_{\lambda - 1})) \leqq \sum_{\lambda = 1}^{\nu} g(a_\lambda)\, e_\lambda;$$

bei $\underset{\lambda = 1, 2, \ldots, \nu}{\text{Max}} e_\lambda \to 0$ ist aber

$$\lim \sum_{\lambda = 1}^{\nu} g(a_{\lambda - 1})\, e_\lambda = \lim \sum_{\lambda = 1}^{\nu} g(a_\lambda)\, e_\lambda = \int_a^x g(y)\, dy,$$

womit (50) bewiesen ist.

Beweis des Satzes 8. Es gibt eine Folge von Funktionen $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ aus $\mathfrak{M}(a, b)$ mit

$$(51) \qquad \lim_{n = \infty} |\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f_n; a, b)| = s_{\mu_1, \mu_2}(a, b).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f_n(a) = 0$ (sonst betrachte man $f_n(x) - f_n(a)$). Es ist

$$(52) \qquad 0 \leqq f_n(x_2) - f_n(x_1) \leqq \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) \text{ für } a \leqq x_1 < x_2 \leqq b.$$

also

$$(53) \qquad 0 \leqq f_n(x) \leqq \tfrac{1}{2}(b - a) \text{ für } a \leqq x \leqq b.$$

Aus (52), (53) folgt bekanntlich, daß die Folge $f_1(x)$, $f_2(x)$, .. eine in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält[7]); ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei bereits die Folge $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in $\langle a, b\rangle$ gleichmäßig konvergent; es sei

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x) \text{ in } \langle a, b\rangle.$$

Nach Satz 7 gehört $f(x)$ zu $\mathfrak{M}(a, b)$; nach (51) ist aber (infolge der gleichmäßigen Konvergenz)

$$|\mathfrak{C}_{\mu_1, \mu_2}(f; a, b)| = s_{\mu_1, \mu_2}(a, b).$$

Beweis des Satzes 9. Soll

$$s_{\mu_1, \mu_2}(a, b) = S_{\mu_1, \mu_2}(\alpha, \beta) \tag{55}$$

gelten, so muß nach Hilfssatz 6 und Satz 8 entweder

$$a \equiv b \equiv 0, \ \mu_1 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

oder

$$a \equiv \tfrac{1}{4}, \ b \equiv 0, \ \mu_2 = \tfrac{1}{2}, \ b - a \geqq \tfrac{3}{4}$$

sein. In diesen beiden Fällen gilt aber (55) nach Hilfssatz 8.

Prag und Berlin, den 7. November 1934.

---

[7]) Beweis: Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ die rationalen Zahlen von $\langle a, b\rangle$. Es gibt (wegen (53)) eine Teilfolge $f_{11}(x), f_{12}, (x), f_{13}(x), \ldots$, die für $x = \xi_1$ konvergiert; diese Teilfolge enthält wieder eine für $x = \xi_2$ konvergente Teilfolge $f_{21}(x)$, $f_{22}(x), \ldots$ usw. Die „Diagonalfolge" $f_{11}(x), f_{22}(x), f_{33}(x), \ldots$ konvergiert in allen Punkten ξ_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Es sei $\varepsilon > 0$; wir wählen zuerst ein k so, daß es zu jedem x aus $\langle a, b\rangle$ ein λ mit

$$|x - \xi_\lambda| < \frac{\varepsilon}{2}, 1 \leqq \lambda \leqq k \tag{54}$$

gibt; dann wählen wir ein N so, daß für $n > N$, $m > N$, $1 \leqq \lambda \leqq k$ gilt

$$|f_{nn}(\xi_\lambda) - f_{mm}(\xi_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es sei nun $a \leqq x \leqq b$, $n > N$, $m > N$. Wir wählen ein λ mit (54); dann ist nach (52)

$$|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| \leqq |f_{nn}(x) - f_{nn}(\xi_\lambda)| + |f_{nn}(\xi_\lambda) - f_{mm}(\xi_\lambda)| + |f_{mm}(\xi_\lambda) - f_{mm}(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon;$$

also ist die Diagonalfolge gleichmäßig konvergent in $\langle a, b\rangle$.

(Eingegangen am 8. November 1934.)

Über die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

1. Die wichtigsten Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels

$$(1.1)\quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(f) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

von n Größen bzw. einer über ein Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbaren Funktion $f(x)$ erhält man folgendermaßen: Man wählt eine Funktion $\varphi(x)$, die in dem offenen Intervall $\mathfrak{I}$ zweimal differenzierbar ist und deren Ableitungen $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ in $\mathfrak{I}$ ein festes Vorzeichen haben. Liegen dann die a_ν bzw. die Funktionswerte $f(x)$ sämtlich in einem abgeschlossenen Teilintervall von $\mathfrak{I}$ und bedeutet $\Phi(x)$ die zu $\varphi(x)$ inverse Funktion, so ist

$$(1.2)\quad \mathfrak{A}_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi(a) = \Phi\left(\frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)}{n}\right) \quad \text{bzw.}$$

$$\mathfrak{A}_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi(f) = \Phi\left(\frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(f(x))\,dx\right)$$

ein solches verallgemeinertes Mittel, das als *quasiarithmetisches Mittel* bezeichnet wird. Für $\varphi(x) \equiv x$, $\log x$, $\frac{1}{x}$ erhält man das gewöhnliche arithmetische Mittel $\mathfrak{A}$, das geometrische Mittel $\mathfrak{G}$ und das harmonische Mittel $\mathfrak{H}$ der a_ν bzw. von $f(x)$, für $\varphi(x) = x^2$ ihr sogenanntes quadratisches Mittel usw.

Seit längerem sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen bekannt[1]), unter denen $\mathfrak{A}_\varphi$ und $\mathfrak{A}$ (und allgemeiner zwei verschiedene quasiarithmetische Mittel $\mathfrak{A}_\varphi$ und $\mathfrak{A}_\psi$) „vergleichbar" sind, unter denen also für beliebige a_ν bzw. $f(x)$ die Differenz

$$(1.3)\qquad \mathfrak{A}_\varphi - \mathfrak{A}$$

[1]) Vgl. K. Knopp, Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern. Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 387—403. Ferner B. Jessen, Bemaerkinger om konvekse Funktionen og Uligheder imellem Middelvaerdier I, II, Math. Tidsskrift, B (1931), No. 2, 3, 4. Weitere Literaturangaben findet man in dem soeben erschienenen umfassenden Werke von G. H. Hardy, J. E. Littlewood und G. Pólya: Inequalities. Cambridge 1934.

stets ein und dasselbe Vorzeichen hat oder 0 ist. Dasselbe gilt für die Differenz

$$\varphi(\mathfrak{A}_\varphi) - \varphi(\mathfrak{A}), \tag{1. 4}$$

bei der die Voraussetzung, daß $\varphi'(x)$ in $\mathfrak{I}$ ein festes Vorzeichen habe, überflüssig ist.

Dagegen scheint die Frage, um wieviel das eine Mittel höchstens das andere übertreffen kann, bisher nur in einem ganz speziellen Falle beantwortet zu sein, der sich auf die Differenz (1. 4) bezieht und dem Falle $\varphi(x) = x^2$ entspricht. Hier hat nämlich G. Grüß kürzlich bewiesen[2]): Sind a und b $(> a)$ beliebige Zahlen und ist stets $a \leqq f(x) \leqq b$, so gilt immer die Ungleichung

$$0 \leqq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (f(x))^2\,dx - \left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)^2 \leqq \frac{1}{4}(b-a)^2 \tag{1. 5}$$

und der Faktor $\frac{1}{4}$ kann hier durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.

Eine andere spezielle, auf (1. 3) für den Fall des geometrischen Mittels $(\varphi(x) = \log x)$ sich beziehende Antwort gaben G. Pólya und G. Szegö[3]). Sie zeigten, daß, wenn für positive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und gegebenes positives $\varepsilon < 1$

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{G} \leqq \varepsilon\,\mathfrak{A} \tag{1. 6}$$

ist, notwendig die Ungleichungen

$$(1+\varrho)\,\mathfrak{A} < a_r < (1+\varrho')\,\mathfrak{A} \tag{1. 7}$$

bestehen, in denen ϱ und ϱ' die einzige negative bzw. die einzige positive Wurzel der transzendenten Gleichung

$$(1+x)e^{-x} = (1-\varepsilon)^n$$

bedeutet.

---

[2]) G. Grüß, Über das Maximum des absoluten Betrages von

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx,$$

Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 215—226. Vgl. hierzu die wesentlich vereinfachten Beweise bei E. Landau, Über einige Ungleichungen von Herrn G. Grüß, ebenda **39** (1935), S. 742—744. Hiernach folgt (1. 5), wenn ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha = 0$, $\beta = 1$ angenommen und $\int_0^1 f(x)\,dx = F$ gesetzt wird, unmittelbar aus der Identität

$$\int_0^1 (f(x))^2\,dx - F^2 = (b-F)(F-a) - \int_0^1 (b-f(x))(f(x)-a)\,dx.$$

[3]) G. Pólya, Aufgabe, Archiv d. Math. u. Phys. (3), **19** (1912), S. 361; Lösung von G. Szegö, ebenda **22** (1914), S. 361—362. Vgl. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, Abschn. II, Aufgabe 97.

In den folgenden §§ 2 und 3 sollen nun allgemein für den Fall einer beliebigen, den genannten Voraussetzungen genügenden Funktion $\varphi(x)$ die genauen Grenzen für die Differenzen (1. 3) und (1. 4) angegeben werden.

Die Frage des maximalen Verhältnisses der Mittel scheint, von den aus (1. 7) abzulesenden Aussagen abgesehen, bisher nur für den Fall des harmonischen Mittels $\left(\varphi(x) = \frac{1}{x}\right)$ eine Antwort gefunden zu haben. P. Schweitzer[4]) beweist: Sind a und b $(> a)$ beliebige positive Zahlen und liegen die a_ν bzw. die Funktionswerte $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $a \ldots b$, so ist stets

$$(1.\,8) \qquad 1 \leqq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{H}} \leqq \frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Beide Grenzen können offenbar erreicht werden.

In § 4 soll diese Frage für alle Potenzmittelwerte $(\varphi(x) = x^\varrho,\ \varrho \gtrless 0$, beliebig) und das geometrische Mittel beantwortet werden[5]).

2. Es gelten die beiden folgenden Sätze:

Satz 1. *Die Funktion $\varphi(x)$ sei in dem offenen Intervall $\mathfrak{J}$ zweimal differenzierbar und es sei dort $\varphi''(x) > 0$. Gehören dann die n Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw. sämtliche Werte der in $\alpha \leqq x \leqq \beta$ definierten und über dieses Intervall im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbaren Funktion $f(x)$ dem abgeschlossenen Teilintervall $a \leqq x \leqq b$ von $\mathfrak{J}$ an, so ist stets*

$$(2.\,1) \qquad 0 \leqq \varphi(\mathfrak{A}_\varphi) - \varphi(\mathfrak{A}) \leqq \lambda\varphi(a) + (1-\lambda)\varphi(b) - \varphi\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right)$$

mit[6])

$$(2.\,2) \qquad \lambda = \frac{1}{b-a}\left[b - \varphi'^{-1}\left(\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}\right)\right].$$

---

[4]) P. Schweitzer, Eine Ungleichung über das arithmetische Mittel (ungarisch), Math. és phys. lapok **23** (1914), S. 257—261.

[5]) Eine verwandte Frage behandelt J. Karamata in seiner Arbeit Compléments au premier théorème de la moyenne, Académie royale serbe, Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles, A. Sciences mathématiques et physiques No. 1, 1933, S. 97—106.

Er untersucht die bewichteten arithmetischen Mittel

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\int_\alpha^\beta p(t) f(t)\,dt}{\int_\alpha^\beta p(t)\,dt}$$

bei gegebenen, der Größe nach geordneten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw. wachsendem $f(t)$ für verschiedene den Bedingungen $0 < a \leqq p_\nu \leqq b$ bzw. $a \leqq p(t) \leqq b$ genügende Gewichte und stellt unter diesen Bedingungen die genauen Schranken des Mittels fest. Methode und Ergebnisse weisen manche Berührungspunkte mit der vorliegenden Arbeit auf.

[6]) Wir bezeichnen die zu einer Funktion $\psi(x)$ inverse Funktion auch mit $\psi^{-1}(x)$.

Ist in $\mathfrak{I}$ ständig $\varphi''(x) < 0$, so ist der Sinn der Ungleichungen der entgegengesetzte. Beide Grenzen werden in gewissen Fällen erreicht.

Satz 2. *Ist unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 1 überdies in $\mathfrak{I}$ neben $\varphi''(x) > 0$ auch stets $\varphi'(x) > 0$ (oder sind dort $\varphi''(x)$ und $\varphi'(x)$ beide dauernd negativ), so ist*

$$(2.3)\quad 0 \leqq \mathfrak{A}_\varphi - \mathfrak{A} \leqq \Phi(\mu\varphi(a) + (1-\mu)\varphi(b)) - (\mu a + (1-\mu)b)$$

mit

$$(2.4)\quad \mu = \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)}\left[\varphi(b) - \varphi\left\{\varphi'^{-1}\left(\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a}\right)\right\}\right].$$

Haben $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ in $\mathfrak{I}$ feste, aber entgegengesetzte Vorzeichen, so ist der Sinn der Ungleichungen der entgegengesetzte.

Bemerkungen. 1. Für $\varphi(x) = x^2$ liefert Satz 1 sofort das Grüßsche Ergebnis (1.5).

2. Wählt man $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, so ist $\mathfrak{A}_\varphi$ das harmonische Mittel $\mathfrak{H}$, und a und b dürfen irgend zwei positive Zahlen sein. Satz 2 besagt dann, daß stets

$$0 \leqq \mathfrak{A} - \mathfrak{H} \leqq (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$$

ausfällt. Die linke Grenze wird erreicht, wenn alle a_ν denselben Wert haben, bzw. $f(x) \equiv \text{const}$ ist. Die rechte Grenze wird erreicht, wenn

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{in} \quad 0 \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \\ b & \text{in} \quad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < x \leqq 1 \end{cases}$$

gesetzt wird. Auch für gewisse a, b, a_ν, n wird die obere Grenze erreicht, nämlich wenn $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\, n$ eine ganze positive Zahl p ist und wenn p der Größen $a_\nu = a$, die $(n-p)$ übrigen $= b$ sind.

Unter denselben Annahmen liefert Satz 1, daß stets

$$0 \leqq \frac{1}{\mathfrak{H}} - \frac{1}{\mathfrak{A}} \leqq \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$$

ist.

3. Für $\varphi(x) = \log x$ erhält man für beliebiges $0 < a < b$:

$$0 \leqq \mathfrak{A} - \mathfrak{G} \leqq \mu_0 a + (1-\mu_0)b - a^{\mu_0} b^{1-\mu_0}$$

mit

$$\mu_0 = \frac{1}{\log \frac{b}{a}} \log \frac{\log \frac{b}{a}}{1 - \frac{a}{b}}.$$

Die Grenzen werden in entsprechenden Sonderfällen erreicht.

Ohne Ausführung des Beweises sei hinzugefügt, daß aus diesem Ergebnis sich als Antwort auf die in § 1 erwähnte Fragestellung der Herren Pólya und Szegö die folgende ergibt: Unter den dort genannten Voraussetzungen ist stets

$$(1-\sigma)\,\mathfrak{A} \leqq a_\nu \leqq (1+(n-1)\,\sigma)\,\mathfrak{A},$$

wenn σ die in $0 \ldots 1$ gelegene Wurzel von

$$(1-x)^{n-1}(1+(n-1)\,x) = (1-\varepsilon)^n$$

bedeutet. Die damit gewonnenen Grenzen sind besser als die in § 1 genannten; sie werden in gewissen Fällen erreicht.

4. Für $\varphi(x) = x^\varrho$, ($\varrho \neq 0$ und $\neq 1$) sind die $\mathfrak{A}_\varphi$ die sogenannten *Potenzmittelwerte*, die mit $\mathfrak{A}_\varrho$ bezeichnet werden mögen. Man erhält für beliebiges $0 < a < b$ nach Satz 1: Für $\varrho > 1$ und $\varrho < 0$ ist stets

$$0 \leqq \mathfrak{A}_\varrho^\varrho - \mathfrak{A}^\varrho \leqq \lambda a^\varrho + (1-\lambda)\,b^\varrho - (\lambda a + (1-\lambda)\,b)^\varrho.$$

Dabei bedeutet, wenn noch $\frac{a}{b} = \gamma$ gesetzt wird, λ den nur von γ abhängigen Wert

$$\lambda = \frac{1}{1-\gamma}\Big[1 - \Big(\frac{1}{\varrho}\,\frac{1-\gamma^\varrho}{1-\gamma}\Big)^{\frac{1}{\varrho-1}}\Big].$$

Für $0 < \varrho < 1$ ist der Sinn der Ungleichung der entgegengesetzte.

Und ähnlich liefert Satz 2:

Für $\varrho > 1$ ist stets

$$0 \leqq \mathfrak{A}_\varrho - \mathfrak{A} \leqq (\mu a^\varrho + (1-\mu)\,b^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}} - (\mu a + (1-\mu)\,b)$$

mit

$$\mu = \frac{1}{1-\gamma^\varrho}\Big[1 - \Big(\frac{1}{\varrho}\,\frac{1-\gamma^\varrho}{1-\gamma}\Big)^{\frac{\varrho}{\varrho-1}}\Big].$$

Für $\varrho < 1$ (einschließlich $\varrho < 0$) ist der Sinn der Ungleichung der entgegengesetzte.

Für $\varrho \to 0$ gehen diese Aussagen in die in der vorangehenden Bemerkung gemachten über. Für $\varrho = 1$ ist schon die Fragestellung trivial.

3. Beweise. Wir beweisen zunächst Satz 1 für den Fall, daß es sich um das Mittel $\varphi(\mathfrak{A}_\varphi)$ von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ handelt, ($n > 1$), und daß $\varphi''(x)$ in $\mathfrak{J}$ positiv ist. Dazu halten wir die Zahlen $a_1, \ldots, a_{n-1}$ fest, lassen nur $a_n = x$ veränderlich und betrachten demgemäß die Funktion

$$F(x) = \frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_{n-1}) + \varphi(x)}{n} - \varphi\Big(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + x}{n}\Big).$$

Wegen

$$F'(x) = \frac{1}{n}\,\varphi'(x) - \frac{1}{n}\,\varphi'\Big(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1} + x}{n}\Big)$$

und der Monotonie von $\varphi'(x)$ hat $F(x)$ in $\mathfrak{I}$ genau einen Extremwert an der Stelle

$$\xi = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1},$$

die in $a \leqq \xi \leqq b$ liegt. Wegen

$$F''(\xi) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\varphi''(\xi) > 0$$

handelt es sich um ein Minimum. Dieses Minimum hat den Wert

$$F(\xi) = \frac{n-1}{n}\left(\frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_{n-1})}{n-1} - \varphi\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}\right)\right).$$

Hieraus ergibt sich zunächst durch Rückinduktion die Richtigkeit der linken Hälfte von (2.1). Weiter ergibt sich, daß der Wert von $\varphi(\mathfrak{A}_\varphi) - \varphi(\mathfrak{A})$ nicht verkleinert wird, wenn man a_n durch diejenige der Zahlen a, b ersetzt, die mit a_n auf derselben Seite von ξ liegt. Verlegt man so schrittweise die Größen a_ν in die Stellen a bzw. b, so zeigt sich, daß $\varphi(\mathfrak{A}_\varphi) - \varphi(\mathfrak{A})$ nicht größer sein kann als der größte der $(n-1)$ Werte

$$G(z) = \frac{z\,\varphi(a) + (n-z)\,\varphi(b)}{n} - \varphi\left(\frac{z\,a + (n-z)\,b}{n}\right)$$

für $z = 1, 2, \ldots, n-1$. Nun ist, wenn wir noch $z = n\,t$, $G(n\,t) = g(t)$ setzen,

$$g'(t) = \varphi(a) - \varphi(b) - (a-b)\,\varphi'(t\,a + (1-t)\,b),$$
$$g''(t) = -(a-b)^2 \cdot \varphi''(t\,a + (1-t)\,b).$$

Hiernach hat $g(t)$ genau einen Extremwert an der durch (2.2) angegebenen Stelle $t = \lambda$. Diese ist ein Maximum, das den auf der rechten Seite von (2.1) angegebenen Wert hat. Der größte der Werte $G(1)$, $G(2), \ldots, G(n-1)$ ist daher höchstens gleich diesem Maximum. Damit ist auch die rechte Seite von (2.1) für die Mittel $\mathfrak{A}_\varphi(a)$ bewiesen.

Handelt es sich um das Mittel $\mathfrak{A}_\varphi(f)$ einer der in Satz 1 genannten Funktionen $f(x)$, so setze man $f\left(\alpha + \frac{\nu}{n}(\beta - \alpha)\right) = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, und betrachte

$$\varphi(\mathfrak{A}_\varphi(a)) - \varphi(\mathfrak{A}(a)).$$

Für $n \to +\infty$ geht dann das eben gewonnene Ergebnis in das entsprechende für $\mathfrak{A}_\varphi(f)$ über.

Die untere Schranke 0 wird erreicht, wenn alle a_ν denselben Wert haben bzw. $f(x) \equiv \text{const}$ ist — und übrigens nur in diesem Falle, wenn man äquivalente Funktionen (d. h. solche, die an allen Stetigkeitsstellen denselben Wert haben) als nicht verschieden ansieht.

Die obere Grenze wird im Falle der Mittel $\mathfrak{A}_\varphi(f)$ erreicht, wenn

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ in } \alpha \leqq x \leqq \alpha + \lambda(\beta - \alpha), \\ b \text{ in } \alpha + \lambda(\beta - \alpha) < x \leqq \beta \end{cases}$$

gesetzt wird[7]). Im Falle der Mittel $\mathfrak{A}_\varphi(a)$ kann bei festem a, b, n die obere Grenze nicht immer erreicht werden. Der Beweis lehrt nämlich, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn die Stelle $n\lambda$ des Maximums von $G(z)$ in einem der Punkte $1, 2, \ldots, n-1$ liegt, wenn also $n\lambda$ eine ganze Zahl p ist und wenn p der Werte a_ν in a, die übrigen $(n-p)$ in b liegen. Andernfalls ist (bei festem a, b, n) der größere der beiden Werte

$$G([n\lambda]), \qquad G([n\lambda]+1)$$

die genaue obere Grenze von $\varphi(\mathfrak{A}_\varphi(a)) - \varphi(\mathfrak{A}(a))$.

Daß sich schließlich der Sinn der Ungleichung umkehrt, wenn in $\mathfrak{I}$ ständig $\varphi''(x) < 0$ ist, ist unmittelbar aus dem Beweis zu sehen.

Satz 2 läßt sich nach derselben Methode beweisen; er ergibt sich aber auch als leichte Folgerung aus Satz 1. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 und unter der Annahme, daß in $\mathfrak{I}$ zunächst $\varphi''(x)$ und $\varphi'(x)$ beide positiv sind, braucht man nämlich nur den Satz 1 für die zu $\varphi(x)$ inverse Funktion $\Phi(x)$ anzuwenden. Wegen

$$\Phi''(x) = -\frac{\varphi''(y)}{(\varphi'(y))^3} < 0 \qquad (y = \Phi(x)),$$

liefert er zunächst

$$0 \geqq \Phi(\mathfrak{A}_\varphi) - \Phi(\mathfrak{A}) \geqq \lambda\Phi(a) + (1-\lambda)\Phi(b) - \Phi(\lambda a + (1-\lambda)b)$$

mit

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\left[b - \Phi'^{-1}\left(\frac{\Phi(b)-\Phi(a)}{b-a}\right)\right].$$

Ersetzt man hierin a_ν bzw. f, a, b durch $\varphi(a_\nu)$ bzw. $\varphi(f(x))$, $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ und bezeichnet den Ausdruck, der durch diese Ersetzung aus dem zuletzt für λ hingeschriebenen entsteht, mit μ, so ergibt sich, da

$$\Phi'^{-1}(x) = \varphi\left(\varphi'^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

ist, genau die Behauptung des Satzes 2. Daß diese auch richtig bleibt, wenn φ'' und φ' beide negativ sind, und daß der Sinn der Ungleichung umgekehrt werden muß, wenn φ'' und φ' entgegengesetzte Vorzeichen haben, ist wieder unmittelbar zu sehen. Ebenso, daß beide Grenzen in entsprechendem Ausmaße wie bei Satz 1 erreicht werden.

4. Die Frage nach den engsten Schranken der Verhältnisse von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_\varphi$ bzw. von $\varphi(\mathfrak{A})$ und $\varphi(\mathfrak{A}_\varphi)$ lassen sich im Falle der Potenzmittelwerte $\mathfrak{A}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{A}_\varrho^\varrho$, wenn also $\varphi(x) = x^\varrho$ ist ($\varrho \neq 0$ und $\neq 1$), in ganz ähnlicher Weise beantworten. Es gelten darüber die beiden Sätze:

[7]) Aus (2. 2) ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung unmittelbar zu erkennen, daß $0 < \lambda < 1$ ist.

Satz 3. *Ist $\varrho > 1$ oder $\varrho < 0$ und liegen bei festem $0 < a < b$ die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw. die Funktionswerte der in $\alpha \leqq x \leqq \beta$ definierten und über dieses Intervall im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktion $f(x)$ in $a \ldots b$, so ist, wenn noch $\frac{a}{b} = \gamma$ gesetzt wird,*

$$(4.1) \qquad 1 \leqq \frac{\mathfrak{A}_\varrho^\varrho}{\mathfrak{A}^\varrho} \leqq \frac{1}{\varrho} \frac{1-\gamma^\varrho}{1-\gamma} \left[\frac{\varrho - 1}{\frac{1-\gamma^\varrho}{1-\gamma} - 1} \right]^{\varrho - 1}.$$

Für $0 < \varrho < 1$ ist der Sinn der Ungleichung der umgekehrte. Beide Grenzen können erreicht werden.

Satz 4. *Für $\varrho > 1$ ist unter sonst gleichen Voraussetzungen*

$$(4.2) \qquad 1 \leqq \frac{\mathfrak{A}_\varrho}{\mathfrak{A}} \leqq M^{\frac{1}{\varrho}},$$

wenn der in (4.1) rechts stehende Ausdruck mit M bezeichnet wird. Für $\varrho < 1$ ist der Sinn der Ungleichung der entgegengesetzte. Die Grenzen können erreicht werden.

Beweis. Aus entsprechenden Gründen wie beim Beweise von Satz 1 betrachten wir die Funktion

$$F(x) = \frac{B + x^\varrho}{(A + x)^\varrho}, \qquad \begin{pmatrix} A = a_1 + \ldots + a_{n-1} \\ B = a_1^\varrho + \ldots + a_{n-1}^\varrho \end{pmatrix}.$$

Ihre erste Ableitung verschwindet nur an der Stelle

$$x = \xi = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\varrho - 1}},$$

die in $a \ldots b$ liegt, und an dieser Stelle ist die zweite Ableitung

$$F''(\xi) = \varrho(\varrho - 1) \frac{A\, \xi^{\varrho - 2}}{(A + \xi)^{\varrho + 1}},$$

hat also das Vorzeichen von $\varrho(\varrho - 1)$.

Man wird weiter auf die Untersuchung der Funktion

$$G(n\,t) = g(t) = \frac{a^\varrho t + b^\varrho (1 - t)}{(a\,t + b\,(1 - t))^\varrho} = \frac{1 - (1 - \gamma^\varrho)\, t}{(1 - (1 - \gamma)\, t)^\varrho}$$

geführt. Ihre erste Ableitung $g'(t)$ verschwindet nur an der Stelle

$$t = \tau = \frac{1}{\varrho - 1} \left(\frac{\varrho}{1 - \gamma^\varrho} - \frac{1}{1 - \gamma} \right),$$

und dieser Wert liegt zwischen 0 und 1, weil

$$g(1) - g(0) = 0 = g'(\tau)$$

ist und weil $g'(t)$ außer τ keine weitere Nullstelle besitzt. An der Stelle τ ist die zweite Ableitung

$$g''(\tau) = -(\varrho - 1)(1 - \gamma^\varrho) \frac{1 - \gamma}{(1 - (1 - \gamma)\, \tau)^{\varrho + 1}}$$

und hat also das entgegengesetzte Vorzeichen wie $\varrho(\varrho - 1)$. Damit ist schon alles Wesentliche bewiesen. Denn $g(\tau)$ ist gleich dem auf der rechten Seite von (4.1) stehenden Ausdruck, und der Übergang zu Funktionen $f(x)$ erledigt sich wie bei Satz 1. Auch die linke Hälfte von (4.1) ist schon durch Satz 1 bewiesen. Satz 4 aber ergibt sich aus (4.1) durch Potenzieren mit $\frac{1}{\varrho}$.

Für $\varrho = -1$ ergibt sich z. B. $\tau = \frac{1}{2}$ und somit

$$1 \leqq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{H}} \leqq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{h}}, \tag{4.3}$$

wenn $\mathfrak{a}$ das arithmetische, $\mathfrak{h}$ das harmonische Mittel von a und b bedeutet. Das ist die Beziehung (1.8).

Den Fall des geometrischen Mittels ($\varphi(x) = \log x$) kann man mit denselben Mitteln direkt angreifen oder für $\varrho \to 0$ aus dem vorigen Ergebnis gewinnen. Man erhält unter den analogen Voraussetzungen

$$1 \leqq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{G}} \leqq \frac{1-\gamma}{\log\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{4.4}$$

(Eingegangen am 13. Dezember 1934.)